11 класс – день 3

1. а) Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение $S_{3n} - S_n = 12n^2 + n$. Найдите восьмой член прогрессии.
Ответ: 23.
Решение.

$$S_{3n} - S_n = \frac{9}{2}dn^2 + 3n\left(a_1 - \frac{d}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}dn^2 + n\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)\right) = 4dn^2 + n\left(2a_1 - d\right).$$

Отсюда $d = 3$, $a_1 = 2$ и $a_8 = 23$.

б) Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение $S_{4n} - S_{2n} = -12n^2 + 2n$. Найдите десятый член прогрессии.
Ответ: -18.

в) Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение $S_{3n} - S_n = 4n^2 + 5n$. Найдите четвёртый член прогрессии.
Ответ: 6.

г) Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение $S_{4n} - S_{2n} = 6n^2 + 3n$. Найдите восьмой член прогрессии.
Ответ: 9.

д) Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение $S_{3n} - S_n = -8n^2 + 10n$. Найдите седьмой член прогрессии.
Ответ: -8.

2. а) Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение

$$\sqrt{3-\frac{a^2}{25}}\sin x+\frac{a}{10}\cos x=\sqrt{2}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: -5.

Решение. Известно, что множество значений выражения $A\sin x+B\cos x$ представляет собой отрезок $\left[-\sqrt{A^2+B^2};\sqrt{a^2+B^2}\right]$. Отсюда множество значений левой части уравнения – это $\left[-\sqrt{3-\frac{a^2}{25}+\frac{a^2}{100}};\sqrt{3-\frac{a^2}{25}+\frac{a^2}{100}}\right]$. Уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда $\sqrt{3-\frac{a^2}{25}+\frac{a^2}{100}}\geqslant\sqrt{2}$, откуда $3-\frac{3a^2}{100}\geqslant 2$, $|a|\leqslant\frac{10}{\sqrt{3}}$. Наименьшее целое решение этого неравенства – это $a=-5$. Это значение принадлежит области допустимых значений параметра.

б) Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение

$$\sqrt{2-\frac{a^2}{50}}\sin x+\frac{a}{10}\cos x=\frac{6}{5}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: -7.

в) Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение

$$\sqrt{11-a^2}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: -3.

г) Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение

$$\frac{a}{9}\sin x+\sqrt{6-\frac{a^2}{27}}\cos x=2$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: -9.

д) Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение

$$\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{2a^2}{75}}\sin x+\frac{2a}{15}\cos x=1$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: -6.

3. а) В кондитерской продаётся 8 видов пирожных, 8 видов конфет, 8 видов булочек и 8 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?

Ответ: 415 744.

Решение. Ясно, что либо было выбрано 3 вида одного десерта и по одному виду трёх других десертов, либо было выбрано по 2 вида двух десертов и по 1 виду оставшихся двух десертов. В первом случае вариантов выбора $C_4^1 \cdot C_8^3 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1$, а во втором, соответственно, $C_4^2 \cdot C_8^2 \cdot C_8^2 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1$. Складывая эти две величины, получаем ответ.

б) В кондитерской продаётся 9 видов пирожных, 9 видов конфет, 9 видов булочек и 9 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?

Ответ: 874 800.

в) В кондитерской продаётся 10 видов пирожных, 10 видов конфет, 10 видов булочек и 10 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?

Ответ: 1 695 000.

г) В кондитерской продаётся 11 видов пирожных, 11 видов конфет, 11 видов булочек и 11 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?

Ответ: 3 074 610.

д) В кондитерской продаётся 12 видов пирожных, 12 видов конфет, 12 видов булочек и 12 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?

Ответ: 5 284 224.

4. а) Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна 3 997. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано 3 811, то Вася запишет 1 183). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?
Ответ: 18 982.

б) Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна 4 778. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано 3 811, то Вася запишет 1 183). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?
Ответ: 19 763.

в) Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна 5 786. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано 3 811, то Вася запишет 1 183). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?
Ответ: 17 864.
Решение. Пусть $\overline{ABCD}$ и $\overline{abcd}$ – данные числа. Тогда $1000(A+a)+100(B+b)+10(C+c)+(D+d)=5\,786$; при этом нужно найти максимум выражения $S=1000(D+d)+100(C+c)+10(B+b)+(A+a)$. Из данного равенства следует, что $D+d=16$ или $D+d=6$. Очевидно, максимальное значение S получается в первом случае. Подставляя значение $D+d=16$, получаем $100(A+a)+10(B+b)+(C+c)=577$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что $C+c=17$, $B+b=16$, $A+a=4$. Тогда $S=17\,864$. Несложно привести пример, когда значение S достигается: для этого можно взять числа 2 888 и 2 898. Тогда $8\,882+8\,982=17\,864$.

г) Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна 3 758. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано 3 811, то Вася запишет 1 183). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?
Ответ: 19 562.

д) Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна 5 895. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано 3 811, то Вася запишет 1 183). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?
Ответ: 16 974.

5. а) В магазине 5 килограммов моркови стоят столько же, сколько 4 килограмма свёклы и 1 килограмм картофеля. Известно, что если купить по 6 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 2 килограмма моркови и 3 килограмма картофеля, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 19 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 10 рублей больше килограмма самого дешёвого.

Ответ: 38.

Решение. Пусть цены 1 килограмма свёклы, моркови и картофеля равны соответственно x, y, z рублей за килограмм. Из первого условия $5y = 4x + z$, и отсюда следует, что морковь является средним по цене овощем. Тогда второе условие даёт $6x+6z+2y+3z = 19y$, а третье означает, что $|z - x| = 10$. Полученная система уравнений имеет два решения: $(28; 30; 38)$ и $(-28; -30; -38)$. Так как цены положительны, подходит первый вариант, следовательно, килограмм картофеля стоит 38 рублей.

б) В магазине 3 килограмма моркови стоят столько же, сколько 2 килограмма свёклы и 1 килограмм картофеля. Известно, что если купить по 14 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 1 килограмм моркови и 21 килограмм картофеля, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 56 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 9 рублей больше килограмма самого дешёвого.

Ответ: 34.

в) В магазине 4 килограмма моркови стоят столько же, сколько 3 килограмма свёклы и 1 килограмм картофеля. Известно, что если купить по 6 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 2 килограмма моркови и 5 килограммов картофеля, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 16 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 16 рублей больше килограмма самого дешёвого.

Ответ: 24.

г) В магазине 8 килограммов моркови стоят столько же, сколько 1 килограмм свёклы и 7 килограммов картофеля. Известно, что если купить по 5 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 2 килограмма моркови и 3 килограмма картофеля, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 16 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 8 рублей больше килограмма самого дешёвого.

Ответ: 26.

д) В магазине 6 килограммов моркови стоят столько же, сколько 5 килограммов свёклы и 1 килограмм картофеля. Известно, что если купить по 6 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 1 килограмм моркови и 16 килограммов свёклы, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 30 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 18 рублей больше килограмма самого дешёвого.

Ответ: 39.

6. а) Точка K расположена вне окружности Ω с центром O, точка M – внутри Ω, а точка P – на Ω. Отрезок KM пересекает Ω в точке L, а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 2$, $LM = 5$, $KL = 9$, $KP = 12$.

Ответ: 14.

Решение. Пусть F – вторая точка пересечения прямой KM с окружностью. По теореме о касательной и секущей $KL \cdot KF = KP^2$, поэтому $KF = 16$ и $MF = 2$. Пусть $\angle OMF = \varphi$, $\angle OML = 180^\circ - \varphi$. По теореме косинусов для треугольников OMF и OML получаем равенства $r^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos\varphi$, $r^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$. Решая эту систему, находим, что $\cos\varphi = -\frac{3}{4}$, $r^2 = 14$.

б) Точка K расположена вне окружности Ω с центром O, точка M – внутри Ω, а точка P – на Ω. Отрезок KM пересекает Ω в точке L, а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 9$, $LM = 2$, $KL = 9$, $KP = 15$.

Ответ: 109.

в) Точка K расположена вне окружности Ω с центром O, точка M – внутри Ω, а точка P – на Ω. Отрезок KM пересекает Ω в точке L, а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 6$, $LM = 10$, $KL = 12$, $KP = 18$.

Ответ: 86.

г) Точка K расположена вне окружности Ω с центром O, точка M – внутри Ω, а точка P – на Ω. Отрезок KM пересекает Ω в точке L, а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 8$, $LM = 5$, $KL = 3$, $KP = 9$.

Ответ: 159.

д) Точка K расположена вне окружности Ω с центром O, точка M – внутри Ω, а точка P – на Ω. Отрезок KM пересекает Ω в точке L, а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 5$, $LM = 14$, $KL = 7$, $KP = 14$.

Ответ: 123.

7. а) У Пети есть 10 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 15. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ: 20.

Решение. Сумма чисел на карточках равна 150. Сумма 10 данных чисел не превосходит $N+(N-1)+\ldots+(N-9)=5(2N-9)$. Значит, $150 \leqslant 5(2N-9)$, поэтому $N \geqslant 19{,}5$. Так как, N – натуральное, то $N \geqslant 20$. В качестве примера можно взять числа $6, 12, 13, \ldots, 20$. Тогда $(6+12+13+14+...+20):10=15$.

б) У Пети есть 12 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 17. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ: 23.

в) У Пети есть 14 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 19. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ: 26.

г) У Пети есть 16 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 21. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ: 29.

д) У Пети есть 18 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 23. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ: 32.

8. а) В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB, BCD и ACD прямые. На рёбрах CD, AC и BD отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $\frac{DP}{DC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{1}{3}$, $\frac{DR}{DB} = \frac{1}{2}$. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR, если известно, что $AC = 3$, $BC = 4$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 7.

Решение. Пусть K – точка пересечения прямых PR и BC, L – точка пересечения прямых KQ и AB. Тогда по теореме Менелая для треугольников CDB и CDA

$$\frac{CP}{PD} \cdot \frac{DR}{RB} \cdot \frac{BK}{KC} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{BK}{KC} = 1 \Leftrightarrow \frac{BK}{KC} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BK}{KC} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{AL}{LB} = 1.$$

Обозначим площадь треугольника ABC через S, проекцию точки R на плоскость ABC (ребро BC) – через R'. Тогда

$$S_{CQLR'} = S - S_{QAC} - S_{LBR'} = S\left(1 - \frac{AQ}{AC} \cdot \frac{AL}{AB} - \frac{BL}{BA} \cdot \frac{BR'}{BC}\right) =$$

$$= S\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{7}{12}S = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{7}{2}.$$

$CQLR'$ — проекция сечения $PQLR$ на плоскость ABC. Искомая площадь сечения равна

$$\frac{S_{CQLR'}}{\cos \angle (PQR; ABC)} = \frac{S_{CQLR'}}{\sin \angle (PQR; CD)} = \frac{7/2}{1/2} = 7.$$

б) В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB, BCD и ACD прямые. На рёбрах CD, AC и BD отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $\frac{DP}{DC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{1}{4}$, $\frac{DR}{DB} = \frac{2}{3}$. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR, если известно, что $AC = 4$, $BC = 3$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\arcsin \frac{2}{3}$.

Ответ: 6,5.

в) В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB, BCD и ACD прямые. На рёбрах CD, AC и BD отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $\frac{DP}{DC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{2}{5}$, $\frac{DR}{DB} = \frac{1}{2}$. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR, если известно, что $AC = 5$, $BC = 12$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 33.

г) В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB, BCD и ACD прямые. На рёбрах CD, AC и BD отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $\frac{DP}{DC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{1}{4}$, $\frac{DR}{DB} = \frac{4}{5}$. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR, если известно, что $AC = 12$, $BC = 5$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\arcsin \frac{4}{5}$.

Ответ: 28,5.

д) В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB, BCD и ACD прямые. На рёбрах CD, AC и BD отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $\frac{DP}{DC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{DR}{DB} = \frac{5}{8}$. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR, если известно, что $AC = 6$, $BC = 8$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\arcsin \frac{5}{8}$.

Ответ: 21.

9. а) За круглым столом сидят 15 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие – неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 5 волшебников сказали: “Теперь у меня нет волшебной палочки”, а остальные 10 волшебников сказали: “У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка”. Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?

Ответ: 12.

Решение. После передачи палочек у каждого из волшебников может оказаться 0, 1 или 2 палочки. А суммарное число палочек будет равно 15. Если волшебник солгал, то он назвал число, которое отличается от настоящего на 1 или 2. По ответам суммарное число палочек отличается от настоящего на $15-10=5$. Поэтому не меньше 3 волшебников должны были солгать. Поэтому правду сказали не больше 12 волшебников.

Покажем как волшебникам передавать палочки и говорить правду (П) или ложь (Л), чтобы правду сказали 12 волшебников. На схеме показано, как передавать палочки, в скобках указано, сколько палочек будет после передачи. Все, говорящие ложь, должны говорить, что у них нет палочки.

$\leftarrow$ П(0) — П(0) $\rightarrow$ П(1) $\rightarrow$ П(1) $\rightarrow \ldots \rightarrow$ П(1) $\rightarrow$ Л(1) $\rightarrow$ Л(2) $\leftrightarrow$ Л(2) $\leftarrow$

б) За круглым столом сидят 20 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие – неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 5 волшебников сказали: “Теперь у меня нет волшебной палочки”, а остальные 15 волшебников сказали: “У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка”. Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?

Ответ: 17.

в) За круглым столом сидят 28 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие – неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 3 волшебника сказали: “Теперь у меня нет волшебной палочки”, а остальные 25 волшебников сказали: “У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка”. Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?

Ответ: 26.

г) За круглым столом сидят 17 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие – неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 3 волшебника сказали: “Теперь у меня нет волшебной палочки”, а остальные 14 волшебников сказали: “У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка”. Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?

Ответ: 15.

д) За круглым столом сидят 19 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие – неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 5 волшебников сказали: “Теперь у меня нет волшебной палочки”, а остальные 14 волшебников сказали: “У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка”. Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?

Ответ: 16.

10. а) На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2+BQ^2=PQ^2=\sqrt{578}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

Ответ: $\sqrt[4]{144{,}5}\approx 3{,}467$.

Решение. Обозначив $\angle PCA=\alpha$, $\angle QCB=\beta$ и применяя теорему синусов к треугольникам ACP и BCQ, находим, что $AP=\frac{a\sin\alpha}{\sin(45^\circ+\alpha)}$, $BQ=\frac{a\sin\beta}{\sin(45^\circ+\beta)}$. Тогда $PQ=a\sqrt{2}-\frac{a\sin\alpha}{\sin(45^\circ+\alpha)}-\frac{a\sin\beta}{\sin(45^\circ+\beta)}$. Подставляя длины отрезков в равенство $AP^2+BQ^2=PQ^2$ и упрощая, получаем $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$, поэтому $\alpha+\beta=45^\circ$. Значит, $\angle PCQ=45^\circ$, и искомый радиус есть $\frac{PQ}{2\sin 45^\circ}=\frac{PQ}{\sqrt{2}}$.

б) На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2+BQ^2=PQ^2=\sqrt{1\,058}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

Ответ: $\sqrt[4]{264{,}5}\approx 4{,}033$.

в) На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2+BQ^2=PQ^2=\sqrt{338}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

Ответ: $\sqrt[4]{84{,}5}\approx 3{,}032$.

г) На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2+BQ^2=PQ^2=\sqrt{722}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

Ответ: $\sqrt[4]{180{,}5}\approx 3{,}665$.

д) На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2+BQ^2=PQ^2=\sqrt{882}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

Ответ: $\sqrt[4]{220{,}5}\approx 3{,}853$.