10 класс – день 2

1. а) Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n,\ldots$ Известно, что $a_3+a_6=23$, $a_6^2-a_3^2=207$. Чему равен девятый член прогрессии?
Ответ: 25.
Решение. Обозначим первый член прогрессии a, а её разность – d. Тогда

$$\begin{cases} a+5d+a+2d=23, \\ (a+5d)^2-(a+2d)^2=207; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a+7d=23, \\ 23\cdot 3d=207. \end{cases}$$

Отсюда $d=3$, $a=1$, следовательно, $a_9=a+8d=25$.

б) Дана убывающая арифметическая прогрессия $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n,\ldots$ Известно, что $a_3+a_8=15$, $a_8^2-a_3^2=-75$. Чему равен двенадцатый член прогрессии?
Ответ: 1.

в) Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n,\ldots$ Известно, что $a_4+a_8=14$, $a_8^2-a_4^2=56$. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?
Ответ: 19.

г) Дана убывающая арифметическая прогрессия $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n,\ldots$ Известно, что $a_2+a_5=23$, $a_5^2-a_2^2=-225$. Чему равен седьмой член прогрессии?
Ответ: $\frac{2}{23}\approx 0{,}087$.

д) Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n,\ldots$ Известно, что $a_2+a_7=16$, $a_7^2-a_2^2=160$. Чему равен одиннадцатый член прогрессии?
Ответ: 21.

2. а) Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n)=\Pi(n+1)=\Pi(n+2)<\Pi(n+3)=648$.
Ответ: 89 908.
Решение. Произведения цифр двух последовательных натуральных чисел могут быть равны, только если в записи обоих чисел содержится цифра ноль. Значит, $\Pi(n)=\Pi(n+1)=\Pi(n+2)=0$, $\Pi(n+3)>0$. Отсюда следует, что число n оканчивается на 08, а число $n+3$ – на 11. Так как $648=2^3\cdot 3^4=8\cdot 9\cdot 9$, то минимально возможное значение $n+3$ – это 89 911, а минимально возможное значение n есть 89 908.

б) Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n)=\Pi(n+1)=\Pi(n+2)<\Pi(n+3)=360$.
Ответ: 58 908.

в) Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n)=\Pi(n+1)=\Pi(n+2)<\Pi(n+3)=504$.
Ответ: 78 908.

г) Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n)=\Pi(n+1)=\Pi(n+2)<\Pi(n+3)=160$.
Ответ: 45 808.

д) Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n)=\Pi(n+1)=\Pi(n+2)<\Pi(n+3)=135$.
Ответ: 35 908.

3. а) 20 школьников записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 13 школьников, на физику – 10 школьников, а 9 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 9 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

Ответ: 3.

Решение. Пусть x учеников записались на кружки только по информатике и физике, y выбрали только информатику и математику, z – только математику и физику, а t учеников записались на все три кружка. Общее число учеников тем самым равно $(13-x-y-t)+(10-x-z-t)+(9-y-z-t)+x+y+z+t=20$. По условию $x+y+z+t=9$. Из полученных уравнений находим, что искомое значение – это $t=3$.

б) 28 школьников записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 11 школьников, на физику – 15 школьников, а 14 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 10 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

Ответ: 2.

в) 34 школьника записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 14 школьников, на физику – 18 школьников, а 20 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 13 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

Ответ: 5.

г) 25 школьников записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 11 школьников, на физику – 14 школьников, а 13 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 10 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

Ответ: 3.

д) 32 школьника записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 14 школьников, на физику – 14 школьников, а 16 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 11 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

Ответ: 1.

4. а) Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 70 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 50 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 40 км/ч^2. Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 38,75.

