9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

   Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

   Решение. Для того чтобы у уравнения было два корня, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положителен. Получаем $D = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$, откуда $t^2 < 4$. По теореме Виета произведение корней равно $4t^2 - 4$. По условию требуется, чтобы оно было положительно, поэтому $4t^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow t^2 > 1$. Значит, $1 < t^2 < 4$, то есть $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

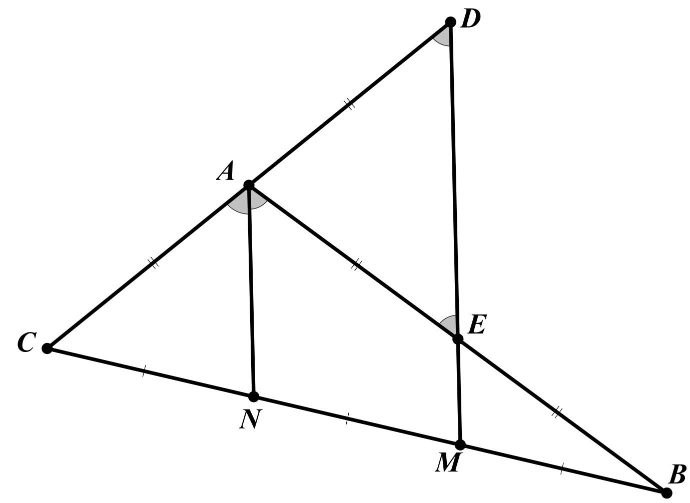
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

   Ответ: $(4; 36)$.

   Решение. Данное выражение можно разложить на множители, в результате чего получаем $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a - b)(a - b + 15)$ – произведение чисел разной чётности, следовательно, это число чётное. Так как оно равно $17p^5$, число p также чётное. Но по условию p – простое, значит, $p = 2$. Получаем уравнение $(a - b)^2 + 15(a - b) - 17 \cdot 32 = 0$, которое является квадратным относительно $a - b$. Его решения – это $a - b = -32$ и $a - b = 17$.
   Так как в условии задано, что сумма $a+b$ равна 40, а числа $a+b$ и $a-b$ имеют одинаковую чётность, подходит только случай $a-b = -32$. Решая получившуюся систему уравнений, находим, что $a = 4$, $b = 36$.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 12$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$.

   Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$.

   Решение. Пусть E – точка пересечения AB и DM. Поскольку $BM = MN = NC$, а $DM \parallel AN$, по теореме Фалеса $AC = AD$ и $AE = EB$. Из равенства $CD = AB$ следует, что $AC = DA = BE = AE$. Обозначим длину любого из этих отрезков через a. Поскольку $AN \parallel EM$ и треугольник AED – равнобедренный, $\angle CAN = \angle EDA = \angle AED = \angle BAN$, поэтому AN – биссектриса треугольника ABC. Значит, $2\angle CAN = \angle CAB$. В треугольнике ABC имеем $BC = 12$, $CA = a$, $AB = 2a$, $\angle CAB = 2\angle CAN$. По теореме косинусов $144 = a^2+4a^2-2\cdot a\cdot 2a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow a^2 = 24$. Следовательно, $AB = 2a = 4\sqrt{6}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

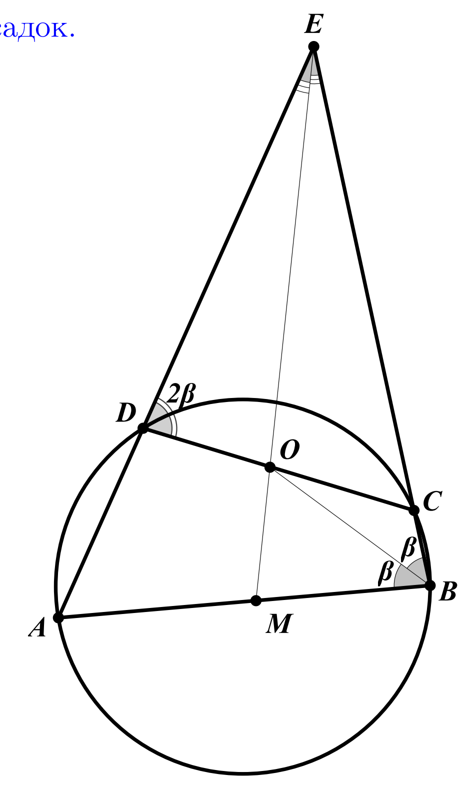
   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $\frac{8!}{(3!)^2} = 6\,720$.

Решение. Первый способ. При любой рассадке учеников в классе одна парта остаётся пустой, а в ряду из подряд стоящих k парт любые k школьников единственным образом могут сесть так, чтобы всем было хорошо видно доску.
Если пустая парта является первой или третьей в каком-либо ряду, то оставшиеся в этом ряду две парты идут подряд, и тогда количество возможных рассадок в классе равно количеству способов разбить 8 человек на три группы: две группы по три человека и одну группу из двух человек. Это количество равно $\frac{8!}{2!\cdot(3!)^2}$. (Например, это количество можно получить так: сначала выбираем трёх человек из восьми, чтобы заполнить первый ряд. После этого выбираем ещё трёх человек из оставшихся пяти для второго ряда. Оставшиеся двое садятся за третий ряд без возможности выбора. Отсюда имеем $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!}$.) Суммарно первых и третьих парт шесть, поэтому полученное число надо умножить на 6.
Если пустая парта стоит в каком-либо ряду второй, то при любом расположении любых двух школьников в этом ряду доска им будет видна хорошо. Тогда количество подходящих рассадок вдвое больше, чем в предыдущем случае, и оно равно $\frac{8!}{(3!)^2}$. Вторых парт три, значит, потребуется умножение на 3.
Всего получаем $6 \cdot \frac{8!}{2!\cdot(3!)^2} + 3 \cdot \frac{8!}{(3!)^2} = 6\frac{8!}{(3!)^2} = 6\,720$ различных рассадок.

Второй способ. При любой рассадке одна парта останется пустой. Ряд, в котором она расположена, выбирается тремя способами. Для каждого из этих трёх случаев между рядами школьники распределяются $C_8^3 \cdot C_5^3$ способами. В ряду с пустой партой любых двух школьников можно четырьмя способами рассадить так, чтобы они оба хорошо видели доску. В остальных рядах рассадка осуществляется единственным способом.
Итого $3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 = 6\,720$ способов.



5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.

Ответ: 10.

Решение. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов составляет $180°$, откуда следует, что $\angle EDO = 180° - \angle ADO = \angle ABC$. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника, поэтому $\angle DEO = \angle BEO$, а точка O лежит на биссектрисе угла B. Пусть биссектриса EO угла AEB пересекает AB в точке M. Треугольники DEO и BEM подобны по двум углам, откуда $\frac{ED}{BE} = \frac{DO}{BM} = \frac{EO}{EM}$. Применяя свойство равных дробей, получаем $\frac{ED+DO}{BE+BM} = \frac{EO}{EM}$, следовательно, $ED + DO = \frac{(BE+BM)\cdot EO}{EM}$.
Известно, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально прилежащим сторонам. Применяя это свойство к треугольнику BEM и биссектрисе BO, получаем

$\frac{BE}{BM} = \frac{EO}{OM}$, откуда $\frac{EO}{EM} = \frac{BE}{BM+BE}$. Окончательно имеем

$$ED + DO = (BE + BM) \cdot \frac{EO}{EM} = (BE + BM) \cdot \frac{BE}{BM + BE} = BE.$$

Таким образом, сумма $ED + DO$ может принимать одно-единственное значение 10.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

   Ответ: 17.

   Решение. Сформулируем задачу на языке графов. Имеется дерево, у которого есть четыре вершины со степенями 3, 4, 5 и 7, а остальные вершины – висячие (степени 1). Требуется найти количество вершин в этом дереве.
   Пусть x – количество висячих вершин. Найдем количество рёбер. С одной стороны, оно равно половине от суммы степеней вершин, то есть $\frac{3+4+5+7+x}{2} = \frac{19+x}{2}$. С другой стороны, количество рёбер в дереве на 1 меньше количества вершин. Так как вершин $x+4$, то рёбер $x+3$. Получаем уравнение $\frac{19+x}{2} = x + 3$, откуда находим, что $x = 13$. Значит, в дереве $x + 4 = 17$ вершин.

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

   Ответ: $(0; 1)$, $(0; 2)$, $(1; 0)$, $(1; 2)$, $(2; 0)$, $(2; 1)$.

   Решение. Поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными, получаем неравенства

$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 \geqslant 0, \\ 1 - |x + y - 2| \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2, & (1) \\ -1 \leqslant x + y - 2 \leqslant 1. & (2) \end{cases}$$

   На плоскости Oxy неравенство (1) задаёт круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке (1;1), а неравенство (2) – полосу между прямыми $x+y = 1$ и $x+y = 3$. На пересечении двух этих множеств расположено 7 точек с целочисленными координатами: $(0; 1)$, $(0; 2)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 0)$ и $(2; 1)$. В этом можно убедиться, например, рассматривая все целочисленные точки в круге (а их всего 9) и подставляя их координаты в неравенство (2). Другой способ – нарисовать чертёж.
   Подставляя эти пары чисел в уравнение, убеждаемся, что только одна из них – $(1; 1)$ – ему не удовлетворяет. Остальные 6 пар являются решениями.

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2+4\sqrt{2}tx+9t^2-9=0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

   Ответ: $(-3;-1)\cup(1;3)$.

   Решение. Для того, чтобы у уравнения было два корня, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положителен. Получаем $D=32t^2-36t^2+36=36-4t^2>0$, откуда $t^2<9$. По теореме Виета произведение корней равно $9t^2-9$. По условию требуется, чтобы оно было положительно, поэтому $9t^2-9>0 \Leftrightarrow t^2>1$. Значит, $1<t^2<9$, то есть $t\in(-3;-1)\cup(1;3)$.

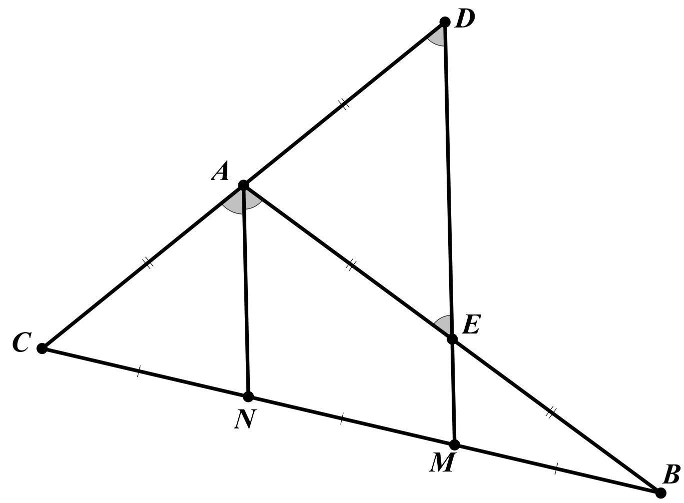
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a-b=12$, а значение выражения $a^2+2ab+b^2+3a+3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

   Ответ: $(14;2)$.

   Решение. Данное выражение можно разложить на множители, в результате чего получаем $a^2+2ab+b^2+3a+3b=(a+b)(a+b+3)$ – произведение чисел разной чётности, следовательно, это число чётное. Так как оно равно $19p^4$, число p также чётное. Но по условию p – простое, значит, $p=2$. Получаем уравнение $(a+b)^2+3(a+b)-19\cdot16=0$, которое является квадратным относительно $a+b$. Его решения – это $a+b=-19$ и $a+b=16$.
   Так как в условии задано, что разность $a-b$ равна 12, а числа $a+b$ и $a-b$ имеют одинаковую чётность, подходит только случай $a+b=16$. Решая получившуюся систему уравнений, находим, что $a=14$, $b=2$.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM=MN=NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB=CD$. Найдите AB, если $BC=6$, $\cos(2\angle CEM)=-\frac{3}{4}$.

   Ответ: $AB=3\sqrt{2}$.

   Решение. Пусть E – точка пересечения AB и DM. Поскольку $BM=MN=NC$, а $DM\parallel AN$, по теореме Фалеса $AC=AD$ и $AE=EB$. Из равенства $CD=AB$ следует, что $AC=DA=BE=AE$. Обозначим длину любого из этих отрезков через a. Поскольку $AN\parallel EM$ и треугольник AED – равнобедренный, $\angle CAN=\angle EDA=\angle AED=\angle BAN$, поэтому AN – биссектриса треугольника ABC. Значит, $2\angle CAN=\angle CAB$.
   В треугольнике ABC имеем $BC=6$, $CA=a$, $AB=2a$, $\angle CAB=2\angle CAN$. По теореме косинусов $136=a^2+4a^2-2\cdot a\cdot 2a\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow a^2=4{,}5$. Следовательно, $AB=2a=3\sqrt{2}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $8 \cdot \frac{11!}{(3!)^3} = 1\,478\,400$.

Решение. Первый способ. При любой рассадке учеников в классе одна парта остаётся пустой, а в ряду из подряд стоящих k парт любые k школьников единственным образом могут сесть так, чтобы всем было хорошо видно доску.

Если пустая парта является первой или третьей в каком-либо ряду, то оставшиеся в этом ряду две парты идут подряд, и тогда количество возможных рассадок в классе равно количеству способов разбить 8 человек на три группы: две группы по три человека и одну группу из двух человек. Это количество равно $\frac{11!}{2!\cdot(3!)^3}$. (Например, это количество можно получить так: сначала выбираем трёх человек из одиннадцати, чтобы заполнить первый ряд. После этого выбираем ещё трёх человек из оставшихся восьми для второго ряда, далее – трёх из пяти. Оставшиеся двое садятся за третий ряд без возможности выбора. Отсюда имеем $C_{11}^3 C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{11!}{3!8!}\frac{8!}{3!5!}\cdot\frac{5!}{3!2!}$.) Суммарно первых и третьих парт восемь, поэтому полученное число надо умножить на 8.

