9 класс – день 1

1. а) Какую наименьшую сумму могут иметь 11 последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 20 222 023?

Ответ: 320 222 023.

Решение. Если некоторое число оканчивается на 20 222 023, то оно представимо в виде $100\,000\,000x + 20\,222\,023$, где x есть число, полученное из исходного отбрасыванием последних 8 цифр (быть может, $x = 0$). Пусть n – наименьшее из данных последовательных чисел. Тогда по условию получаем $n + (n + 1) + \ldots + (n + 10) = 100\,000\,000x + 20\,222\,023$, откуда $11n = 100\,000\,000x + 20\,221\,968$, где x и n – целые. Несложно установить, что минимальное значение x, при котором n получается натуральным числом, есть $x = 3$ (тогда $n = 29\,111\,088$.) Следовательно, наименьшее возможное значение суммы есть 320 222 023.

б) Какую наименьшую сумму могут иметь 11 последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 914 567?

Ответ: 6 914 567.

в) Какую наименьшую сумму могут иметь 11 последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 876 543?

Ответ: 3 876 543.

г) Какую наименьшую сумму могут иметь 11 последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 43 214 321?

Ответ: 443 214 321.

д) Какую наименьшую сумму могут иметь 11 последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 20 232 024?

Ответ: 120 232 024.

2. а) В классе 3 ряда по 6 парт в каждом ряду (за партой может сидеть только один ученик). 18 школьников выбирают себе места: четверо хотят сидеть на первом ряду, по трое хотят занять места на втором и третьем рядах, а остальным 8 безразлично, где сидеть. Сколькими способами можно рассадить школьников за парты с учётом их пожеланий?

Ответ: 209 018 880 000.

Решение. Выберем, кто из 8 школьников, не имеющих предпочтений, сидит на первом ряду, а кто на втором (остальных посадим на третий ряд). Есть C_8^2 способов выбрать двух школьников на первый ряд, после чего остаётся шесть школьников, и есть C_6^3 способов выбрать трёх из них на второй ряд.

После этого состав школьников в каждом ряду определён. И тогда на каждом ряду школьников можно рассадить 6! способами. Итого получаем $C_8^2 C_6^3 (6!)^3$ различных вариантов рассадить школьников.

б) В классе 3 ряда по 5 парт в каждом ряду (за партой может сидеть только один ученик). 15 школьников выбирают себе места: четверо хотят сидеть на первом ряду, по трое хотят занять места на втором и третьем рядах, а остальным 5 безразлично, где сидеть. Сколькими способами можно рассадить школьников за парты с учётом их пожеланий?

Ответ: 51 840 000.

в) В классе 3 ряда по 6 парт в каждом ряду (за партой может сидеть только один ученик). 18 школьников выбирают себе места: пятеро хотят сидеть на первом ряду, по трое хотят занять места на втором и третьем рядах, а остальным 7 безразлично, где сидеть. Сколькими способами можно рассадить школьников за парты с учётом их пожеланий?

Ответ: 52 254 720 000.

г) В классе 3 ряда по 6 парт в каждом ряду (за партой может сидеть только один ученик). 18 школьников выбирают себе места: трое хотят сидеть на первом ряду, по четверо хотят занять места на втором и третьем рядах, а остальным 7 безразлично, где сидеть. Сколькими способами можно рассадить школьников за парты с учётом их пожеланий?

Ответ: 78 382 080 000.

д) В классе 3 ряда по 5 парт в каждом ряду (за партой может сидеть только один ученик). 15 школьников выбирают себе места: трое хотят сидеть на первом ряду, по двое хотят занять места на втором и третьем рядах, а остальным 8 безразлично, где сидеть. Сколькими способами можно рассадить школьников за парты с учётом их пожеланий?

Ответ: 967 680 000.

3. а) Найдите наибольшее натуральное значение параметра t, при котором число $4t^4 - 96t^2 + 1$ является простым.

Ответ: 5.

Решение. Данное число можно записать в виде $4t^4 - 96t^2 + 1 = (2t^2+1)^2 - 100t^2 = (2t^2 - 10t + 1)(2t^2 + 10t + 1)$. Значит, $2t^2 - 10t + 1 = 1$, откуда $t = 5$. Осталось заметить, что при $t = 5$ число $2t^2 + 10t + 1 = 101$ – простое.

б) Найдите наибольшее натуральное значение параметра t, при котором число $4t^4 - 192t^2 + 1$ является простым.

Ответ: 7.

в) Найдите наибольшее натуральное значение параметра t, при котором число $4t^4 - 252t^2 + 1$ является простым.

Ответ: 8.

г) Найдите наибольшее натуральное значение параметра t, при котором число $4t^4 - 396t^2 + 1$ является простым.

Ответ: 10.

д) Найдите наибольшее натуральное значение параметра t, при котором число $4t^4 - 572t^2 + 1$ является простым.

Ответ: 12.

4. а) С первого поля собрали 600 килограммов пшеницы, а со второго – 1 200 килограммов пшеницы, при этом известно, что на первом поле с одного квадратного метра было собрано на 50 граммов меньше пшеницы, чем на втором. На следующий год было решено внести дополнительные удобрения, в результате чего урожай на каждом из полей стал равен 2 400 килограммов. При этом урожайность на втором поле оказалась на 100 граммов с квадратного метра меньше, чем на первом. Найдите площадь первого поля. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: 6 000.

Решение. Пусть первоначально собирали x граммов с квадратного метра первого поля и y граммов с квадратного метра второго поля. После внесения удобрений эти числа становятся равны $4x$ и $2y$ соответственно. Из условия $x + 50 = y$, $4x - 100 = 2y$, откуда $x = 100$, $y = 150$ [граммов с квадратного метра]. Площадь первого поля равна $600/x = 6\,000$ [квадратных метров].

б) С первого поля собрали 600 килограммов пшеницы, а со второго – 1 440 килограммов пшеницы, при этом известно, что на первом поле с одного квадратного метра было собрано на 60 граммов меньше пшеницы, чем на втором. На следующий год было решено внести дополнительные удобрения, в результате чего урожай на каждом из полей стал равен 1 800 килограммов. При этом урожайность на втором поле оказалась на 135 граммов с квадратного метра меньше, чем на первом. Найдите площадь первого поля. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: 5 000.

в) С первого поля собрали 960 килограммов пшеницы, а со второго – 770 килограммов пшеницы, при этом известно, что на первом поле с одного квадратного метра было собрано на 30 граммов меньше пшеницы, чем на втором. На следующий год было решено внести дополнительные удобрения, в результате чего урожай на каждом из полей стал равен 2 100 килограммов. При этом урожайность на втором поле оказалась на 125 граммов с квадратного метра больше, чем на первом. Найдите площадь первого поля. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: 12 000.

г) С первого поля собрали 910 килограммов пшеницы, а со второго – 1 350 килограммов пшеницы, при этом известно, что на первом поле с одного квадратного метра было собрано на 10 граммов меньше пшеницы, чем на втором. На следующий год было решено внести дополнительные удобрения, в результате чего урожай на каждом из полей стал равен 2 340 килограммов. При этом урожайность на втором поле оказалась на 100 граммов с квадратного метра меньше, чем на первом. Найдите площадь первого поля. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: 6 500.

д) С первого поля собрали 1320 килограммов пшеницы, а со второго – 1 100 килограммов пшеницы, при этом известно, что на первом поле с одного квадратного метра было собрано на 10 граммов больше пшеницы, чем на втором. На следующий год было решено внести дополнительные удобрения, в результате чего урожай на каждом из полей стал равен 3 300 килограммов. При этом урожайность на втором поле оказалась на 30 граммов с квадратного метра больше, чем на первом. Найдите площадь первого поля. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: 11 000.

5. а) Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена равен D. Найдите его больший корень, если известно, что его корни различны, и они равны D и $1{,}5D$.

Ответ: 6.

Решение. Пусть трёхчлен имеет вид $x^2 + ax + b$. По теореме Виета $b = D \cdot 1{,}5D = 1{,}5D^2$, $a = -(D + 1{,}5D) = -2,5D$. Значит, трёхчлен равен $x^2 - 2{,}5Dx + 1{,}5D^2$. Его дискриминант можно выразить как $D = (2{,}5D)^2 - 4 \cdot 1{,}5D^2 = 0{,}25D^2$, откуда $D = 0$ (этот случай невозможен, так как по условию корни различны) или $D = 4$. Поэтому больший корень равен $1{,}5D = 6$.

б) Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена равен D. Найдите его больший корень, если известно, что его корни различны, и они равны D и $1{,}25D$.

Ответ: 20.

в) Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена равен D. Найдите его больший корень, если известно, что его корни различны, и они равны D и $3{,}5D$.

Ответ: 0,56.

г) Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена равен D. Найдите его больший корень, если известно, что его корни различны, и они равны D и $1{,}2D$.

Ответ: 30.

д) Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена равен D. Найдите его больший корень, если известно, что его корни различны, и они равны D и $2{,}25D$.

Ответ: 1,44.

6. а) На 23 карточках записаны цифры. Из этих карточек сначала сложили 23-значное число A, а затем, переложив карточки в другом порядке – 23-значное число B. Оказалось, что разность $(A - B)$ – это 22-значное число, составленное из одинаковых цифр. На какую цифру оканчивается число B, если число A оканчивается на цифру 5?

Ответ: 6.

Решение варианта 1. Поскольку у чисел A и B одинаковая сумма цифр, их разность делится на 9. Известно, что эта разность составлена из 22 одинаковых цифр k. Но тогда сумма цифр равна $22k$, а так как эта сумма должна делиться на 9, то $k = 9$. Следовательно, число A получается сложением чисел B и $9\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,999$. Отсюда последняя цифра числа B должна быть на 1 больше последней цифры числа A.

Несложно понять, что такие числа A и B существуют. Например,

$$A = 6\underbrace{11\ldots11}_{21\text{ раз}}5, \quad B = 5\underbrace{11\ldots11}_{21\text{ раз}}6$$

.

б) На 18 карточках записаны цифры. Из этих карточек сначала сложили 18-значное число A, а затем, переложив карточки в другом порядке – 18-значное число B. Оказалось, что разность $(A - B)$ – это 17-значное число, составленное из одинаковых цифр. На какую цифру оканчивается число B, если число A оканчивается на цифру 6?

Ответ: 7.

в) На 26 карточках записаны цифры. Из этих карточек сначала сложили 26-значное число A, а затем, переложив карточки в другом порядке – 26-значное число B. Оказалось, что разность $(A - B)$ – это 25-значное число, составленное из одинаковых цифр. На какую цифру оканчивается число B, если число A оканчивается на цифру 3?

Ответ: 4.

г) На 24 карточках записаны цифры. Из этих карточек сначала сложили 24-значное число A, а затем, переложив карточки в другом порядке – 24-значное число B. Оказалось, что разность $(A - B)$ – это 23-значное число, составленное из одинаковых цифр. На какую цифру оканчивается число B, если число A оканчивается на цифру 8?

Ответ: 9.

д) На 20 карточках записаны цифры. Из этих карточек сначала сложили 20-значное число A, а затем, переложив карточки в другом порядке – 20-значное число B. Оказалось, что разность $(A - B)$ – это 19-значное число, составленное из одинаковых цифр. На какую цифру оканчивается число B, если число A оканчивается на цифру 2?

Ответ: 3.

7. а) В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса AD; точка H лежит между точками B и D. Известно, что $BH = 1$, $HD = 3$, $CD = 12$. Найдите $\sin \angle HAD$.
Ответ: 0,5.
Решение. Так как биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, $AD : CD = AB : AC$. Поэтому если $AB = x$, то $AC = 3x$. По теореме Пифагора $AH^2 = x^2 - 1$, $AH^2 = 9x^2 - 225$. Решая эту систему уравнений, получаем $x^2 = 28$, $AH^2 = 27$. Но тогда $AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} = 6$, $\sin \angle HAD = \frac{HD}{AD} = \frac{1}{2}$.

б) В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса AD; точка H лежит между точками B и D. Известно, что $BH = 3$, $HD = 5$, $CD = 10$. Найдите $\sin \angle HAD$.
Ответ: 0,25.

в) В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса AD; точка H лежит между точками B и D. Известно, что $BH = 12$, $HD = 8$, $CD = 25$. Найдите $\sin \angle HAD$.
Ответ: 0,2.

г) В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса AD; точка H лежит между точками B и D. Известно, что $BH = 3$, $HD = 12$, $CD = 25$. Найдите $\sin \angle HAD$.
Ответ: 0,4.

д) В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса AD; точка H лежит между точками B и D. Известно, что $BH = 1$, $HD = 2$, $CD = 12$. Найдите $\sin \angle HAD$.
Ответ: 0,5.

8. а) В караване 17 верблюдов. В понедельник каждый верблюд плюнул ровно в N других верблюдов. При каком наименьшем N можно гарантировать, что нашлись два верблюда, которые плюнули друг в друга?
Ответ: 9.
Решение. Докажем, что если $N = 9$, то найдутся два верблюда, которые плюнули друг в друга. Действительно, всего верблюды сделали $17 \cdot 9 = 153$ плевка. А количество пар верблюдов равно $\frac{17 \cdot 16}{2} = 136$. Поэтому требуемая пара найдется.
Покажем, что если $N = 8$, то требуемой пары может не найтись. Пусть верблюды станут по кругу, и каждый будет плевать в 8 следующих по часовой стрелке. Тогда требуемой пары не будет.

б) В караване 19 верблюдов. В понедельник каждый верблюд плюнул ровно в N других верблюдов. При каком наименьшем N можно гарантировать, что нашлись два верблюда, которые плюнули друг в друга?
Ответ: 10.

в) В караване 25 верблюдов. В понедельник каждый верблюд плюнул ровно в N других верблюдов. При каком наименьшем N можно гарантировать, что нашлись два верблюда, которые плюнули друг в друга?
Ответ: 13.

г) В караване 27 верблюдов. В понедельник каждый верблюд плюнул ровно в N других верблюдов. При каком наименьшем N можно гарантировать, что нашлись два верблюда, которые плюнули друг в друга?
Ответ: 14.

д) В караване 39 верблюдов. В понедельник каждый верблюд плюнул ровно в N других верблюдов. При каком наименьшем N можно гарантировать, что нашлись два верблюда, которые плюнули друг в друга?
Ответ: 20.

9. а) В равносторонний треугольник PQR вписана окружность. Высота PH пересекает эту окружность в точке A, отличной от H. Прямая AQ пересекает окружность в точке B, отличной от A. Найдите радиус окружности, если известно, что $AB = \sqrt{63}$.

Ответ: 5,25.

Решение варианта 1. Обозначим радиус окружности через x. Тогда сторона треугольника равна $2x\sqrt{3}$, $AH = 2x$. По теореме Пифагора $AQ^2 = AH^2 + HQ^2 = 7x^2$. По теореме о касательной и секущей $QH^2 = QB \cdot QA$, $3x^2 = x\sqrt{7} \cdot QB$, $QB = \frac{3x}{\sqrt{7}}$. $AB = AQ - QB = \frac{4x}{\sqrt{7}}$. Так как по условию $AB = \sqrt{63}$, то $x = \frac{21}{4}$.

б) В равносторонний треугольник PQR вписана окружность. Высота PH пересекает эту окружность в точке A, отличной от H. Прямая AQ пересекает окружность в точке B, отличной от A. Найдите сторону треугольника PQR, если известно, что $AB = \sqrt{21}$.

Ответ: 10,5.

в) В равносторонний треугольник PQR вписана окружность. Высота PH пересекает эту окружность в точке A, отличной от H. Прямая AQ пересекает окружность в точке B, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника PQR, если известно, что $AB = \sqrt{175}$.

Ответ: 17,5.

г) В равносторонний треугольник PQR вписана окружность. Высота PH пересекает эту окружность в точке A, отличной от H. Прямая AQ пересекает окружность в точке B, отличной от A. Найдите отрезок AP, если известно, что $AB = \frac{10}{\sqrt{7}}$.

Ответ: 2,5.

д) В равносторонний треугольник PQR вписана окружность. Высота PH пересекает эту окружность в точке A, отличной от H. Прямая AQ пересекает окружность в точке B, отличной от A. Найдите сторону треугольника PQR, если известно, что $AB = \frac{13}{\sqrt{21}}$.

Ответ: 6,5.

10. а) За круглый стол сели 76 мудрецов. Часть из них в синих колпаках, остальные – в красных. Известно, что среди любых трёх мудрецов, сидящих подряд, найдётся по крайней мере один в красном колпаке. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?

Ответ: 26.

Решение. Выбрав мудреца в красном колпаке (такой найдётся), разобьём остальных на 25 троек подряд сидящих. Тогда есть не менее чем $25+1=26$ мудрецов в красных колпаках. Для построения примера занумеруем мудрецов по кругу и дадим красные колпаки 1, 4, ..., 76-му.

б) За круглый стол сели 97 мудрецов. Часть из них в синих колпаках, остальные – в красных. Известно, что среди любых трёх мудрецов, сидящих подряд, найдётся по крайней мере один в красном колпаке. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?

Ответ: 33.

в) За круглый стол сели 106 мудрецов. Часть из них в синих колпаках, остальные – в красных. Известно, что среди любых трёх мудрецов, сидящих подряд, найдётся по крайней мере один в красном колпаке. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?

Ответ: 36.

г) За круглый стол сели 130 мудрецов. Часть из них в синих колпаках, остальные – в красных. Известно, что среди любых трёх мудрецов, сидящих подряд, найдётся по крайней мере один в красном колпаке. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?

Ответ: 44.

д) За круглый стол сели 145 мудрецов. Часть из них в синих колпаках, остальные – в красных. Известно, что среди любых трёх мудрецов, сидящих подряд, найдётся по крайней мере один в красном колпаке. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?

Ответ: 49.