Отборочный этап 2023/24

Задачи олимпиады: Математика 11 класс (2 попытка)

Задача 01

Задача 1 #1 ID 2742

> Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Известно, что $b_2 + b_4 = 10$, $b_4^2 - b_2^2 = 60$. Чему равен пятый член прогрессии?
>
>

Ответ:

Задача 1 #2 ID 2743

> Дана убывающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Известно, что $b_3 - b_5 = 12$, $b_3^2 - b_5^2 = 240$. Чему равен второй член прогрессии?
>
>

Ответ:

Задача 1 #3 ID 2744

> Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Известно, что $b_2 + b_4 = 30$, $b_4^2 - b_2^2 = 540$. Чему равен шестой член прогрессии?
>
>

Ответ:

Задача 1 #4 ID 2745

> Дана убывающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Известно, что $b_3 - b_5 = 18$, $b_3^2 - b_5^2 = 540$. Чему равен шестой член прогрессии?
>
>

Ответ:

Задача 1 #5 ID 2746

> Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Известно, что $b_3 + b_5 = 20$, $b_5^2 - b_3^2 = 240$. Чему равен шестой член прогрессии?
>
> 999976292746

Ответ:

Задача 02

Задача 2 #6 ID 2747

> Найдите вероятность, что у случайно выбранного восьмизначного нечётного числа все цифры являются нечётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.
>
> 999976292747

Ответ:

Задача 2 #7 ID 2748

> Найдите вероятность, что у случайно выбранного семизначного чётного числа все цифры являются чётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.
>
> 999976292748

Ответ:

Задача 2 #8 ID 2749

> Найдите вероятность, что у случайно выбранного семизначного нечётного числа все цифры являются нечётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.
>
> 999976292749

Ответ:

Задача 2 #9 ID 2750

Найдите вероятность, что у случайно выбранного восьмизначного чётного числа все цифры являются чётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

999976292750

Ответ:

Задача 2 #10 ID 2751

Найдите вероятность, что у случайно выбранного шестизначного чётного числа все цифры являются чётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

999976292751

Ответ:

Задача 03

Задача 3 #11 ID 2752

Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$\sin^2 x, \qquad \sin^2 y, \qquad \sin^2 x + \cos^2 y + 2 - \cos^2 2x, \qquad 2 + \sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{x-y}{\pi}$.

999976292752

Ответ:

Задача 3 #12 ID 2753

Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$\cos^2 x, \qquad \cos^2 y, \qquad \cos^2 x + \sin^2 y + 2 - \cos^2 2x, \qquad 2 + \sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{x-y}{\pi}$.

999976292753

Ответ:

Задача 3 #13 ID 2754

Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$2\sin^2 x, \qquad 3\sin^2 y, \qquad 2\sin^2 x + 3\cos^2 y + 6 - 3\cos^2 2x, \qquad 6 + 3\sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{x+y}{\pi}$.

999976292754

Ответ:

Задача 3 #14 ID 2755

Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$2\cos^2 x, \qquad 3\cos^2 y, \qquad 2\cos^2 x + 3\sin^2 y + 6 - 3\cos^2 2x, \qquad 6 + 3\sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{2x+y}{\pi}$.

999976292755

Ответ:

Задача 3 #15 ID 2756

Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$\sin^2 x, \qquad 2\sin^2 y, \qquad \sin^2 x + 2\cos^2 y + 4 - 2\cos^2 2x, \qquad 4 + 2\sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{x-2y}{\pi}$.

999976292756

Ответ:

Задача 04

Задача 4 #16 ID 2757

Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77,...) Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна $10\,278$?

999976292757

Ответ:

Задача 4 #17 ID 2758

Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77,...) Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна $15\,224$?

999976292758

Ответ:

Задача 4 #18 ID 2759

Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77,...) Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна $11\,709$?

999976292759

Ответ:

Задача 4 #19 ID 2760

Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77,...) Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна $17\,127$?

999976292760

Ответ:

Задача 4 #20 ID 2761

Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77,...) Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна $10\,732$?

999976292761

Ответ:

Задача 05

Задача 5 #21 ID 2762

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1, B_1B и BC отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 2:5$, $B_1Q : B_1B = 1:4$ и $BR : BC = 3:5$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC.

999976292762

Ответ:

Задача 5 #22 ID 2763

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1, B_1B и BC отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 2:7$, $B_1Q : B_1B = 3:5$ и $BR : BC = 2:7$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC.

999976292763

Ответ:

Задача 5 #23 ID 2764

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1, B_1B и BC отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 1:4$, $B_1Q : B_1B = 4:5$ и $BR : BC = 1:8$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC.

999976292764

Ответ:

Задача 5 #24 ID 2765

> Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1, B_1B и BC отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 5 : 12$, $B_1Q : B_1B = 1 : 5$ и $BR : BC = 2 : 3$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC.
>
> 999976292765

Ответ:

Задача 5 #25 ID 2766

> Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1, B_1B и BC отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 1 : 6$, $B_1Q : B_1B = 3 : 5$ и $BR : BC = 4 : 9$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC.
>
> 999976292766

Ответ:

Задача 06

Задача 6 #26 ID 2787

> Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 3x^2 - 2x = m$ и $x^3 + 4x^2 - 9x = k$ имеют два общих корня?
>
> 999976292787

Ответ:

Задача 6 #27 ID 2788

> Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 4x^2 - 2x = m$ и $x^3 + x^2 - 7x = k$ имеют два общих корня?
>
> 999976292788

Ответ:

Задача 6 #28 ID 2789

> Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N=m+k$, а уравнения $x^3-3x^2-7x=m$ и $x^3+2x^2-2x=k$ имеют два общих корня?
>
> 999976292789

Ответ:

Задача 6 #29 ID 2790

> Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N=m+k$, а уравнения $x^3-x^2-7x=m$ и $x^3+2x^2-4x=k$ имеют два общих корня?
>
> 999976292790

Ответ:

Задача 6 #30 ID 2791

> Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N=m+k$, а уравнения $x^3-2x^2-7x=m$ и $x^3+3x^2-2x=k$ имеют два общих корня?
>
> 999976292791

Ответ:

Задача 07

Задача 7 #31 ID 2772

> В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB=48$, $BC=60$, $CD=24$, $AD=12$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC - в точке F. Найдите квадрат длины отрезка EF.
>
> 999976292772

Ответ:

Задача 7 #32 ID 2773

В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB = 48$, $BC = 36$, $CD = 12$, $AD = 12$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC - в точке F. Найдите квадрат длины отрезка EF.

Ответ:

Задача 7 #33 ID 2774

В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB = 28$, $BC = 35$, $CD = 14$, $AD = 14$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC - в точке F. Найдите квадрат длины отрезка EF.

Ответ:

Задача 7 #34 ID 2775

В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB = 240$, $BC = 144$, $CD = 120$, $AD = 48$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC - в точке F. Найдите квадрат длины отрезка EF.

Ответ:

Задача 7 #35 ID 2776

В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB = 30$, $BC = 24$, $CD = 15$, $AD = 12$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC - в точке F. Найдите квадрат длины отрезка EF.

Ответ:

Задача 08

Задача 8 #36 ID 2777

В каждую клетку доски 26×25 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

Ответ:

Задача 8 #37 ID 2778

В каждую клетку доски 28×37 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

Ответ:

Задача 8 #38 ID 2779

В каждую клетку доски 36×27 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

Ответ:

Задача 8 #39 ID 2780

В каждую клетку доски 40×19 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

Ответ:

Задача 8 #40 ID 2781

> В каждую клетку доски 22×35 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?
>
> 999976292781

Ответ:

Задача 09

Задача 9 #41 ID 2767

> За круглый стол сели 95 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?
>
> 999976292767

Ответ:

Задача 9 #42 ID 2768

> За круглый стол сели 89 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?
>
> 999976292768

Ответ:

Задача 9 #43 ID 2769

За круглый стол сели 113 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ:

Задача 9 #44 ID 2770

За круглый стол сели 125 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ:

Задача 9 #45 ID 2771

За круглый стол сели 146 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ:

Задача 10

Задача 10 #46 ID 2782

> Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 4, вторым - число 6. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b-a$. Какое число он запишет 1501-м?
>
>

Ответ:

Задача 10 #47 ID 2783

> Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 6, вторым - число 9. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b-a$. Какое число он запишет 2601-м?
>
>

Ответ:

Задача 10 #48 ID 2784

> Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 9, вторым - число 14. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b-a$. Какое число он запишет 3701-м?
>
>

Ответ:

Задача 10 #49 ID 2785

> Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 14, вторым - число 20. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b-a$. Какое число он запишет 4801-м?
>
>

Ответ:

Задача 10 #50 ID 2786

Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 27, вторым - число 35. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b-a$. Какое число он запишет 5901-м?

Ответ: