Отборочный этап 2023/24

Задачи олимпиады: Математика 11 класс (3 попытка)

Задача 01

Задача 1 #1 ID 2792

Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение $S_{3n} - S_n = 12n^2 + n$. Найдите восьмой член прогрессии.

999976292792

Ответ:

Задача 1 #2 ID 2793

Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение $S_{4n} - S_{2n} = -12n^2 + 2n$. Найдите десятый член прогрессии.

999976292793

Ответ:

Задача 1 #3 ID 2794

Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение $S_{3n} - S_n = 4n^2 + 5n$. Найдите четвёртый член прогрессии.

999976292794

Ответ:

Задача 1 #4 ID 2795

> Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение $S_{4n} - S_{2n} = 6n^2 + 3n$. Найдите восьмой член прогрессии.
>
>

Ответ:

Задача 1 #5 ID 2796

> Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение $S_{3n} - S_n = -8n^2 + 10n$. Найдите седьмой член прогрессии.
>
>

Ответ:

Задача 02

Задача 2 #6 ID 2797

> Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{3 - \frac{a^2}{25}}\sin x + \frac{a}{10}\cos x = \sqrt{2}$ имеет хотя бы одно решение.
>
>

Ответ:

Задача 2 #7 ID 2798

> Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{2 - \frac{a^2}{50}}\sin x + \frac{a}{10}\cos x = \frac{6}{5}$ имеет хотя бы одно решение.
>
>

Ответ:

Задача 2 #8 ID 2799

> Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{11-a^2}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$ имеет хотя бы одно решение.
>
> 999976292799

Ответ:

Задача 2 #9 ID 2800

> Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\dfrac{a}{9}\sin x+\sqrt{6-\dfrac{a^2}{27}}\cos x=2$ имеет хотя бы одно решение.
>
> 999976292800

Ответ:

Задача 2 #10 ID 2801

> Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{\dfrac{4}{3}-\dfrac{2a^2}{75}}\sin x+\dfrac{2a}{15}\cos x=1$ имеет хотя бы одно решение.
>
> 999976292801

Ответ:

Задача 03

Задача 3 #11 ID 2802

> В кондитерской продаётся 8 видов пирожных, 8 видов конфет, 8 видов булочек и 8 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?
>
> 999976292802

Ответ:

Задача 3 #12 ID 2803

В кондитерской продаётся 9 видов пирожных, 9 видов конфет, 9 видов булочек и 9 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?

999976292803

Ответ:

Задача 3 #13 ID 2804

В кондитерской продаётся 10 видов пирожных, 10 видов конфет, 10 видов булочек и 10 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?

999976292804

Ответ:

Задача 3 #14 ID 2805

В кондитерской продаётся 11 видов пирожных, 11 видов конфет, 11 видов булочек и 11 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?

999976292805

Ответ:

Задача 3 #15 ID 2806

В кондитерской продаётся 12 видов пирожных, 12 видов конфет, 12 видов булочек и 12 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?

999976292806

Ответ:

Задача 04

Задача 4 #16 ID 2807

> Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна $3\,997$. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано $3\,811$, то Вася запишет $1\,183$). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?
>
> 999976292807

Ответ:

Задача 4 #17 ID 2808

> Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна $4\,778$. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано $3\,811$, то Вася запишет $1\,183$). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?
>
> 999976292808

Ответ:

Задача 4 #18 ID 2809

> Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна $5\,786$. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано $3\,811$, то Вася запишет $1\,183$). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?
>
> 999976292809

Ответ:

Задача 4 #19 ID 2810

> Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна $3\,758$. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано $3\,811$, то Вася запишет $1\,183$). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?
>
> 999976292810

Ответ:

Задача 4 #20 ID 2811

> Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна $5\,895$. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано $3\,811$, то Вася запишет $1\,183$). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?
>
> 999976292811

Ответ:

Задача 05

Задача 5 #21 ID 2812

> В магазине 5 килограммов моркови стоят столько же, сколько 4 килограмма свёклы и 1 килограмм картофеля. Известно, что если купить по 6 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 2 килограмма моркови и 3 килограмма картофеля, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 19 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 10 рублей больше килограмма самого дешёвого.
>
> 999976292812

Ответ:

Задача 5 #22 ID 2813

> В магазине 3 килограмма моркови стоят столько же, сколько 2 килограмма свёклы и 1 килограмм картофеля. Известно, что если купить по 14 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 1 килограмм моркови и 21 килограмм картофеля, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 56 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 9 рублей больше килограмма самого дешёвого.
>
> 999976292813

Ответ:

Задача 5 #23 ID 2815

В магазине 4 килограмма моркови стоят столько же, сколько 3 килограмма свёклы и 1 килограмм картофеля. Известно, что если купить по 6 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 2 килограмма моркови и 5 килограммов картофеля, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 16 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 16 рублей больше килограмма самого дешёвого.

999976292815

Ответ:

Задача 5 #24 ID 2816

В магазине 8 килограммов моркови стоят столько же, сколько 1 килограмм свёклы и 7 килограммов картофеля. Известно, что если купить по 5 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 2 килограмма моркови и 3 килограмма картофеля, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 16 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 8 рублей больше килограмма самого дешёвого.

999976292816

Ответ:

Задача 5 #25 ID 2814

В магазине 6 килограммов моркови стоят столько же, сколько 5 килограммов свёклы и 1 килограмм картофеля. Известно, что если купить по 6 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 1 килограмм моркови и 16 килограммов свёклы, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 30 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 18 рублей больше килограмма самого дешёвого.

999976292814

Ответ:

Задача 06

Задача 6 #26 ID 2817

Точка K расположена вне окружности Ω с центром O, точка M - внутри Ω, а точка P - на Ω. Отрезок KM пересекает Ω в точке L, а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 2$, $LM = 5$, $KL = 9$, $KP = 12$.

999976292817

Ответ:

Задача 6 #27 ID 2818

Точка K расположена вне окружности Ω с центром O, точка M - внутри Ω, а точка P - на Ω. Отрезок KM пересекает Ω в точке L, а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 9$, $LM = 2$, $KL = 9$, $KP = 15$.

999976292818

Ответ:

Задача 6 #28 ID 2819

Точка K расположена вне окружности Ω с центром O, точка M - внутри Ω, а точка P - на Ω. Отрезок KM пересекает Ω в точке L, а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 6$, $LM = 10$, $KL = 12$, $KP = 18$.

999976292819

Ответ:

Задача 6 #29 ID 2820

Точка K расположена вне окружности Ω с центром O, точка M - внутри Ω, а точка P - на Ω. Отрезок KM пересекает Ω в точке L, а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 8$, $LM = 5$, $KL = 3$, $KP = 9$.

999976292820

Ответ:

Задача 6 #30 ID 2821

> Точка K расположена вне окружности Ω с центром O, точка M - внутри Ω, а точка P - на Ω. Отрезок KM пересекает Ω в точке L, а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 5$, $LM = 14$, $KL = 7$, $KP = 14$.
>
> 999976292821

Ответ:

Задача 07

Задача 7 #31 ID 2822

> У Пети есть 10 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 15. Какое наименьшее значение может принимать N?
>
> 999976292822

Ответ:

Задача 7 #32 ID 2823

> У Пети есть 12 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 17. Какое наименьшее значение может принимать N?
>
> 999976292823

Ответ:

Задача 7 #33 ID 2824

> У Пети есть 14 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 19. Какое наименьшее значение может принимать N?
>
> 999976292824

Ответ:

Задача 7 #34 ID 2825

> У Пети есть 16 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 21. Какое наименьшее значение может принимать N?
>
> 999976292825

Ответ:

Задача 7 #35 ID 2826

> У Пети есть 18 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 23. Какое наименьшее значение может принимать N?
>
> 999976292826

Ответ:

Задача 08

Задача 8 #36 ID 2827

> В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB, BCD и ACD прямые. На рёбрах CD, AC и BD отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $\dfrac{DP}{DC} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{DR}{DB} = \dfrac{1}{2}$. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR, если известно, что $AC = 3$, $BC = 4$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\dfrac{\pi}{6}$.
>
> 999976292827

Ответ:

Задача 8 #37 ID 2828

В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB, BCD и ACD прямые. На рёбрах CD, AC и BD отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $\dfrac{DP}{DC} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{DR}{DB} = \dfrac{2}{3}$. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR, если известно, что $AC = 4$, $BC = 3$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\arcsin\dfrac{2}{3}$.

999976292828

Ответ:

Задача 8 #38 ID 2829

В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB, BCD и ACD прямые. На рёбрах CD, AC и BD отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $\dfrac{DP}{DC} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{2}{5}$, $\dfrac{DR}{DB} = \dfrac{1}{2}$. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR, если известно, что $AC = 5$, $BC = 12$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\dfrac{\pi}{6}$.

999976292829

Ответ:

Задача 8 #39 ID 2830

В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB, BCD и ACD прямые. На рёбрах CD, AC и BD отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $\dfrac{DP}{DC} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{DR}{DB} = \dfrac{4}{5}$. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR, если известно, что $AC = 12$, $BC = 5$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\arcsin\dfrac{4}{5}$.

999976292830

Ответ:

Задача 8 #40 ID 2831

В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB, BCD и ACD прямые. На рёбрах CD, AC и BD отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $\frac{DP}{DC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{DR}{DB} = \frac{5}{8}$. Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR, если известно, что $AC = 6$, $BC = 8$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\arcsin\frac{5}{8}$.

999976292831

Ответ:

Задача 09

Задача 9 #41 ID 2832

За круглым столом сидят 15 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие - неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 5 волшебников сказали: «Теперь у меня нет волшебной палочки», а остальные 10 волшебников сказали: «У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка». Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?

999976292832

Ответ:

Задача 9 #42 ID 2833

За круглым столом сидят 20 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие - неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 5 волшебников сказали: «Теперь у меня нет волшебной палочки», а остальные 15 волшебников сказали: «У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка». Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?

999976292833

Ответ:

Задача 9 #43 ID 2834

> За круглым столом сидят 28 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие - неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 3 волшебника сказали: «Теперь у меня нет волшебной палочки», а остальные 25 волшебников сказали: «У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка». Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?
>
>

Ответ:

Задача 9 #44 ID 2835

> За круглым столом сидят 17 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие - неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 3 волшебника сказали: «Теперь у меня нет волшебной палочки», а остальные 14 волшебников сказали: «У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка». Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?
>
>

Ответ:

Задача 9 #45 ID 2836

> За круглым столом сидят 19 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие - неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 5 волшебников сказали: «Теперь у меня нет волшебной палочки», а остальные 14 волшебников сказали: «У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка». Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?
>
>

Ответ:

Задача 10

Задача 10 #46 ID 2837

На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2 + BQ^2 = PQ^2 = \sqrt{578}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

999976292837

Ответ:

Задача 10 #47 ID 2838

На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2 + BQ^2 = PQ^2 = \sqrt{1\,058}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

999976292838

Задача 10 #48 ID 2839

На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2 + BQ^2 = PQ^2 = \sqrt{338}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

999976292839

Задача 10 #49 ID 2840

На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2 + BQ^2 = PQ^2 = \sqrt{722}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

999976292840

Ответ:

Задача 10 #50 ID 2841

На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2 + BQ^2 = PQ^2 = \sqrt{882}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

999976292841

Ответ: