9 класс – день 2

1. а) На урок физкультуры пришли 8 учеников. Сколькими способами учитель может расставить их в шеренгу так, чтобы Петя стоял левее Васи, а Вася – левее Толи? Между этими троими ребятами могут стоять и другие ученики.

   Ответ: 6 720.

   Решение. Выберем из n мест 3 места для Пети, Васи и Толи. После этого их порядок на выбранных местах однозначно определён. Остальных учеников можно поставить на свободные $(n-3)$ места любыми способами. По правилу произведения получаем $C_n^3 \cdot (n-3)!$ расстановок.

   б) На урок физкультуры пришли 9 учеников. Сколькими способами учитель может расставить их в шеренгу так, чтобы Петя стоял левее Васи, а Вася – левее Толи? Между этими троими ребятами могут стоять и другие ученики.

   Ответ: 60 480.

   в) На урок физкультуры пришли 10 учеников. Сколькими способами учитель может расставить их в шеренгу так, чтобы Петя стоял левее Васи, а Вася – левее Толи? Между этими троими ребятами могут стоять и другие ученики.

   Ответ: 604 800.

   г) На урок физкультуры пришли 11 учеников. Сколькими способами учитель может расставить их в шеренгу так, чтобы Петя стоял левее Васи, а Вася – левее Толи? Между этими троими ребятами могут стоять и другие ученики.

   Ответ: 6 652 800.

   д) На урок физкультуры пришли 12 учеников. Сколькими способами учитель может расставить их в шеренгу так, чтобы Петя стоял левее Васи, а Вася – левее Толи? Между этими троими ребятами могут стоять и другие ученики.

   Ответ: 79 833 600.

2. а) Найдите наименьшее натуральное число такое, что если из него вычесть сумму его цифр, то получится число 12 357.

Ответ: 12 370.

Решение. Ясно, что искомое число X должно быть пятизначным. Так как сумма цифр пятизначного числа не превосходит 45, то $X \leqslant 12\,357+45 = 12\,402$. Но отсюда следует, что сумма первых трёх цифр X не превосходит 7, поэтому сумма всех цифр X не превосходит 25. Следовательно, $X \leqslant 12\,382$, значит, число X начинается цифрами 123. Пусть $X = \overline{123ab}$. Отсюда получаем уравнение $12300 + 10a + b - (6 + a + b) = 12357$, $9a = 63$, $a = 7$. Никаких ограничений на b нет, поэтому минимально возможное число, удовлетворяющее условию, есть 12 370.

б) Найдите наименьшее натуральное число такое, что если из него вычесть сумму его цифр, то получится число 13 473.

Ответ: 13 490.

в) Найдите наименьшее натуральное число такое, что если из него вычесть сумму его цифр, то получится число 12 672.

Ответ: 12 690.

г) Найдите наименьшее натуральное число такое, что если из него вычесть сумму его цифр, то получится число 25 560.

Ответ: 25 580.

д) Найдите наименьшее натуральное число такое, что если из него вычесть сумму его цифр, то получится число 23 373.

Ответ: 23 390.

3. а) Множество M состоит из всех таких чисел t, для каждого из которых числа $t+\frac{1}{t}$ и t^2-4t – целые. Найдите сумму квадратов элементов множества M.

Ответ: 16.

Решение. Пусть $t+\frac{1}{t}=m$, $t^2-4t=n$, где m и n – целые числа. Тогда $t^2-mt+1=0$, откуда, вычитая второе равенство, получаем $(m-4)t=n+1$. Если $m\neq 4$, то из этого равенства следует, что t – рациональное число, т.е. $t=\frac{p}{q}$, где $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$. Равенство $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=m$ возможно только в случае $p=\pm q$, т. е. $t=\pm 1$. Если же $m=4$, то $n=-1$, что возможно при $t=2\pm\sqrt{3}$. Искомая сумма равна $1^2+(-1)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2=16$.

б) Множество M состоит из всех таких чисел t, для каждого из которых числа $t+\frac{1}{t}$ и t^2-7t – целые. Найдите сумму квадратов элементов множества M.

Ответ: 49.

