11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

Ответ: $x=18$, $x=0$.

Решение. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots$ – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_7 = b_1q^6$, $b_9 = b_1q^8$, $b_{15} = b_1q^{14}$, откуда следует, что $b_9^4 = b_7^3b_{15}$, а b_7, b_9 и b_{15} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(x+3)^4 = \left(\sqrt{(25x-9)(x-6)}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(x+3)^4 = (25x-9)^2$. Решаем его:

$$\left(x^2+6x+9\right)^2 = (25x-9)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x+9 = 25x-9, \\ x^2+6x+9 = 9-25x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=18, \\ x=-31, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Значение $x=1$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x=-31$ не подходит, так как при этом $b_7>0$, $b_9<0$, $b_{15}>0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-2-2\sqrt{2}; 5; 0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{11}-4}{2}; 5; 0\right)$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y, а правая только от z. Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z) = \sqrt{81-z^2}$ является отрезок $[0;9]$. Пусть $h(y) = |y+4| + 4|y-5|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y. В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geqslant 5$ и убывает при $y \leqslant 5$. Отсюда следует, что $y=5$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(5)=9$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 9$, из второго уравнения находим, что $f(z)=9 \Leftrightarrow z=0$ и $h(y)=9 \Leftrightarrow y=5$.
Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+5-2\sqrt{(x+5)(1-x)}+$ $+1-x$, откуда $2\sqrt{5-4x-x^2} = 6-t^2$. Уравнение принимает вид $t+4 = 6-t^2$. Решая его, находим

$t = -2$ или $t = 1$.

- Если $t = 1$, то

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 1 \Leftrightarrow x + 5 = 1 - x + 2\sqrt{1-x} + 1 \Leftrightarrow 2x + 3 = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)^2 = 4(1-x), \\ 2x+3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-4\pm\sqrt{11}}{2}, \\ x \geqslant -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}-4}{2}.$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -2$:

$$\sqrt{x+5} + 2 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x + 5 + 4\sqrt{x+5} + 4 = 1 - x \Leftrightarrow 2\sqrt{x+5} = -x - 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+5) = (-x-4)^2, \\ -x-4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \pm 2\sqrt{2}, \\ x \leqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{2}.$$

Итак, система имеет два решения: $\left(-2-2\sqrt{2}; 5; 0\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{11}-4}{2}; 5; 0\right)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$p\cos 3x + 3(p+4)\cos x = 6\cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

Ответ: Решения есть при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.
Они задаются формулой $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

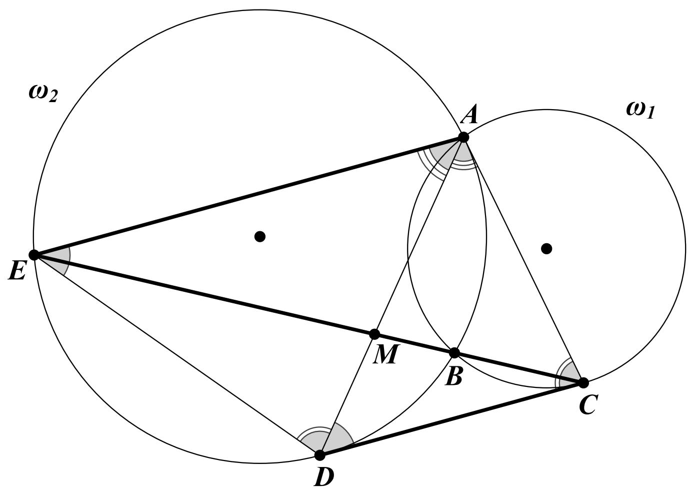
Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(p-1)t^3 + (t-1)^3$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $\left(t\sqrt[3]{p-1}\right)^3 = (1-t)^3 \Leftrightarrow t\sqrt[3]{p-1} = 1 - t \Leftrightarrow t = \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$.
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left|\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+\sqrt[3]{p-1} \geqslant 1, \\ 1+\sqrt[3]{p-1} \leqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p \leqslant -7, \\ p \geqslant 1. \end{array}\right.$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$ имеет решения $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C.

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{2}}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD. По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD. Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC, не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $\left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$.

Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M. Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE. По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C^4_{20\,000} - 2 \cdot C^2_{10\,000}$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна. Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1, относительно ℓ_2 – через A_2, относительно O – через B. Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1, достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1. Так как в верхней половине прямоугольника всего 20 000 клеток, $|A_1| = C^4_{20\,000}$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 20 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C^4_{20\,000}$.
Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1, получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2, получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C^2_{10\,000}$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C^2_{10\,000}$, $|A_2 \cap B| = C^2_{10\,000}$, $|A_1 \cap B| = C^2_{10\,000}$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C^4_{20\,000} - 2 \cdot C^2_{10\,000}$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

Ответ: $(26; 34; 35)$, $(26; 34; 25)$, $(-27; -19; -18)$, $(-27; -19; -28)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c < b - c$ (за счёт того, что $a < b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} a - c = 1, \\ b - c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a - c = -p^2, \\ b - c = -1. \end{cases} \qquad (*)$$

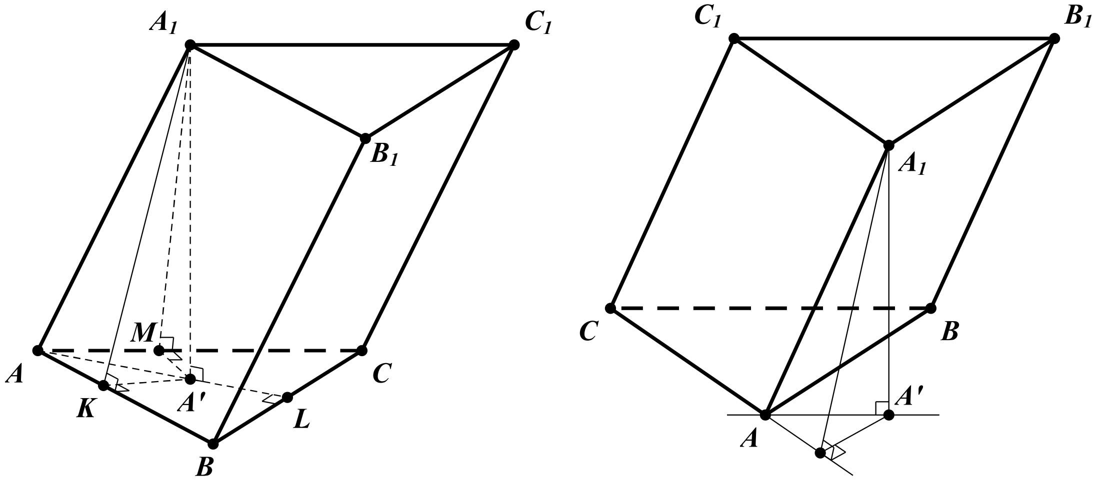
Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $b - a = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3\,(3k^2 - 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3\,(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $b - a$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $b - a = 8$. Добавляя сюда уравнение $a^2 + b = 710$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b. Решая её, находим $a = 26$, $b = 34$ или $a = -27$, $b = -19$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c. Это $c = a + p^2 = a + 9$ или $c = a - 1$.
Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(26; 34; 35)$, $(26; 34; 25)$, $(-27; -19; -18)$, $(-27; -19; -28)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

Ответ: $\sqrt[4]{3}$.



Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Так как в основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1, его сторона равна $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 3. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC. Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $2 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 3$ – противоречие. Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC. Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{2}{a} = \sqrt[4]{3}$. Так как площадь основания призмы равна 1, её объём есть $\sqrt[4]{3}$. Несложно понять, что такая призма существует.

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

   Ответ: $x=-1$, $x=5$.

   Решение. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots$ – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_4 = b_1q^3$, $b_{10} = b_1q^9$, $b_{12} = b_1q^{11}$, откуда следует, что $b_{10}^4 = b_{12}^3 b_4$, а b_4, b_{10} и b_{12} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(x+4)^4 = \left(\sqrt{(15x+6)(x-3)}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}},$$

   что на ОДЗ равносильно уравнению $(x+4)^4 = (15x+6)^2$. Решаем его:

$$\left(x^2+8x+16\right)^2 = (15x+6)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+8x+16 = 15x+6, \\ x^2+8x+16 = -15x-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=5, \\ x=-22, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

   Значение $x=2$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x=-22$ не подходит, так как при этом $b_4>0$, $b_{10}<0$, $b_{12}>0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

   Ответ: $\left(2\sqrt{5}-1; 35; 0\right)$, $\left(-1-\frac{3\sqrt{15}}{2}; 35; 0\right)$.

   Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y, а правая только от z. Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z) = \sqrt{225-z^2}$ является отрезок $[0;15]$. Пусть $h(y) = |y-20| + 2|y-35|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y. В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geqslant 35$ и убывает при $y \leqslant 35$. Отсюда следует, что $y=35$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(35)=15$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 15$, из второго уравнения находим, что $f(z)=15 \Leftrightarrow z=0$ и $h(y)=15 \Leftrightarrow y=35$.
   Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}.$$

   Обозначим $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+7-2\sqrt{(x+7)(5-x)}+$ $+5-x$, откуда $2\sqrt{35-2x-x^2} = 12-t^2$. Уравнение принимает вид $t+6 = 12-t^2$. Решая его, находим $t = 2$ или $t = -3$.

- Если $t = 2$, то

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{5-x} + 2 \Leftrightarrow x + 7 = 5 - x + 4\sqrt{5-x} + 4 \Leftrightarrow x - 1 = 2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4(5-x), \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{20}, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5} - 1.$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -3$:

$$\sqrt{x+7} + 3 = \sqrt{5-x} \Leftrightarrow x + 7 + 6\sqrt{x+7} + 9 = 5 - x \Leftrightarrow 6\sqrt{x+7} = -2x - 11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36(x+7) = (-2x-11)^2, \\ -2x - 11 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \frac{3\sqrt{15}}{2}, \\ x \leqslant -\frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

Итак, система имеет два решения: $\left(2\sqrt{5} - 1; 35; 0\right)$ и $\left(-1 - \frac{3\sqrt{15}}{2}; 35; 0\right)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

Ответ: Решения есть при $p \in [-10; 4]$.
Они задаются формулой $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

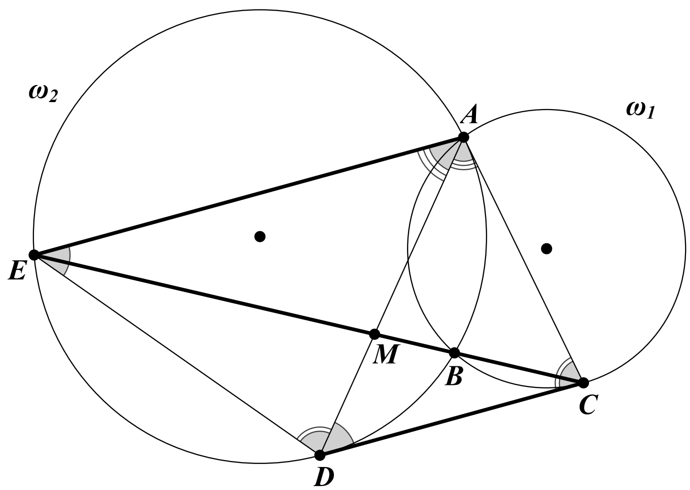
Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $8t^3 - 12t^2 + 6t = 2p - 6$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(2t-1)^3 = 2p - 7$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $2t - 1 = \sqrt[3]{2p-7} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt[3]{2p-7}+1}{2}$.
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left|\frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant \sqrt[3]{2p-7} + 1 \leqslant 2 \Leftrightarrow -10 \leqslant p \leqslant 4.$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = \frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}$ имеет решения $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C.

Ответ: $\frac{5}{3}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD. По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD. Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180° - \angle ABE = 180° - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180°$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC, не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180° - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $\left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$.

Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M. Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE. По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \frac{5}{3}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{15\,000}^{4} - 2 \cdot C_{7\,500}^{2}$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна. Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1, относительно ℓ_2 – через A_2, относительно O – через B. Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1, достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1. Так как в верхней половине прямоугольника всего 15 000 клеток, $|A_1| = C_{15\,000}^{4}$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 15 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C^4_{15\,000}$.
Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1, получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2, получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C^2_{7\,500}$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C^2_{7\,500}$, $|A_2 \cap B| = C^2_{7\,500}$, $|A_1 \cap B| = C^2_{7\,500}$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C^4_{15\,000} - 2 \cdot C^2_{7\,500}$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
   - $a > b$,
   - число $a - b$ не кратно 3,
   - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

   Ответ: $(36; 28; 27)$, $(36; 28; 37)$, $(-21; -29; -20)$, $(-21; -29; -30)$.

   Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c > b - c$ (за счёт того, что $a > b$), возможны следующие два варианта:

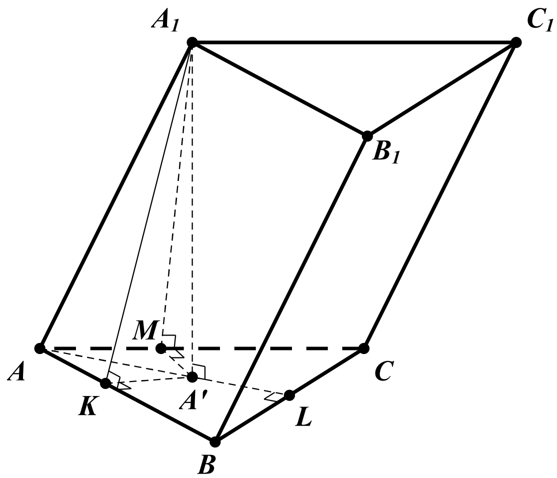
$$\begin{cases} b - c = 1, \\ a - c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b - c = -p^2, \\ a - c = -1. \end{cases} \qquad (*)$$

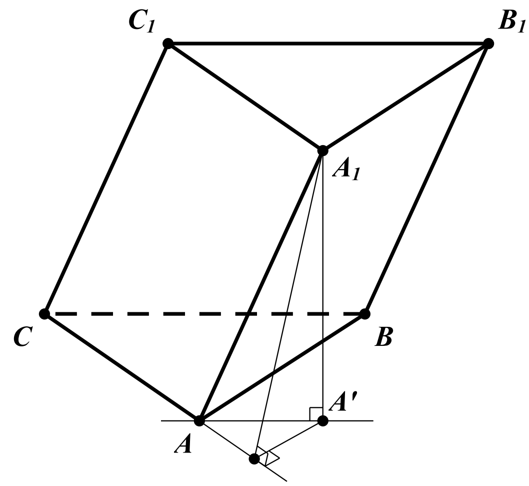
   Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $a - b = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:
   - $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3\,(3k^2 - 2k)$ – делится на 3;
   - $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3\,(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
   - $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

   Поскольку число $a-b$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $a-b = 8$. Добавляя сюда уравнение $a+b^2 = 820$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b. Решая её, находим $a = 36$, $b = 28$ или $a = -21$, $b = -29$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c. Это $c = a - p^2 = a - 9$ или $c = a + 1$.
   Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(36; 28; 27)$, $(36; 28; 37)$, $(-21; -29; -20)$, $(-21; -29; -30)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

   Ответ: 2.





Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 5. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC. Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $2 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 3$ – противоречие ($a = 2$ – ребро основания призмы). Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC. Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{4}{a} = 2$. Несложно понять, что такая призма существует.

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, двенадцатый член равен $2-x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

   Ответ: $x=-19$, $x=-2$.

   Решение. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots$ – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_{10}=b_1q^9$, $b_{12}=b_1q^{11}$, $b_{18}=b_1q^{17}$, откуда следует, что $b_{12}^4=b_{10}^3b_{18}$, а b_{10}, b_{12} и b_{18} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(2-x)^4=\left(\sqrt{(25x+34)(3x+2)}\right)^3\cdot\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}},$$

   что на ОДЗ равносильно уравнению $(2-x)^4=(25x+34)^2$. Решаем его:

$$\left(x^2-4x+4\right)^2=(25x+34)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+4=25x+34, \\ x^2-4x+4=-25x-34 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=30, \\ x=-2, \\ x=-19. \end{array}\right.$$

   Значение $x=-1$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x=30$ не подходит, так как при этом $b_{10}>0$, $b_{12}<0$, $b_{18}>0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6}-\sqrt{3-x-2z}+7=2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2|+2|y-18|=\sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

   Ответ: $\left(-\frac{3+\sqrt{56}}{2};18;0\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2};18;0\right)$.

   Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y, а правая только от z. Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z)=\sqrt{400-z^2}$ является отрезок $[0;20]$. Пусть $h(y)=|y+2|+2|y-18|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y. В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y\geqslant 18$ и убывает при $y\leqslant 18$. Отсюда следует, что $y=18$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(18)=20$. Поскольку $\min h(y)=\max f(z)=20$, из второго уравнения находим, что $f(z)=20 \Leftrightarrow z=0$ и $h(y)=20 \Leftrightarrow y=18$.
   Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}+7=2\sqrt{18-3x-x^2}.$$

   Обозначим $t=\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2=x+6-2\sqrt{(x+6)(3-x)}+$ $+3-x$, откуда $2\sqrt{18-3x-x^2}=9-t^2$. Уравнение принимает вид $t+9=9-t^2$. Решая его, находим

$t = 1$ или $t = -2$.

- Если $t = 1$, то

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{3-x} + 1 \Leftrightarrow x + 6 = 3 - x + 2\sqrt{3-x} + 1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 3 - x, \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}, \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{17}-3}{2}.$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -2$:

$$\sqrt{x+6} + 2 = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x + 6 + 4\sqrt{x+6} + 4 = 3 - x \Leftrightarrow 4\sqrt{x+6} = -2x - 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16(x+6) = (-2x-7)^2, \\ -2x - 7 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3\pm\sqrt{56}}{2}, \\ x \leqslant -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3+\sqrt{56}}{2}.$$

Итак, система имеет два решения: $\left(-\frac{3+\sqrt{56}}{2}; 18; 0\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}; 18; 0\right)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$p\cos 3x + 6\cos 2x + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

Ответ: Решения есть при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.
Они задаются формулой $x = 2\pi k + \pi \pm \arccos\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

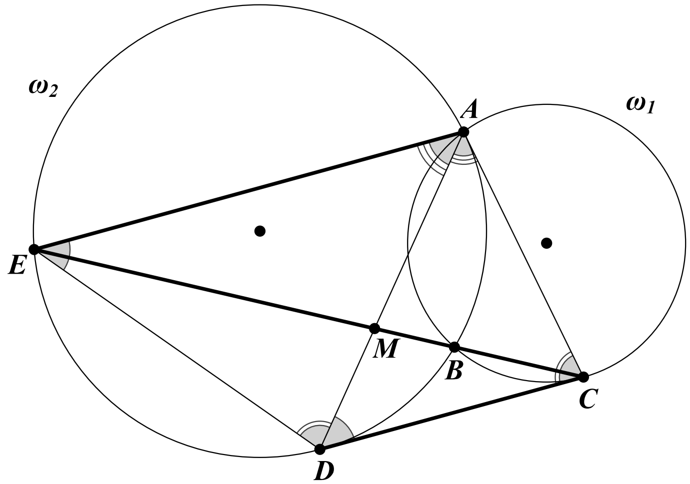
Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(p-1)t^3 + (t+1)^3$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $\left(t\sqrt[3]{p-1}\right)^3 = (-1-t)^3 \;\Leftrightarrow t\sqrt[3]{p-1} = -1 - t \;\Leftrightarrow t = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$.
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left|-\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + \sqrt[3]{p-1} \geqslant 1, \\ 1 + \sqrt[3]{p-1} \leqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p \leqslant -7, \\ p \geqslant 1. \end{array}\right.$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$ имеет решения $x = 2\pi k + \pi \pm \arccos\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C.

Ответ: $2\sqrt{\frac{5}{7}}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD. По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD. Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC, не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $\left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$.
Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M. Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE. По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{30\,000}^4 - 2 \cdot C_{15\,000}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна. Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1, относительно ℓ_2 – через A_2, относительно O – через B. Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1, достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1. Так как в верхней половине прямоугольника всего 30 000 клеток, $|A_1| = C_{30\,000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 30 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C^4_{30\,000}$.
Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1, получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2, получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C^2_{15\,000}$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C^2_{15\,000}$, $|A_2 \cap B| = C^2_{15\,000}$, $|A_1 \cap B| = C^2_{15\,000}$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C^4_{30\,000} - 2 \cdot C^2_{15\,000}$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

Ответ: $(31; 39; 30)$, $(31; 39; 40)$, $(-32; -24; -23)$, $(-32; -24; -33)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c < b - c$ (за счёт того, что $a < b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} a - c = 1, \\ b - c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a - c = -p^2, \\ b - c = -1. \end{cases} \qquad (*)$$

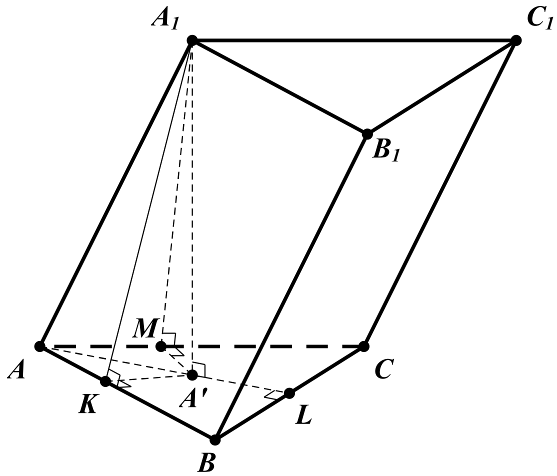
Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $b - a = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

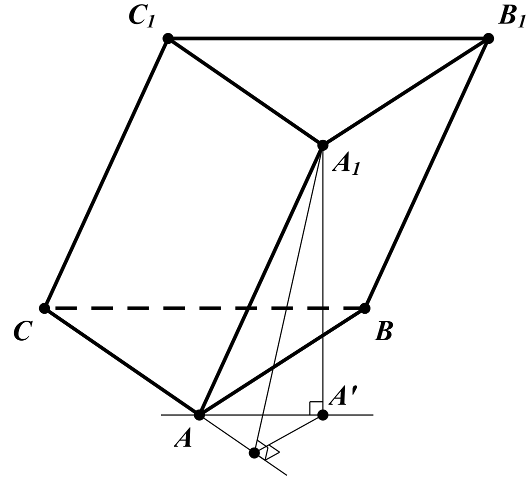
- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 - 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $b - a$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $b - a = 8$. Добавляя сюда уравнение $a^2 + b = 1000$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b. Решая её, находим $a = 31$, $b = 39$ или $a = -32$, $b = -24$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c. Это $c = a + p^2 = a + 9$ или $c = a - 1$.
Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(31; 39; 30)$, $(31; 39; 40)$, $(-32; -24; -23)$, $(-32; -24; -33)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

Ответ: $5\sqrt[4]{3}$.





Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Так как в основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 5, его сторона равна $a = \frac{4}{\sqrt[4]{3}}$. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 6. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC. Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $5 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 6$ – противоречие. Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC. Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{5}{a} = \frac{5\sqrt[4]{3}}{4}$. Так как площадь основания призмы равна 4, её объём есть $5\sqrt[4]{3}$. Несложно понять, что такая призма существует.

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

Ответ: $x=-5$, $x=3$.

Решение. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots$ – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_7 = b_1q^6$, $b_{13} = b_1q^{12}$, $b_{15} = b_1q^{14}$, откуда следует, что $b_{13}^4 = b_{15}^3 b_7$, а b_7, b_{13} и b_{15} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(5-x)^4 = \left(\sqrt{(13x-35)(x+1)}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(5-x)^4 = (13x-35)^2$. Решаем его:

$$\left(x^2-10x+25\right)^2 = (13x-35)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-10x+25 = 13x-35, \\ x^2-10x+25 = 35-13x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=20, \\ x=-5, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Значение $x=2$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x=20$ не подходит, так как при этом $b_7>0$, $b_{13}<0$, $b_{15}>0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{10}; 12; 0\right)$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y, а правая только от z. Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z) = \sqrt{169-z^2}$ является отрезок $[0;13]$. Пусть $h(y) = |y+1| + 3|y-12|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y. В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geqslant 12$ и убывает при $y \leqslant 12$. Отсюда следует, что $y=12$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(12) = 13$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 13$, из второго уравнения находим, что $f(z) = 13 \Leftrightarrow z=0$ и $h(y) = 13 \Leftrightarrow y = 12$.
Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+3-2\sqrt{(x+3)(4-x)}+$ $+4-x$, откуда $2\sqrt{12+x-x^2} = 7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 7-t^2$. Решая его, находим

$t = 1$ или $t = -2$.