Решение. Будем считать, что вдоль шоссе идёт координатная прямая такая, что пункт A имеет координату 0, а пункт B – координату 70. Тогда спустя t часов координата мотоцикла – это $x_1 = vt = 50t$, а координата машины равна $x_2 = 70 + \frac{at^2}{2} = 70 + 20t^2$. Расстояние между ними равно $|x_2 - x_1| = |70 + 20t^2 - 50t|$. Выражение под модулем – это квадратичная функция; её минимум принимается в точке $t_0 = \frac{5}{4}$, и он равен 38,75. Значит, выражение под модулем положительно при всех t, мотоцикл никогда не догонит машину, а минимальное расстояние между ними будет 38,75 километров.

б) Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 20 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 30 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 40 км/ч^2. Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 8,75.

в) Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 45 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 42 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 48 км/ч^2. Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 26,625.

г) Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 62 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 63 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 36 км/ч^2. Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 6,875.

д) Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 52 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 63 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 42 км/ч^2. Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 4,75.

5. а) В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, пересекает прямую CD в точке P. Известно, что высота ромба равна 1, а $CP = \frac{9}{2\sqrt{2}}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.
Ответ: 3.
Решение. Пусть $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$, BH – высота ромба, опущенная на сторону AD. Из прямоугольных треугольников ABH и BCP получаем, что $AB = \frac{BH}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$, $BC = CP\cos\alpha = \frac{9\cos\alpha}{2\sqrt{2}}$. Так как стороны ромба равны между собой, получаем уравнение $\frac{9\cos\alpha}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sin\alpha}$. В силу того что α – острый угол, его синус и косинус положительны, поэтому возводя обе части уравнения в квадрат, получаем эквивалентное исходному уравнение $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{8}{81}$, откуда $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \frac{8}{81} = 0$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ или $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, $AB = 3$ или $AB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. По условию AB – целое число, и подходит только первый вариант.

б) В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, пересекает прямую CD в точке P. Известно, что высота ромба равна 1, а $CP = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.
Ответ: 2.

в) В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, пересекает прямую CD в точке P. Известно, что высота ромба равна 3, а $CP = \frac{16}{\sqrt{7}}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.
Ответ: 4.

г) В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, пересекает прямую CD в точке P. Известно, что высота ромба равна 4, а $CP = \frac{25}{3}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.
Ответ: 5.

д) В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, пересекает прямую CD в точке P. Известно, что высота ромба равна 3, а $CP = \frac{25}{4}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.
Ответ: 5.

6. а) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 11x = m$ и $x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?
Ответ: 21.
Решение. Домножим второе уравнение на x и вычтем из первого. Получим уравнение $2x^2 + (k - 11)x - m = 0$, которое имеет два общих корня с уравнением $x^2 - 2x - k = 0$. Значит, уравнения пропорциональны, откуда $k = 7$, $m = 14$. Осталось заметить, что при найденных значениях m и k исходные уравнения имеют два общих корня. Значит, $N = 21$.

б) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 4x^2 - x = m$ и $x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?
Ответ: -5.

в) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - x^2 - 11x = m$ и $x^2 + 2x = k$ имеют два общих корня?
Ответ: -10.

г) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 + 5x^2 - x = m$ и $x^2 + 2x = k$ имеют два общих корня?
Ответ: 28.

д) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 4x^2 - x = m$ и $x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?
Ответ: -5.

7. а) Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$x-2y-2{,}5; \quad 2x-y-3; \quad x^2-2x+y^2+y+3; \quad x^2-x+y^2+2y+2{,}5$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x+y$.
Ответ: -1.
Решение. Если эти числа обозначить a, b, c, d, то окажется, что $a-b=c-d$. Это означает, что $a=b \Leftrightarrow c=d$, $a=c \Leftrightarrow b=d$. Значит, имеет смысл рассмотреть только два варианта: $a=d$ и $b=c$. Уравнение $b=c$ не имеет решений. Уравнение $a=d$ дает $x^2-2x+y^2+4y+5=0$. Отсюда находим $x=1$, $y=-2$. Несложно проверить, что при этом равны между собой только два из четырёх чисел.

б) Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$y-2x-1{,}5; \quad 2y-x-2; \quad y^2-2y+x^2+x+4; \quad y^2-y+x^2+2x+3{,}5$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x-y$.
Ответ: -3.

в) Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$x-3y-5; \quad 3x-y-5{,}5; \quad x^2-3x+y^2+y+5{,}5; \quad x^2-x+y^2+3y+5$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x-y$.
Ответ: 4.

г) Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$y-3x-4; \quad 3y-x-4,5; \quad y^2-3y+x^2+x+6,5; \quad y^2-y+x^2+3x+6$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x-y$.
Ответ: -4.

д) Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$x-2y-2{,}5; \quad 2x-y-3{,}5; \quad 2x^2-2x+y^2+y+3; \quad 2x^2-x+y^2+2y+2$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x+y$.
Ответ: $-1{,}5$.

8. а) В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 90, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{18}{5}$. Площадь треугольника BHN равна 420, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{42}{5}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ: 13,6.

б) В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 120, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{15}{4}$. Площадь треугольника BHN равна 48, а радиус вписанной в него окружности равен 3. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ: 7.

Решение. Треугольники AHM и BHN – равнобедренные с основаниями AH и BH соответственно, а их высоты, опущенные из вершин M и N, равны. Поскольку медиана делит площадь треугольника пополам, $S_{ACH} = 2S_{AMH}$, $S_{BCH} = 2S_{BHN}$, поэтому $S_{ABC} = 2(120 + 48) = 336$.

Кроме того, периметр треугольника AHM равен $\frac{2S_1}{r_1} = 64$, а периметр треугольника BHN равен $\frac{2S_2}{r_2} = 32$. Заметим, что периметр треугольника ABC равен сумме периметров треугольников AHM и BHN, поэтому радиус вписанной в треугольник ABC окружности есть $r = \frac{336}{32+16} = 7$.

в) В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 135, а радиус вписанной в него окружности равен 5. Площадь треугольника BHN равна 945, а радиус вписанной в него окружности равен 8,75. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ: 16.

г) В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 243, а радиус вписанной в него окружности равен 6. Площадь треугольника BHN равна 810, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{20}{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ: 13.

д) В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 675, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{45}{4}$. Площадь треугольника BHN равна 165, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{55}{12}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ: 17,5.

9. а) В каждую клетку доски 24×30 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

Ответ: 360.

Решение. В любом клетчатом квадрате 2×2 должно стоять не более 2 белых шашек (иначе найдется уголок без чёрных шашек). Разобьем доску на 180 квадратов 2×2. В каждом квадрате стоит не более 2 белых шашек. Значит, всего белых шашек не более $180 \cdot 2 = 360$. Рассмотрим шахматную раскраску доски. Чёрные шашки можно поставить на чёрные клетки, а белые шашки – на белые клетки (их будет ровно 360). Тогда в любом «уголке» из 3 клеток будет черная шашка.

б) В каждую клетку доски 22×36 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

Ответ: 396.

в) В каждую клетку доски 28×40 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

Ответ: 560.

г) В каждую клетку доски 30×26 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

Ответ: 390.

д') В каждую клетку доски 34×38 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

Ответ: 646.

10. а) За круглый стол сели 90 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 60.

Решение. У трёх мудрецов, сидящих подряд, числа на карточках не могут быть одновременно положительными. В противном случае у мудреца, сидящего справа от этих трёх (четвёртого), число на карточке было бы больше. У пятого мудреца число должно было бы быть ещё больше и т.д. А так как мудрецы сидят по кругу, мы бы пришли к противоречию. Таким образом, у любой тройки мудрецов, сидящих подряд, на карточках записано не более двух положительных чисел. Разбив мудрецов на тройки, получаем, что карточек с положительными числами не больше 60.

60 карточек с положительными числами может быть, например, если у мудрецов карточки с числами $2, 2, -2, \ldots, 2, 2, -2$.

б) За круглый стол сели 78 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 52.

в) За круглый стол сели 66 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 44.

г) За круглый стол сели 105 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 70.

д) За круглый стол сели 114 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 76.