в) Множество M состоит из всех таких чисел t, для каждого из которых числа $t+\frac{1}{t}$ и t^2-8t – целые. Найдите сумму квадратов элементов множества M.

Ответ: 64.

г) Множество M состоит из всех таких чисел t, для каждого из которых числа $t+\frac{1}{t}$ и t^2-9t – целые. Найдите сумму квадратов элементов множества M.

Ответ: 81.

д) Множество M состоит из всех таких чисел t, для каждого из которых числа $t+\frac{1}{t}$ и t^2-10t – целые. Найдите сумму квадратов элементов множества M.

Ответ: 100.

4. а) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D такая, что площадь треугольника BCD равна 4, а площадь треугольника ACD равна 1. В треугольнике ACD проведена высота DH. Найдите площадь четырёхугольника $BCHD$.
Ответ: 4,8.
Решение. Так как треугольники ACD и BCD имеют общую высоту, проведённую из вершины C, их площади относятся как $AD : BD$, поэтому $AD : BD = 1 : 4$. Треугольники ADH и ABC подобны, коэффициент подобия равен $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{5}$. Значит, площадь треугольника ADH составляет $\frac{1}{25}$ площади треугольника ABC. Следовательно, площадь $BCHD$ есть $\frac{24}{25}$ площади треугольника ABC, что равно $\frac{24}{5}$.

б) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D такая, что площадь треугольника BCD равна 3, а площадь треугольника ACD равна 1. В треугольнике ACD проведена высота DH. Найдите площадь четырёхугольника $BCHD$.
Ответ: 3,75.

в) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D такая, что площадь треугольника BCD равна 3, а площадь треугольника ACD равна 2. В треугольнике ACD проведена высота DH. Найдите площадь четырёхугольника $BCHD$.
Ответ: 4,2.

г) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D такая, что площадь треугольника BCD равна 1, а площадь треугольника ACD равна 4. В треугольнике ACD проведена высота DH. Найдите площадь четырёхугольника $BCHD$.
Ответ: 1,8.

д) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D такая, что площадь треугольника BCD равна 2, а площадь треугольника ACD равна 3. В треугольнике ACD проведена высота DH. Найдите площадь четырёхугольника $BCHD$.
Ответ: 3,2.

5. а) Сколько существует квадратных трехчленов вида $x^2 + ax + b$ с действительными корнями, у которых коэффициенты a, b – натуральные числа такие, что $ab = 2^{465}$?
Ответ: 310.
Решение. Числа a и b – степени двойки с целыми неотрицательными показателями, т.е. $a = 2^k$, $b = 2^{465-k}$. Тогда дискриминант $D = 2^{2k} - 2^{467-k} \geqslant 0$. Отсюда следует, что $2k \geqslant 467 - k$. Значит, $k \geqslant \frac{467}{3} = 155\frac{2}{3}$, а так как k – целое, то $k \geqslant 156$. При этом $k \leqslant 465$. Поэтому k может принимать 310 различных целых значений. Остаётся заметить, что каждому такому k соответствует ровно один искомый трёхчлен.

б) Сколько существует квадратных трехчленов вида $x^2 + ax + b$ с действительными корнями, у которых коэффициенты a, b – натуральные числа такие, что $ab = 2^{609}$?
Ответ: 406.

в) Сколько существует квадратных трехчленов вида $x^2 + ax + b$ с действительными корнями, у которых коэффициенты a, b – натуральные числа такие, что $ab = 2^{543}$?
Ответ: 362.

г) Сколько существует квадратных трехчленов вида $x^2 + ax + b$ с действительными корнями, у которых коэффициенты a, b – натуральные числа такие, что $ab = 2^{702}$?
Ответ: 468.

д) Сколько существует квадратных трехчленов вида $x^2 + ax + b$ с действительными корнями, у которых коэффициенты a, b – натуральные числа такие, что $ab = 2^{567}$?
Ответ: 378.

6. а) Точки E, F, G, H – середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно, а точки J, K – середины его диагоналей BD и AC соответсвенно. Прямая, проходящая через точку J параллельно AC, и прямая, проходящая через точку K параллельно BD, пересекаются в точке N. Найдите площадь четырёхугольника $AHNE$, если известно, что $3S(DGJH) + 5S(EJFB) = 11$ (через $S(\Phi)$ обозначена площадь фигуры Φ).

Ответ: 1,375.

Решение. Если α – угол между диагоналями четырёхугольника $ABCD$, а S – его площадь, то $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\alpha$. Далее заметим, что $S(AHNE) = S(AHE) + S(HNE) = S(AHE) + S(HKE) = S(AHKE) = \frac{1}{2}AK \cdot HE \sin\alpha = \frac{1}{4}AC \cdot HE \sin\alpha = \frac{1}{8}AC \cdot BD \sin\alpha = \frac{1}{4}S(ABCD)$.

б) Точки E, F, G, H – середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно, а точки J, K – середины его диагоналей BD и AC соответсвенно. Прямая, проходящая через точку J параллельно AC, и прямая, проходящая через точку K параллельно BD, пересекаются в точке N. Найдите площадь четырёхугольника $AHNE$, если известно, что $4S(DGJH) - S(EJFB) = 33$ (через $S(\Phi)$ обозначена площадь фигуры Φ).

Ответ: 11.

в) Точки E, F, G, H – середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно, а точки J, K – середины его диагоналей BD и AC соответсвенно. Прямая, проходящая через точку J параллельно AC, и прямая, проходящая через точку K параллельно BD, пересекаются в точке N. Найдите площадь четырёхугольника $AHNE$, если известно, что $9S(DGJH) + 13S(EJFB) = 55$ (через $S(\Phi)$ обозначена площадь фигуры Φ).

Ответ: 2,5.

г) Точки E, F, G, H – середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно, а точки J, K – середины его диагоналей BD и AC соответсвенно. Прямая, проходящая через точку J параллельно AC, и прямая, проходящая через точку K параллельно BD, пересекаются в точке N. Найдите площадь четырёхугольника $AHNE$, если известно, что $13S(DGJH) - 7S(EJFB) = 21$ (через $S(\Phi)$ обозначена площадь фигуры Φ).

Ответ: 3,5.

д) Точки E, F, G, H – середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно, а точки J, K – середины его диагоналей BD и AC соответсвенно. Прямая, проходящая через точку J параллельно AC, и прямая, проходящая через точку K параллельно BD, пересекаются в точке N. Найдите площадь четырёхугольника $AHNE$, если известно, что $S(DGJH) + 23S(EJFB) = 42$ (через $S(\Phi)$ обозначена площадь фигуры Φ).

Ответ: 1,75.

7. а) У Васи есть пять карточек, на которых написаны цифры 9, 7, 3, 1, 0 (на каждой карточке написана ровно одна цифра). Он составил из них всевозможные пятизначные числа, а потом нашел среднее арифметическое этих чисел. Какой результат он получил? Ответ округлите до целого числа.

Ответ: 54 166.

Решение. Разрешим цифре 0 быть в старшем разряде пятизначного числа. Найдём сумму всех 5! пятизначных чисел, которые можно составить из карточек, включая «дополнительные» (с цифрой 0 в старшем разряде). Каждая из цифр в фиксированном разряде встречается 4! раз. В разряде единиц это даст $4! \cdot (0 + 1 + 3 + 7 + 9) = 480$. В разряде десятков получится в $10 \cdot 480$, и так далее. Поэтому сумма равна $480 \cdot 11\,111$.

Теперь найдём сумму «дополнительных» пятизначных чисел. Аналогично, она равна $3! \cdot (1+3+7+9) \cdot 1\,111 = 120 \cdot 1\,111$. Значит, сумма всех составленных пятизначных чисел равна $480 \cdot 11\,111 - 120 \cdot 1\,111 = 5\,199\,960$. Разделив на количество составленных пятизначных чисел $(5! - 4! = 96)$, получаем, что среднее арифметическое равно 54 166,25.

б) У Васи есть пять карточек, на которых написаны цифры 7, 5, 4, 3, 0 (на каждой карточке написана ровно одна цифра). Он составил из них всевозможные пятизначные числа, а потом нашел среднее арифметическое этих чисел. Какой результат он получил? Ответ округлите до целого числа.

Ответ: 51 458.

в) У Васи есть пять карточек, на которых написаны цифры 8, 6, 5, 3, 0 (на каждой карточке написана ровно одна цифра). Он составил из них всевозможные пятизначные числа, а потом нашел среднее арифметическое этих чисел. Какой результат он получил? Ответ округлите до целого числа.

Ответ: 59 583.

г) У Васи есть пять карточек, на которых написаны цифры 6, 5, 4, 2, 0 (на каждой карточке написана ровно одна цифра). Он составил из них всевозможные пятизначные числа, а потом нашел среднее арифметическое этих чисел. Какой результат он получил? Ответ округлите до целого числа.

Ответ: 46 041.

д) У Васи есть пять карточек, на которых написаны цифры 8, 7, 2, 1, 0 (на каждой карточке написана ровно одна цифра). Он составил из них всевозможные пятизначные числа, а потом нашел среднее арифметическое этих чисел. Какой результат он получил? Ответ округлите до целого числа.

Ответ: 48 750.

8. а) В каждую клетку доски 21×13 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любых двух соседних по стороне клетках стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?
Ответ: 136.
Решение. Выделим угловую клетку, а остальные разобьём на 136 пар соседних клеток. В каждой паре должно стоять не менее одной чёрной шашки. Значит, всего чёрных шашек не менее 136.
Рассмотрим шахматную раскраску доски (пусть угловые клетки белые). Чёрные шашки можно поставить на чёрные клетки (их будет ровно 136), а белые шашки – на белые клетки. Тогда в любых двух соседних клетках будет чёрная шашка.

б) В каждую клетку доски 27×25 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любых двух соседних по стороне клетках стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?
Ответ: 337.

в) В каждую клетку доски 33×17 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любых двух соседних по стороне клетках стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?
Ответ: 280.

г) В каждую клетку доски 29×19 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любых двух соседних по стороне клетках стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?
Ответ: 275.

д) В каждую клетку доски 23×35 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любых двух соседних по стороне клетках стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?
Ответ: 402.

9. а) Пусть для некоторых чисел x, y, z выполняется равенство $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=1{,}5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$.
Ответ: 2,25.
Решение. Обозначим данную сумму и искомую сумму через A и B соответственно. Возведя сумму A в квадрат, получаем $A^2=B+2\left(\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}+\frac{1}{(z-x)(x-y)}\right)$. Выражение в скобках равно нулю, так как после приведения к общему знаменателю оно принимает вид $\frac{(z-x)+(x-y)+(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$. Значит, при любых допустимых значениях x, y, z выполняется равенство $A^2=B=2{,}25$.

б) Пусть для некоторых чисел x, y, z выполняется равенство $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=2{,}5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$.
Ответ: 6,25.

в) Пусть для некоторых чисел x, y, z выполняется равенство $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=3{,}5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$.
Ответ: 12,25.

г) Пусть для некоторых чисел x, y, z выполняется равенство $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=4{,}5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$.
Ответ: 20,25.

д) Пусть для некоторых чисел x, y, z выполняется равенство $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=5{,}5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$.
Ответ: 30,25.

10. а) За круглый стол сели 50 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 25.

Решение. У двух мудрецов, сидящих рядом, числа на карточках не могут быть одновременно положительными (если бы нашлась пара рядом сидящих мудрецов, у которых на карточках положительные числа, то у мудреца справа от них число было бы больше, чем каждое из этих двух чисел, у следующего – ещё больше и т.д., что в конечном счёте привело бы к противоречию, так как мудрецы сидят по кругу). Разбив мудрецов на пары, получаем, что карточек с положительными числами не больше половины, то есть не больше 25.

25 карточек с положительными числами может быть, например, если у мудрецов будут чередоваться карточки с числами 2 и -2.

б) За круглый стол сели 66 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 33.

в) За круглый стол сели 38 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 19.

г) За круглый стол сели 60 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 30.

д) За круглый стол сели 78 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 39.