

11 класс — день 1

1. а) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P . Известно, что $AP = 1$, $BP : PC = 2$, а высота BH треугольника ABC равна 0,5. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP .

Ответ: 3.

- б) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P . Известно, что $AP = 2$, $BP : PC = 0,5$, а высота BH треугольника ABC равна 3. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP .

Ответ: 1 или -1 .

- в) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P . Известно, что $AP = \sqrt{2}$, $BP : PC = 3$, а высота BH треугольника ABC равна 2. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP .

Ответ: 2.

- г) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P . Известно, что $AP = 4$, $BP : PC = 1,5$, а высота BH треугольника ABC равна 5. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP .

Ответ: 4.

Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P . Известно, что $AP = a$, $BP : PC = k$, а высота BH треугольника ABC равна h . Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP .

Ответ: $\frac{a^2(k+1)}{2h}$.

Решение. Так как точки серединного перпендикуляра к отрезку равноудалены от концов этого отрезка, $CP = AP = a$. Следовательно, $BP = k \cdot CP = ak$. Обозначим $\angle ACP = \gamma$. Из прямоугольного треугольника BCH следует, что $\sin \gamma = \frac{BH}{BC} = \frac{h}{ak+a}$. Но тогда по теореме синусов радиус окружности, описанной около треугольника ACP , находится однозначно:

$$R = \frac{AP}{2 \sin \gamma} = a : \frac{2h}{a(k+1)} = \frac{a^2(k+1)}{2h}.$$

Если конструкция не существует, принимаются также ответы “ -1 ” или “нет решений”.

2. а) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $7p + q^5 = 17\,528$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 110.

Решение. Так как $q^5 = 17\,528 - 7p = 7(2\,504 - p)$, число q^5 должно делиться на 7. Но ввиду того, что оно простое, возможно только, что $q = 7$. Тогда $p = 103$. Таким образом, сумма $p + q$ определяется однозначно, и она равна 110.

- б) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $7p + q^5 = 17\,556$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 114.

- в) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $11p + q^4 = 15\,752$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 112.

- г) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $11p + q^4 = 15\,774$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 114.

3. а) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила $\frac{13}{100}$ -ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала Ване. Затем Ваня откусил $\frac{13}{100}$ -ую часть от того, что осталось, и отдал остальное папе. После этого папа откусил $\frac{13}{100}$ -ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила $\frac{13}{100}$ -ую часть, отдала остаток Ване и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем Ваня, съели мама и папа вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,006.

Решение. Пусть первый раз мама откусила x от шоколадки. Так как Ване достаётся $\frac{12}{100}$ от исходной шоколадки, он в первый раз откусывает $\frac{12x}{100}$. Аналогично, папа откусывает $\frac{144x}{100}$. Таким образом, первые куски шоколада, съеденные мамой, Ваней и папой, относятся как

$$x : \frac{12x}{100} : \frac{144x}{100} = 100 : 12 : 144.$$

Отношения всех последующих кусков точно такие же, поэтому общие количества съеденного шоколада находятся в таком же отношении. Значит, мама и папа съели в $\frac{100+144}{12}$ раз больше. Округляя, получаем 2,006.

- б) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила $\frac{7}{100}$ -ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала папе. Затем папа откусил $\frac{7}{100}$ -ую часть от того, что осталось, и отдал остальное Ване. После этого Ваня откусил $\frac{7}{100}$ -ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила $\frac{7}{100}$ -ую часть, отдала остаток папе и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем папа, съели Ваня и мама вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,024.

- в) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 12-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала Ване. Затем Ваня откусил 12-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное папе. После этого папа откусил 12-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 12-ую часть, отдала остаток Ване и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем папа, съели мама и Ваня вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,281.

- г) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 14-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала папе. Затем папа откусил 14-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное Ване. После этого Ваня откусил 14-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 14-ую часть, отдала остаток папе и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем мама, съели Ваня и папа вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 1,791.

4. а) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 302 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{100}^3 + 2 \cdot C_{101}^3 + 100 \cdot (100 + 1)^2 = 1\,515\,100$.

Решение. Найдем количество способов выбрать нужные три числа из натуральных чисел от 1 до $3n + 2$. Все способы разобьём на два класса: к первому отнесём все те тройки, в которых остатки всех трёх чисел от деления на 3 одинаковы, а ко второму — тройки, в которых все три остатка от деления на 3 встречаются по одному разу. Общее число способов из первого класса равно $C_n^3 + 2 \cdot C_{n+1}^3$, поскольку чисел, кратных 3 — всего n , а чисел, имеющих остатки 1 и 2 при делении на 3 — по $n + 1$ штук. Число способов из второго класса, соответственно, равно $n \cdot (n + 1)^2$. Получаем ответ $C_n^3 + 2 \cdot C_{n+1}^3 + n \cdot (n + 1)^2$.

- б) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 272 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{90}^3 + 2 \cdot C_{91}^3 + 90 \cdot (90 + 1)^2 = 1\,105\,740$.

- в) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 242 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{80}^3 + 2 \cdot C_{81}^3 + 80 \cdot (80 + 1)^2 = 777\,680$.

- г) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 212 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{70}^3 + 2 \cdot C_{71}^3 + 70 \cdot (70 + 1)^2 = 521\,920$.

5. а) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P . Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 3$, $EP = 4$.

Ответ: 5,76.

- б) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P . Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 5$, $EP = 10$.

Ответ: 20.

- в) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P . Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 12$, $EP = 6$.

Ответ: 28,8.

- г) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P . Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 4$, $EP = 12$.

Ответ: 14,4.

Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P . Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = b$, $EP = a$.

Ответ: $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Решение. Углы BMP и BKP — прямые, так как вписаны в окружность и опираются на её диаметр BP . Значит, в четырёхугольнике $KBMP$ три прямых угла, и он прямоугольник. Диагональ BP этого четырёхугольника является биссектрисой его угла B , поэтому он является квадратом. Заметим также, что $MT \parallel AB$, $EK \parallel BC$.

Пусть BS — биссектриса треугольника ABC . Так как биссектриса делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам,

$$\frac{BP}{PS} = \frac{AB}{AS} \quad (\text{свойство биссектрисы для } \triangle ABS), \quad (4)$$

$$\frac{AS}{SC} = \frac{AB}{BC} \iff \frac{AS}{AC - AS} = \frac{AB}{BC} \iff AS = \frac{AB \cdot AC}{AB + BC}. \quad (5)$$

Подставляя выражение для AS из (5) в (4), получаем $\frac{BP}{PS} = \frac{AB+BC}{AC}$. Поскольку треугольники ABC и TPE подобны, отсюда следует, что $\frac{AB+BC}{AC} = \frac{PT+PE}{ET} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Известно, что если стороны треугольника равны x и y , а угол между ними равен α , его биссектриса, проведённая из вершины этого угла, определяется формулой $l = \frac{2xy \cos \frac{\alpha}{2}}{x+y}$. Следовательно, $PS = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Но тогда $BP = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Значит, площадь квадрата $KBMP$ есть $S = \frac{1}{2}BP^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

6. а) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько ирисок, то

- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, удвоится;
- вероятность того, что он вытянет ириску, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число ирисок может быть в изначальном подарке, если известно, что шоколадных конфет в нём 10, а всех конфет N — не менее 40?

Ответ: 26.

Решение. Пусть n , m , k — количества карамелек, шоколадных конфет и ирисок в изначальном новогоднем подарке соответственно. Обозначим за x то количество ирисок, которое Серёжа должен съесть, чтобы выполнялись условия задачи. Тогда из первого условия получаем равенство

$$2\frac{m}{N} = \frac{m}{N-x} \iff N = 2x.$$

Из второго условия следует, что

$$\frac{k-x}{N-x} = \frac{n}{N} \iff n = 2(k-x).$$

Так как шоколадных конфет 10, то получаем, что сумма всех конфет первоначального набора равна $2x = 2(k-x) + 10 + k$, поэтому $4x - 3k = 10$. У получившегося диофантова уравнения решениями являются пары $x = 4 + 3t$, $k = 2 + 4t$, где t — произвольное целое число. Так как $N = 2x = 2(4 + 3t) \geq 40$, то $t \geq 6$, поэтому минимальное количество ирисок равно $k = 2 + 4t = 26$. Остаётся заметить, что при $n = 8$, $m = 10$, $k = 26$, $N = 44$, $x = 22$ условие задачи выполнено.

- б) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько шоколадных конфет, то

- вероятность того, что он вытянет ириску, удвоится;
- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число шоколадных конфет может быть в изначальном подарке, если известно, что ирисок в нём 11, а всех конфет N — не менее 50?

Ответ: 31.

- в) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько ирисок, то

- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, утроится;
- вероятность того, что он вытянет ириску, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число ирисок может быть в изначальном подарке, если известно, что шоколадных конфет в нём 15, а всех конфет N — не менее 60?

Ответ: 48.

- г) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько шоколадных конфет, то

- вероятность того, что он вытянет ириску, утроится;
- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число шоколадных конфет может быть в изначальном подарке, если известно, что ирисок в нём 12, а всех конфет N — не менее 57?

Ответ: 42.

7. а) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C , причём $AB : BC = 8$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A , Винни-Пух – в пункте B , а Кролик – в пункте C . Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C , Винни-Пух – из B в C , а Кролик – из C в A . Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C .)