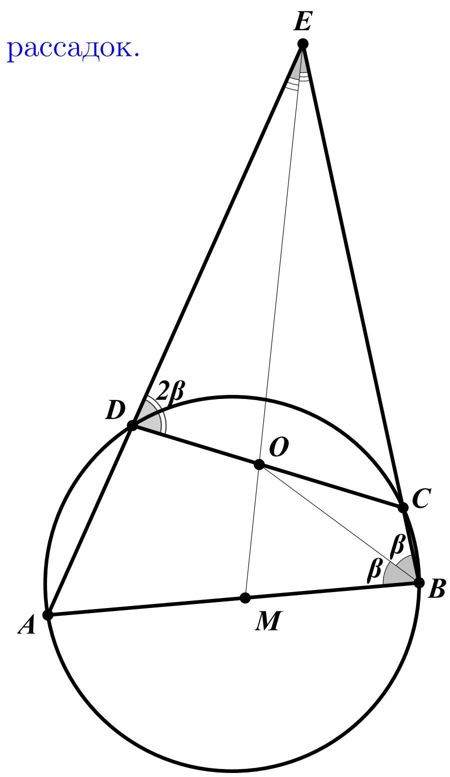
Если пустая парта стоит в каком-либо ряду второй, то при любом расположении любых двух школьников в этом ряду доска им будет видна хорошо. Тогда количество подходящих рассадок вдвое больше, чем в предыдущем случае, и оно равно $\frac{11!}{(3!)^3}$. Вторых парт четыре, значит, потребуется умножение на 4.

Всего получаем $8 \cdot \frac{11!}{2!\cdot(3!)^3} + 4 \cdot \frac{11!}{(3!)^3} = 8 \cdot \frac{11!}{(3!)^3} = 1\,478\,400$ различных рассадок.

Второй способ. При любой рассадке одна парта останется пустой. Ряд, в котором она расположена, выбирается четырьмя способами. Для каждого из этих четырёх случаев между рядами школьники распределяются $C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ способами. В ряду с пустой партой любых двух школьников можно четырьмя способами рассадить так, чтобы они оба хорошо видели доску. В остальных рядах рассадка осуществляется единственным способом.

Итого $4 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 = 1\,478\,400$ способов.

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.



Ответ: 12.

Решение. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов составляет $180°$, откуда следует, что $\angle EDO = 180° - \angle ADO = \angle ABC$. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника, поэтому $\angle DEO = \angle BEO$, а точка O лежит на биссектрисе угла B. Пусть биссектриса EO угла AEB пересекает AB в точке M. Треугольники DEO и BEM подобны по двум углам, откуда $\frac{ED}{BE} = \frac{DO}{BM} = \frac{EO}{EM}$. Применяя свойство равных дробей, получаем $\frac{ED+DO}{BE+BM} = \frac{EO}{EM}$, следовательно, $ED + DO = \frac{(BE+BM)\cdot EO}{EM}$.

Известно, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально прилежащим сторонам. Применяя это свойство к треугольнику BEM и биссектрисе BO, получаем

$\frac{BE}{BM} = \frac{EO}{OM}$, откуда $\frac{EO}{EM} = \frac{BE}{BM+BE}$. Окончательно имеем

$$ED + DO = (BE + BM) \cdot \frac{EO}{EM} = (BE + BM) \cdot \frac{BE}{BM + BE} = BE.$$

Таким образом, сумма $ED + DO$ может принимать одно-единственное значение 12.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

Ответ: 25.

Решение. Сформулируем задачу на языке графов. Имеется дерево, у которого есть четыре вершины со степенями 5, 6, 7 и 9, а остальные вершины – висячие (степени 1). Требуется найти количество вершин в этом дереве.

Пусть x – количество висячих вершин. Найдем количество рёбер. С одной стороны, оно равно половине от суммы степеней вершин, то есть $\frac{5+6+7+9+x}{2} = \frac{27+x}{2}$. С другой стороны, количество рёбер в дереве на 1 меньше количества вершин. Так как вершин $x+4$, то рёбер $x+3$. Получаем уравнение $\frac{27+x}{2} = x+3$, откуда находим, что $x = 21$. Значит, в дереве $x + 4 = 25$ вершин.

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$

Ответ: $(0; -1)$, $(1; 0)$.

Решение. Поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными, получаем неравенства

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 \geqslant 0, \\ 1 - |x - y - 1| \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqslant 2, & (1) \\ -1 \leqslant y - x + 1 \leqslant 1. & (2) \end{cases}$$

На плоскости Oxy неравенство (1) задаёт круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке (1;-1), а неравенство (2) – полосу между прямыми $y = x - 2$ и $y = x$. На пересечении двух этих множеств расположено 7 точек с целочисленными координатами: $(0; -2), (0; -1), (0; 0), (1; -1), (1; 0), (2; 0)$ и $(2; 1)$. В этом можно убедиться, например, рассматривая все целочисленные точки в круге (а их всего 9) и подставляя их координаты в неравенство (2). Другой способ – нарисовать чертёж.

Подставляя эти пары чисел в уравнение, убеждаемся, что только две из них – $(1; 0)$ и $(0; -1)$ – ему удовлетворяет. Остальные 4 пары не являются решениями.

9 КЛАСС. Вариант 15

1. [3 балла] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2-(4a+8)x+a^2+4a=0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?

   Ответ: $a=1$, $a=-5$.

   Решение. Корнями уравнения являются числа $x_1=\frac{a}{2}$ и $x_2=\frac{a+4}{2}$ (можно вычислить по формуле для корней или найти по теореме Виета). Если $5x_1=x_2$, то $5\cdot\frac{a}{2}=\frac{a+4}{2}$, откуда $a=1$.
   Если $x_1=5x_2$, то $\frac{a}{2}=5\cdot\frac{a+4}{2}$, откуда $a=-5$.

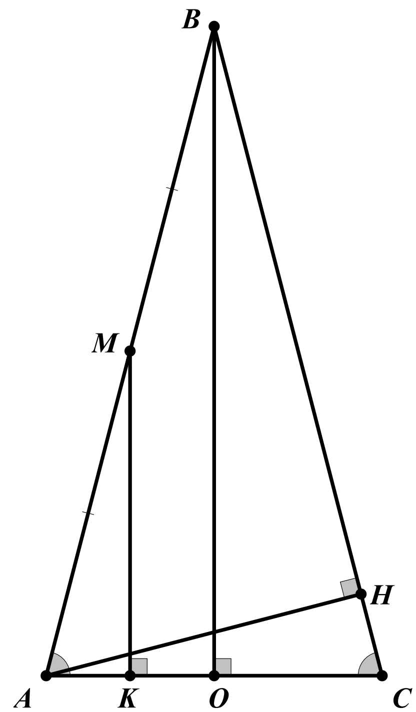
2. [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB=30$, $BC=24$, $AC=18$. На стороне BC отмечено последовательно 23 точки: $B_1,B_2,\ldots,B_{23}$ так, что эти точки разбивают BC на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 17 точек: $A_1,A_2,\ldots,A_{17}$ так, что эти точки разбивают AC на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек A, $A_1,A_2,\ldots,A_{17}$, B, $B_1,B_2,\ldots,B_{23}$, C?

   Ответ: 80.

   Решение. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C, так как $18^2+24^2=30^2$. Будем считать, что на одном из катетов выбираются две точки, расстояние между которыми равно d, а на другом – одна. Тогда $S=\frac{dh}{2}$, где h – высота треугольника, проведенная к основанию – отрезку длины d, т.е. h – это расстояние от вершины C до соответствующей точки на катете треугольника ABC. Таким образом, d и h – натуральные числа такие, что $dh=2S=22$. Существует ровно 4 способа записать 22 в виде произведения двух натуральных чисел (с учётом порядка сомножителей): $22=1\cdot 22=2\cdot 11=11\cdot 2=22\cdot 1$. Отметим также, что как только мы выбрали d, h определяется однозначно. Возможны два случая.
   1) Отрезок длины d выбирается на стороне BC. Если он имеет длину 1, то высота $h=22>AC$, поэтому искомых треугольников нет. Если он имеет длину 2, то его можно выбрать $25-2=23$ способами. Если он имеет длину 11, то $25-11=14$ способами. Если он имеет длину 22, то $25-22=3$ способами. Всего получаем $23+14+3=40$ способов.
   2) Отрезок длины d выбирается на стороне AC. Если он имеет длину 1, то это можно сделать $19-1=18$ способами. Если он имеет длину 2, то $19-2=17$ способами. Если он имеет длину 11, то $19-11=8$ способами. Отрезок длины 22 на стороне AC выбрать нельзя. Всего получаем $18+17+8=43$ способа.
   Заметим, что при таком подсчете мы дважды посчитали треугольники, одной из вершин которых является вершина C. Таких треугольников ровно 3.
   Итого получаем $40+43-3=80$ способов.

3. [4 балла] AH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$). Точка M – середина стороны AB. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AH=MK$, и $AK=5$.

   Ответ: 100.



Решение. Пусть $AK = t$. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведем высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK : KO = AM : MB$, значит $AO = 2AK = 2t$. Тогда $AC = 2AO = 4t$, $AB = 2AC = 8t$. Значит, периметр равен $8t + 8t + 4t = 20t = 100$.

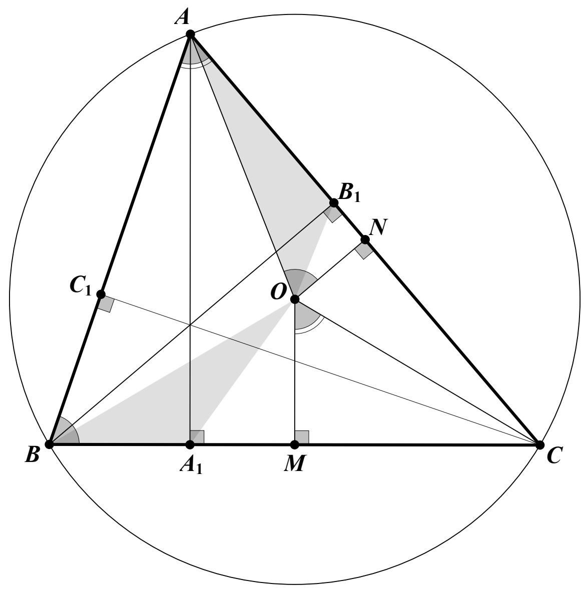
4. [4 балла] Из множества M, состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 240$.

Ответ: $\{13, 14, 15, 16, 17\}$.

Решение. Пусть данные 5 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$. Их сумма равна $5a+10$. Сумма четырёх чисел из этого набора может принимать следующие значения: $4a+6$, $4a+7$, $4a+8$, $4a+9$, $4a+10$. Из них простыми могут быть только $4a+7$ и $4a+9$ (остальные числа чётные и отличны от 2).
Таким образом, $(4a+9)^2 - (4a+7)^2 = 240$. Отсюда $a = 13$. Значит, $M = \{13, 14, 15, 16, 17\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 80 вписан в окружность с центром O, а AA_1, BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1, если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 20 соответственно.

Ответ: 8.



Решение. Пусть M и N — середины BC и AC соответственно. Заметим, что треугольники BAA_1, OAN подобны как прямоугольные с равными острыми углами ($\angle ABA_1 = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle AON$). Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть $2S_{OAB_1}$, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}$. Аналогично получаем равенства $S_{OAC_1} = S_{OCA_1}$ и $S_{OCB_1} = S_{OBC_1}$. Итак, треугольник ABC разбивается на три пары треугольников равной площади, откуда

$$\frac{1}{2}S_{ABC} = S_{COB_1} + S_{BOA_1} + S_{AOC_1} \;\Rightarrow\; S_{BOA_1} = \frac{1}{2}S_{ABC} - S_{COB_1} - S_{BOC_1} = 8.$$

6. [5 баллов] Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$

Ответ: $(2;-2)$, $(-2;2)$.

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} = 2ab + 4, \\ \frac{b^3}{a} = 3ab + 8. \end{cases}$$

Перемножив уравнения, получим $5(ab)^2 + 28ab + 32 = 0$. Откуда либо $ab = -4$, либо $ab = -\frac{8}{5}$. Если $ab = -4$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = 16$, $a = \pm 2$, $b = \mp 2$ – решения системы. Если $ab = -\frac{8}{5}$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = -\frac{32}{25} < 0$. В этом случае решений нет.

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе $2q^2$ тыс.руб., на втором заводе $2q^2 + 2q$ тыс.руб., и на третьем $2q^2 - q$ тыс.руб. Каждый завод

может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?

Ответ: Первый и второй заводы должны выпустить по 83 прибора, третий завод – 84.

Решение. Выпуск k-ого по счёту прибора на первом заводе стоит $2k^2-2(k-1)^2=4k-2$ тыс.руб., на втором – $2k^2+2k-2(k-1)^2-2(k-1)=4k$, и на третьем – $2k^2-k-2(k-1)^2+(k-1)=4k-3$. Это значит, что выпуск первого прибора будет дешевле всего на третьем заводе, второго (в общей последовательности выпускаемой продукции) – на первом заводе (для него этот прибор станет первым), и третий «общий» прибор – на втором заводе (для него этот прибор тоже станет первым). Четвёртый «общий» прибор станет вторым для каждого завода по отдельности, и соответственно, дешевле всего его будет произвести на третьем заводе. Продолжая рассуждать подобным образом, видим, что если рассмотреть тройку выпущенных приборов с «общими» номерами $3l-2, 3l-1$ и $3l$ $(l\in N)$, то прибор с номером $3l-2$ приходится на третий завод, прибор с номером $3l-1$ – на первый, и прибор с номером $3l$ – на второй.
Поскольку $\left[\frac{250}{3}\right]=83$, а остаток от деления 250 на 3 равен 1, то выгоднее всего поручить первому и второму заводам выпустить по 83 прибора, а третьему – 84.

9 КЛАСС. Вариант 16

1. [3 балла] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2-(4a-12)x+$ $+a^2-6a=0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 3 раза?

   Ответ: $a=9$, $a=-3$.

   Решение. Корнями уравнения являются числа $x_1=\frac{a}{2}$ и $x_2=\frac{a-6}{2}$ (можно вычислить по формуле для корней или найти по теореме Виета). Если $3x_1=x_2$, то $3\cdot\frac{a}{2}=\frac{a-6}{2}$, откуда $a=-3$.
   Если $x_1=3x_2$, то $\frac{a}{2}=3\cdot\frac{a-6}{2}$, откуда $a=9$.

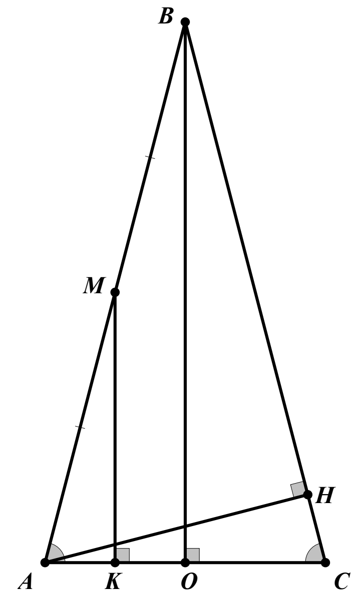
2. [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB=35$, $BC=28$, $AC=21$. На стороне BC отмечено последовательно 27 точек: $B_1,B_2,\ldots,B_{27}$ так, что эти точки разбивают BC на 28 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 20 точек: $A_1,A_2,\ldots,A_{20}$ так, что эти точки разбивают AC на 21 единичный отрезок. Сколько существует треугольников с площадью 13 и вершинами, которые выбираются из точек A, $A_1,A_2,\ldots,A_{20}$, B, $B_1,B_2,\ldots,B_{27}$, C?

   Ответ: 93.

   Решение. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C, так как $21^2+28^2=35^2$. Будем считать, что на одном из катетов выбираются две точки, расстояние между которыми равно d, а на другом – одна. Тогда $S=\frac{dh}{2}$, где h – высота треугольника, проведенная к основанию – отрезку длины d, т.е. h – это расстояние от вершины C до соответствующей точки на катете треугольника ABC. Таким образом, d и h – натуральные числа такие, что $dh=2S=26$. Существует ровно 4 способа записать 26 в виде произведения двух натуральных чисел (с учётом порядка сомножителей): $26=1\cdot 26=2\cdot 13=13\cdot 2=26\cdot 1$. Отметим также, что как только мы выбрали d, h определяется однозначно. Возможны два случая.
   1) Отрезок длины d выбирается на стороне BC. Если он имеет длину 1, то высота $h=26>AC$, поэтому искомых треугольников нет. Если он имеет длину 2, то его можно выбрать $29-2=27$ способами. Если он имеет длину 13, то $29-13=16$ способами. Если он имеет длину 26, то $29-26=3$ способами. Всего получаем $27+16+3=46$ способов.
   2) Отрезок длины d выбирается на стороне AC. Если он имеет длину 1, то это можно сделать $22-1=21$ способом. Если он имеет длину 2, то $22-2=20$ способами. Если он имеет длину 13, то $22-13=9$ способами. Отрезок длины 26 на стороне AC выбрать нельзя. Всего получаем $21+20+9=50$ способов.
   Заметим, что при таком подсчете мы дважды посчитали треугольники, одной из вершин которых является вершина C. Таких треугольников ровно 3.
   Итого получаем $46+50-3=93$ способа.

3. [4 балла] AH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$). Точка M – середина стороны AB. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AH=MK$, и $AK=7$.

   Ответ: 140.



Решение. Пусть $AK = t$. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведем высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK : KO = AM : MB$, значит $AO = 2AK = 2t$. Тогда $AC = 2AO = 4t$, $AB = 2AC = 8t$. Значит, периметр равен $8t + 8t + 4t = 20t = 140$.

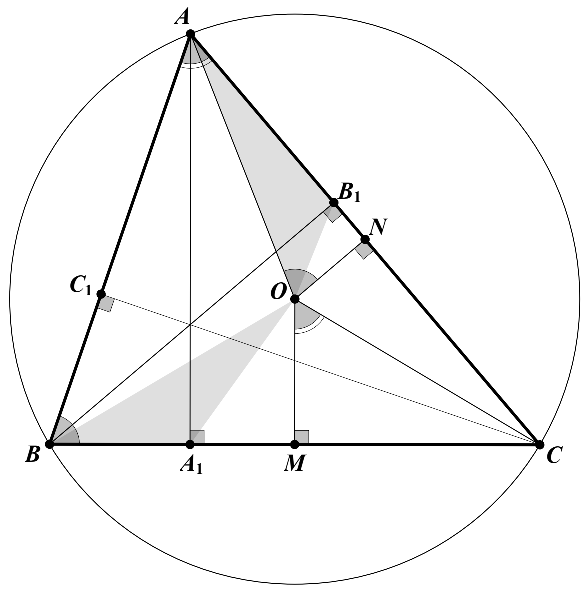
4. [4 балла] Из множества M, состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 288$.

   Ответ: $\{16, 17, 18, 19, 20\}$.

   Решение. Пусть данные 5 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$. Их сумма равна $5a+10$. Сумма четырёх чисел из этого набора может принимать следующие значения: $4a+6$, $4a+7$, $4a+8$, $4a+9$, $4a+10$. Из них простыми могут быть только $4a+7$ и $4a+9$ (остальные числа чётные и отличны от 2).
   Таким образом, $(4a+9)^2 - (4a+7)^2 = 288$. Отсюда $a = 16$. Значит, $M = \{16, 17, 18, 19, 20\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 120 вписан в окружность с центром O, а AA_1, BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1, если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 36 соответственно.

   Ответ: 12.



Решение. Пусть M и N — середины BC и AC соответственно. Заметим, что треугольники BAA_1, OAN подобны как прямоугольные с равными острыми углами ($\angle ABA_1 = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle AON$). Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть $2S_{OAB_1}$, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}$. Аналогично получаем равенства $S_{OAC_1} = S_{OCA_1}$ и $S_{OCB_1} = S_{OBC_1}$. Итак, треугольник ABC разбивается на три пары треугольников равной площади, откуда

$$\frac{1}{2}S_{ABC} = S_{COB_1} + S_{BOA_1} + S_{AOC_1} \;\Rightarrow\; S_{BOA_1} = \frac{1}{2}S_{ABC} - S_{COB_1} - S_{BOC_1} = 12.$$

6. [5 баллов] Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{a^3}{b} + ab = 8, \\ \frac{b^3}{a} + 3ab = 16. \end{cases}$

Ответ: $(2;2)$, $(-2;-2)$.

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} = -ab + 8, \\ \frac{b^3}{a} = -3ab + 16. \end{cases}$$

Перемножив уравнения, получим $2(ab)^2 - 40ab + 128 = 0$. Откуда либо $ab = 4$, либо $ab = 16$. Если $ab = 4$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = 16$, $a = \pm 2$, $b = \pm 2$ – решения системы. Если $ab = 16$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = -128 < 0$. В этом случае решений нет.

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе

$3q^2 + 2q$ тыс.руб., на втором заводе $3q^2 - q$ тыс.руб., и на третьем $3q^2$ тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 80 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 200 приборов?

Ответ: Первый завод должен выпустить 66 приборов, второй и третий заводы – по 67.

Решение. Выпуск k-ого по счёту прибора на первом заводе стоит $3k^2+2k-3(k-1)^2-2(k-1) = 6k-1$ тыс.руб., на втором – $3k^2-k-3(k-1)^2+(k-1) = 6k-4$, и на третьем – $3k^2-3(k-1)^2 = 6k-3$. Это значит, что выпуск первого прибора будет дешевле всего на втором заводе, второго (в общей последовательности выпускаемой продукции) – на третьем заводе (для него этот прибор станет первым), и третий «общий» прибор – на первом заводе (для него этот прибор тоже станет первым). Четвёртый «общий» прибор станет вторым для каждого завода по отдельности, и соответственно, дешевле всего его будет произвести на втором заводе. Продолжая рассуждать подобным образом, видим, что если рассмотреть тройку выпущенных приборов с «общими» номерами $3l-2, 3l-1$ и $3l$ ($l \in \mathbb{N}$), то прибор с номером $3l-2$ приходится на второй завод, прибор с номером $3l-1$ – на третий, и прибор с номером $3l$ – на первый.
Поскольку $\left[\frac{200}{3}\right] = 66$, а остаток от деления 200 на 3 равен 2, то выгоднее всего поручить первому заводу выпустить 66 приборов, а второму и третьему – по 67.