- Если $t = 1$, то

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{4-x} + 1 \Leftrightarrow x + 3 = 4 - x + 2\sqrt{4-x} + 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4 - x, \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -2$:

$$\sqrt{x+3} + 2 = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x + 3 + 4\sqrt{x+3} + 4 = 4 - x \Leftrightarrow 4\sqrt{x+3} = -2x - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16(x+3) = (-2x-3)^2, \\ -2x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{10}, \\ x \leqslant -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \sqrt{10}.$$

Итак, система имеет два решения: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right)$ и $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{10}; 12; 0\right)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

Ответ: Решения есть при $p \in [-4; 10]$.
Они задаются формулой $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

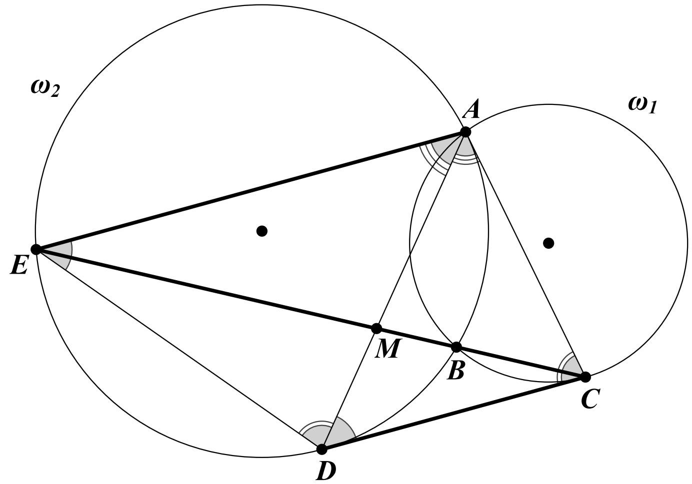
Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $8t^3 + 12t^2 + 6t = 2p + 6$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(2t+1)^3 = 2p + 7$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $2t + 1 = \sqrt[3]{2p+7} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$.
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left|\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant \sqrt[3]{2p+7} - 11 \leqslant 2 \Leftrightarrow -4 \leqslant p \leqslant 10.$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$ имеет решения $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C.

Ответ: $\sqrt{\frac{10}{3}}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD. По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD. Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC, не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $\left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$.

Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M. Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE. По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{25\,000}^4 - 2 \cdot C_{12\,500}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна. Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1, относительно ℓ_2 – через A_2, относительно O – через B. Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1, достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1. Так как в верхней половине прямоугольника всего 25 000 клеток, $|A_1| = C_{25\,000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 25 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C^4_{25\,000}$.
Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1, получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2, получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C^2_{12\,500}$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C^2_{12\,500}$, $|A_2 \cap B| = C^2_{12\,500}$, $|A_1 \cap B| = C^2_{12\,500}$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C^4_{25\,000} - 2 \cdot C^2_{12\,500}$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

Ответ: $(31; 23; 22)$, $(31; 23; 32)$, $(-16; -24; -25)$, $(-16; -24; -15)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c > b - c$ (за счёт того, что $a > b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} b - c = 1, \\ a - c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b - c = -p^2, \\ a - c = -1. \end{cases} \qquad (*)$$

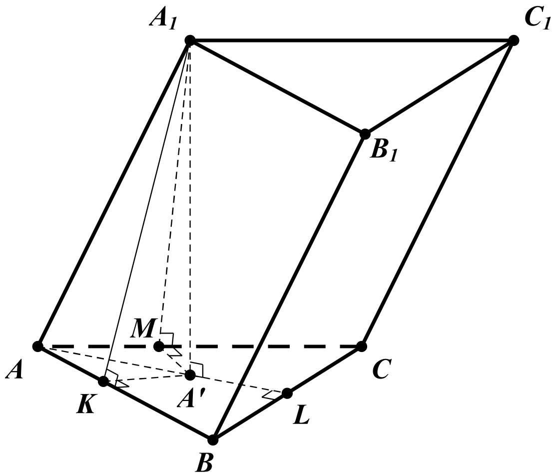
Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $a - b = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

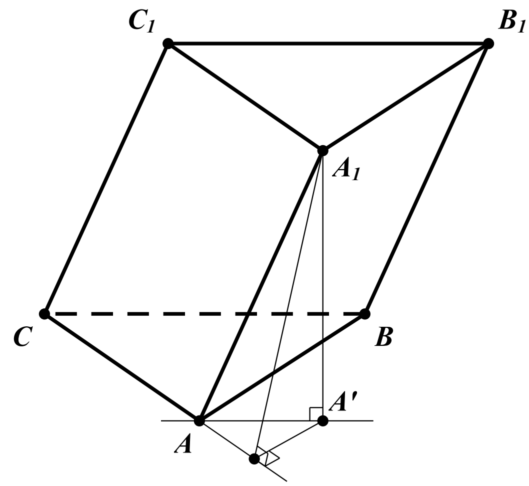
- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3\,(3k^2 - 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3\,(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $a-b$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $a-b = 8$. Добавляя сюда уравнение $a+b^2 = 560$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b. Решая её, находим $a = 31$, $b = 23$ или $a = -16$, $b = -24$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c. Это $c = a - p^2 = a - 9$ или $c = a + 1$.
Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(31; 23; 22)$, $(31; 23; 32)$, $(-16; -24; -25)$, $(-16; -24; -15)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

Ответ: 3.





Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 4. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC. Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $3 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 4$ – противоречие ($a = 1$ – ребро основания призмы). Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC. Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{3}{a} = 3$. Несложно понять, что такая призма существует.

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

   Ответ: 18.

   Решение. Сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$. С другой стороны, по формуле суммы арифметической прогрессии она же равна $\frac{n}{2}(2 \cdot 143^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ)$. Приравняв эти выражения, получаем $180(n-2) = n(n+142)$, что равносильно уравнению $(n-18)(n-20) = 0$, откуда $n = 18$ либо $n = 20$. Остаётся заметить, что значение $n = 20$ не подходит, поскольку в этом случае наибольший угол был бы равен 181°, что невозможно для выпуклого многоугольника.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

   Ответ: 6.

   Решение. Данное равенство можно записать в виде

$$\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln 6 \;\Leftrightarrow\; \ln\left(16^x \cdot 8^y \cdot 24^z\right) = \ln 6 \;\Leftrightarrow 2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z = 2 \cdot 3.$$

   Так как x, y, z – целые числа, можно приравнять показатели степеней двойки и тройки в левой и правой частях равенства, откуда $4x + 3y + 3z = 1$, $z = 1$. Подставляя z в первое уравнение, получаем $4x + 3y = -2$. Отсюда $y = -x - \frac{x+2}{3}$. Так как x и y – целые числа, это означает, что дробь $\frac{x+2}{3}$ также должна принимать целое значение. Пусть $\frac{x+2}{3} = k$. Тогда $x = 3k - 2$, $y = 2 - 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Значит $x^2 + y^2 + z^2 = 25k^2 - 28k + 9$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Вершина параболы имеет абсциссу $k_0 = \frac{14}{25}$. С учётом того, что k может принимать только целочисленные значения, минимум функции достигается в точке, ближайшей к вершине параболы, то есть при $k = 1$. Минимальное значение равно 6.

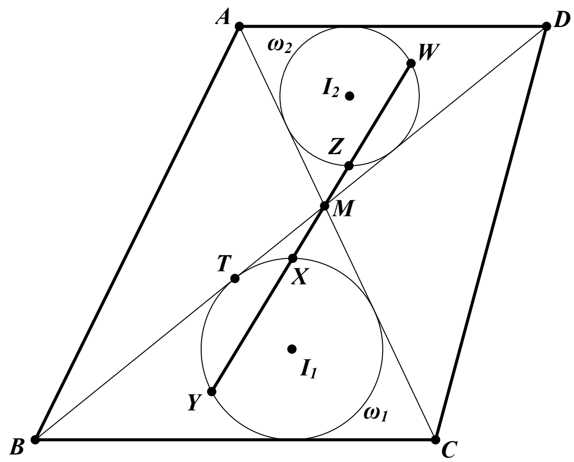
3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

   Ответ: $\{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.

   Решение. Пусть данные 7 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$, $a+6$. Их сумма равна $7a+21$. Сумма шести чисел из этого набора может принимать следующие значения: $6a+15$, $6a+16$, $6a+17$, $6a+18$, $6a+19$, $6a+20$, $6a+21$. Из них простыми могут быть только $6a+17$ и $6a+19$ (остальные числа не являются простыми, так как представимы в виде $6a+15 = 3(2a+5)$, $6a+16 = 2(3a+8)$, $6a+18 = 6(a+3)$, $6a+20 = 2(3a+10)$, $6a+21 = 3(2a+7)$).
   Таким образом, $(6a+19)^2 - (6a+17)^2 = 792$. Отсюда $a = 30$. Значит, $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

   Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$.



Решение. Треугольники BCM и DAM подобны по двум углам, а коэфициент подобия равен $\frac{BC}{AD} = 2$. Пусть r – радиус окружности ω_1. Тогда из подобия следует, что радиус окружности ω_2 равен $\frac{r}{2}$. Также из подобия следует, что $\frac{1}{2} = \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY}$. Отсюда $MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY$. По теореме о касательной и секущей $MX \cdot MY = MT^2$. По теореме Пифагора для треугольника I_1MT получаем $MT^2 = MI_1^2 - r^2$. Так как отношение отрезков MI_1 и MI_2 равно коэффициенту подобия треугольников, отсюда следует, что $MI_1 = \frac{2}{3} I_1I_2$. Используя все полученные выше соотношения, имеем $MZ \cdot MY = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} I_1I_2^2 - r^2\right)$, откуда мгновенно следует, что $r^2 = \frac{4}{9} I_1I_2^2 - 2 \cdot MZ \cdot MY = \frac{79}{9}$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\frac{3\pi}{14}$ или $4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$?

Ответ: первое число больше.

Чтобы сравнить два числа, рассмотрим их разность $\Delta = \left(5 - 4\sin\frac{3\pi}{14}\right) - \left(4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}\right)$. Обозначая $-\frac{\pi}{14} = x$, можем переписать $\Delta = 4\sin 3x + 5 - 4\cos 2x - 5\sin x$. С помощью формулы синуса тройного угла и косинуса двойного угла эту разность можно привести к виду

$$4\sin 3x + 5 - 4\cos 2x - 5\sin x = -16\sin^3 x + 8\sin^2 x + 7\sin x + 1.$$

Сделаем замену $\sin x = t$ и докажем, что функция $f(t) = -16t^3 + 8t^2 + 7t + 1$ неотрицательна на отрезке $[-1, 1]$. В самом деле, $f(-1) > 0$, $f(1) = 0$, а производная $f'(t) = -48t^2 + 16t + 7$ равна нулю в точках $t = \frac{7}{12}$ и $t = -\frac{1}{4}$, причём $t = \frac{7}{12}$ – точка максимума, а $t = -\frac{1}{4}$ – точка минимума, в которой принимается значение $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$. Так как значение $\sin\frac{-\pi}{14}$ отлично от 1 и от $-\frac{1}{4}$, получаем, что $\Delta > 0$, поэтому первое число больше второго.

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках? (Пирамиды считаются различными, если их множества вершин различны.)

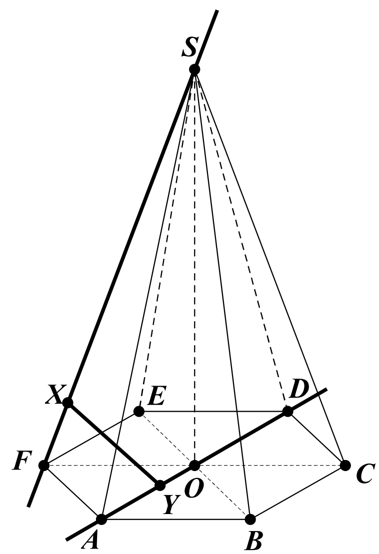
Ответ: 780.

Решение. Если пирамида является тетраэдром, то достаточно выбрать любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Это можно сделать $C_{12}^4 - C_7^4 = 495 - 35 = 460$ способами (вычитаются случаи, когда все 4 точки лежат в плоскости α).
Если в основании пирамиды лежит многоугольник, имеющий хотя бы 4 вершины, то это основание лежит в плоскости α. Количество способов выбрать такой многоугольник равно количеству способов выбрать любое подмножество из заданных точек плоскости α, состоящее хотя бы из четырёх

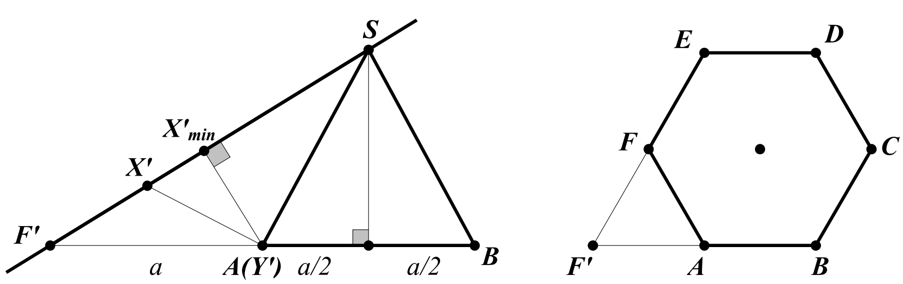
элементов, то есть $C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 35 + 21 + 7 + 1 = 64$. Вершину можно выбрать 5 способами, поэтому количество таких пирамид есть $5 \cdot 64 = 320$.
В итоге получаем $460 + 320 = 780$ способов.

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{2}}$.



Решение. Пусть сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро равно b, а $\angle SAB = \alpha$. Проводя высоту равнобедренного треугольника ABS на основание AB, находим, что $\cos\alpha = \frac{AB}{2AS} = \frac{a}{2b}$. Отсюда $\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2 = \frac{4b^2 - a^2}{4b^2}$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2b}\sqrt{4b^2 - a^2}$.
Спроектируем прямые AD и SF на плоскость SAB параллельно прямой AD. Так как отрезок XY параллелен плоскости проекции, длина его проекции $X'Y'$ равна длине отрезка XY. Задача свелась к нахождению расстояния ρ от точки Y' до прямой SF', где F' – проекция точки F. Получаем



$$\rho = \frac{2S_{F'Y'S}}{F'S};$$
$$F'S^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{a}{2b} = 2a^2 + b^2;$$
$$2S_{F'Y'S} = ab\sin\alpha = \frac{a}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Значит, $\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{2a^2 + b^2}}$. Подставляя сюда $a = 2$, $b = 4$, находим, что $\rho = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

   Ответ: 9.

   Решение. Сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$. С другой стороны, по формуле суммы арифметической прогрессии она же равна $\frac{n}{2}\left(2 \cdot 132^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ\right)$. Приравняв эти выражения, получаем $180(n-2) = n(n+131)$, что равносильно уравнению $(n-18)(n-20) = 0$, откуда $n = 9$ либо $n = 40$. Остаётся заметить, что значение $n = 40$ не подходит, поскольку в этом случае наибольший угол был бы равен 210°, что невозможно для выпуклого многоугольника.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

   Ответ: 5.

   Решение. Данное равенство можно записать в виде

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45 \;\Leftrightarrow\; \ln\left(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z\right) = \ln 45 \;\Leftrightarrow 5^{2x} \cdot 3^y \cdot 5^{2y} \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5.$$

   Так как x, y, z – целые числа, можно приравнять показатели степеней двойки и тройки в левой и правой частях равенства, откуда $2x + 2y + 3z = 1$, $y = 2$. Подставляя z в первое уравнение, получаем $2x + 3z = -3$. Отсюда $x = -z - 1 + \frac{-z-1}{2}$. Так как x и z – целые числа, это означает, что дробь $\frac{-z-1}{2}$ также должна принимать целое значение. Пусть $\frac{-z-1}{2} = k$. Тогда $x = 3k$, $z = -1 - 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Значит $x^2 + y^2 + z^2 = 13k^2 + 4k + 5$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Вершина параболы имеет абсциссу $k_0 = -\frac{2}{13}$. С учётом того, что k может принимать только целочисленные значения, минимум функции достигается в точке, ближайшей к вершине параболы, то есть при $k = 0$. Минимальное значение равно 5.

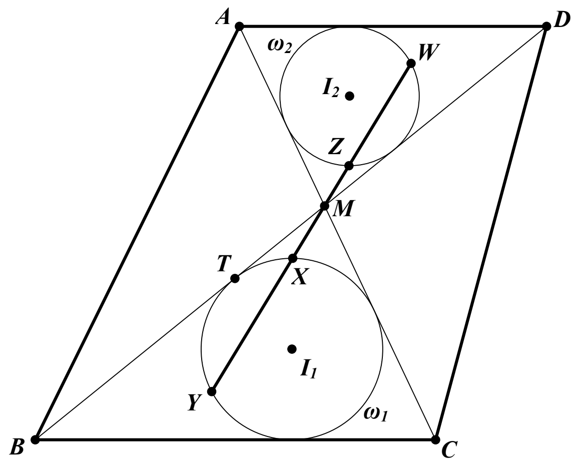
3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

   Ответ: $\{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$.

   Решение. Пусть данные 7 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$, $a+6$. Их сумма равна $7a+21$. Сумма шести чисел из этого набора может принимать следующие значения: $6a+15$, $6a+16$, $6a+17$, $6a+18$, $6a+19$, $6a+20$, $6a+21$. Из них простыми могут быть только $6a+17$ и $6a+19$ (остальные числа не являются простыми, так как представимы в виде $6a+15 = 3(2a+5)$, $6a+16 = 2(3a+8)$, $6a+18 = 6(a+3)$, $6a+20 = 2(3a+10)$, $6a+21 = 3(2a+7)$).
   Таким образом, $(6a+19)^2 - (6a+17)^2 = 1080$. Отсюда $a = 42$. Значит, $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

   Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$.



Решение. Треугольники BCM и DAM подобны по двум углам, а коэфициент подобия равен $\frac{BC}{AD} = 2$. Пусть r – радиус окружности ω_1. Тогда из подобия следует, что радиус окружности ω_2 равен $\frac{r}{2}$. Также из подобия следует, что $\frac{1}{2} = \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY}$. Отсюда $MZ \cdot MY = \frac{1}{2}MX \cdot MY$. По теореме о касательной и секущей $MX \cdot MY = MT^2$. По теореме Пифагора для треугольника I_1MT получаем $MT^2 = MI_1^2 - r^2$. Так как отношение отрезков MI_1 и MI_2 равно коэффициенту подобия треугольников, отсюда следует, что $MI_1 = \frac{2}{3}I_1I_2$. Используя все полученные выше соотношения, имеем $MZ \cdot MY = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}I_1I_2^2 - r^2\right)$, откуда мгновенно следует, что $r^2 = \frac{4}{9}I_1I_2^2 - 2 \cdot MZ \cdot MY = \frac{94}{9}$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\frac{9\pi}{14}$ или $3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$?

Ответ: первое число больше.

Чтобы сравнить два числа, рассмотрим их разность $\Delta = \left(5 - 4\sin\frac{9\pi}{14}\right) - \left(3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}\right)$. Обозначая $\frac{3\pi}{14} = x$, можем переписать $\Delta = 5 - 4\sin 3x + 4\cos 2x - 3\sin x$. С помощью формулы синуса тройного угла и косинуса двойного угла эту разность можно привести к виду

$$-4\sin 3x + 4\cos 2x - 3\sin x + 5 = 16\sin^3 x - 8\sin^2 x - 15\sin x + 9.$$

Сделаем замену $\sin x = t$ и докажем, что функция $f(t) = 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9$ неотрицательна на отрезке $[-1, 1]$. В самом деле, $f(-1) = 0$, $f(1) > 0$, а производная $f'(t) = 48t^2 - 16t - 15$ равна нулю в точках $t = \frac{3}{4}$ и $t = -\frac{5}{12}$, причём $t = -\frac{5}{12}$ – точка максимума, а $t = \frac{3}{4}$ – точка минимума, в которой принимается значение $f\left(\frac{3}{4}\right) = 0$. Так как значение $\sin\frac{3\pi}{14}$ отлично от -1 и от $\frac{3}{4}$, получаем, что $\Delta > 0$, поэтому первое число больше второго.

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках? (Пирамиды считаются различными, если их множества вершин различны.)

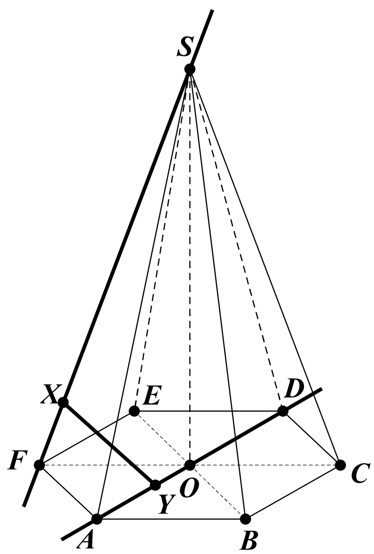
Ответ: 1 077.

Решение. Если пирамида является тетраэдром, то достаточно выбрать любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Это можно сделать $C_{12}^4 - C_8^4 = 495 - 70 = 425$ способами (вычитаются случаи, когда все 4 точки лежат в плоскости α).
Если в основании пирамиды лежит многоугольник, имеющий хотя бы 4 вершины, то это основание лежит в плоскости α. Количество способов выбрать такой многоугольник равно количеству способов выбрать любое подмножество из заданных точек плоскости α, состоящее хотя бы из четырёх

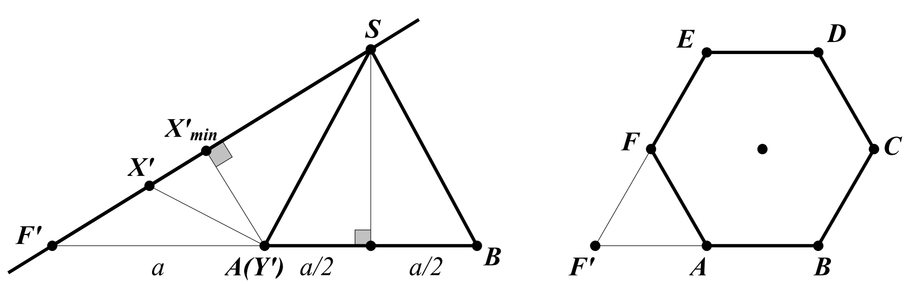
элементов, то есть $C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 = 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 163$. Вершину можно выбрать 4 способами, поэтому количество таких пирамид есть $4 \cdot 163 = 652$.
В итоге получаем $425 + 652 = 1\,077$ способов.

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.



Решение. Пусть сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро равно b, а $\angle SAB = \alpha$. Проводя высоту равнобедренного треугольника ABS на основание AB, находим, что $\cos\alpha = \frac{AB}{2AS} = \frac{a}{2b}$. Отсюда $\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2 = \frac{4b^2-a^2}{4b^2}$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$.
Спроектируем прямые AD и SF на плоскость SAB параллельно прямой AD. Так как отрезок XY параллелен плоскости проекции, длина его проекции $X'Y'$ равна длине отрезка XY. Задача свелась к нахождению расстояния ρ от точки Y' до прямой SF', где F' – проекция точки F. Получаем



$$\rho = \frac{2S_{F'Y'S}}{F'S};$$

$$F'S^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{a}{2b} = 2a^2 + b^2;$$

$$2S_{F'Y'S} = ab\sin\alpha = \frac{a}{2}\sqrt{4b^2-a^2}.$$

Значит, $\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2a^2+b^2}}$. Подставляя сюда $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, находим, что $\rho = \sqrt{\frac{7}{16}}$.