Ответ: 1,125.

Решение. Зададим на прямой AC координаты так, чтобы пункт A был расположен в начале координат, B — в точке $8x_0$, а C — в точке с координатой $9x_0$. Пусть Π , B , K и T — числа, обратные скоростям Пятачка, Винни-Пуха, Кролика и Тигры соответственно. Тогда законы изменения координаты Пятачка и Тигры в зависимости от времени τ имеют вид $\tau = \Pi x$ и $\tau = Tx$ соответственно, а Винни-Пуха и Кролика, соответственно, $\tau = B(x - 8x_0)$ и $\tau = -K(x - 9x_0)$. Поскольку у домика Совы (координата x_1) встретились как Пятачок и Винни-Пух, так и Кролик и Тигра,

$$\begin{cases} \Pi x_1 = B(x_1 - 8x_0), \\ Tx_1 = -K(x_1 - 9x_0). \end{cases}$$

Отсюда $\frac{B-\Pi}{T+K} = \frac{8B}{9K}$. Аналогично, поскольку встречи Тигры и Винни-Пуха, а также Пятачка и Кролика произошли у дупла с мёдом (координата x_2),

$$\begin{cases} \Pi x_2 = -K(x_2 - 9x_0), \\ Tx_2 = B(x_2 - 8x_0). \end{cases}$$

Из этой системы $\frac{B-T}{K+\Pi} = \frac{8B}{9K}$. Из полученных выше соотношений

$$\frac{B - \Pi}{T + K} = \frac{8B}{9K}, \quad \frac{B - T}{K + \Pi} = \frac{8B}{9K} \quad (6)$$

следует, что $\frac{B-\Pi}{T+K} = \frac{B-T}{K+\Pi}$. Перемножая и приводя подобные слагаемые, имеем:

$$B\Pi - PK - \Pi^2 = BT - KT - T^2 \Leftrightarrow (\Pi - T)(B - \Pi - K - T) = 0.$$

По условию скорости Пятачка и Тигры различны, поэтому $B = \Pi + K + T$. Но тогда соотношения (6) принимают вид $1 = \frac{8B}{9K}$, а это значит, что отношение скорости Кролика к скорости Винни Пуха равно $\frac{B}{K} = \frac{9}{8} = 1,125$.

- б) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C , причём $AB : BC = 0,5$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A , Винни-Пух – в пункте B , а Кролик – в пункте C . Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C , Винни-Пух – из B в C , а Кролик – из C в A . Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;

- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C .)

Ответ: 3.

- в) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C , причём $AB : BC = 5 : 3$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A , Винни-Пух – в пункте B , а Кролик – в пункте C . Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C , Винни-Пух – из B в C , а Кролик – из C в A . Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C .)

Ответ: 1,6.

- г) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C , причём $AB : BC = 4 : 7$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A , Винни-Пух – в пункте B , а Кролик – в пункте C . Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C , Винни-Пух – из B в C , а Кролик – из C в A . Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C .)

Ответ: 2,75.

8. а) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA , SB , SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC . Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin \angle SAB = \frac{10}{\sqrt{149}}$.

Ответ: 0,7.

Решение. Так как проекции боковых рёбер на плоскость основания равны, то и сами боковые рёбра равны, т.е. $SA = SB = SC$. Проекция равных рёбер SB и SC на противоположные им боковые грани равны между собой, поэтому равны и высоты пирамиды, проведённые из вершин B и C на грани SAC и SAB . Но из формулы объёма пирамиды отсюда следует равенство площадей этих граней.

Грани SAB и SAC — это равнобедренные треугольники с одинаковыми боковыми сторонами, причём ввиду того, что $AB \neq AC$, эти треугольники не равны между собой. Из равенства их площадей следует, что $\sin \angle ASB = \sin \angle ASC$, а так как эти углы не равны, $\angle ASB + \angle ASC = \pi$. Пусть $\angle SAB = \alpha$. Тогда $\angle ASB = \pi - 2\alpha$, $\angle ASC = 2\alpha$, $\angle SAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Отсюда имеем

$$1 = \frac{S_{SAB}}{S_{SAC}} = \frac{0,5AS \cdot AB \sin \alpha}{0,5AS \cdot AC \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{AB}{AC} \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow AB : AC = \operatorname{ctg} \alpha.$$

- б) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA , SB , SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC . Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin \angle SAB = \frac{8}{\sqrt{73}}$.

Ответ: 0,375.

- в) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA , SB , SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC . Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin \angle SAB = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

Ответ: 1,25.

- г) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA , SB , SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC . Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin \angle SAB = \frac{5}{\sqrt{146}}$.

Ответ: 2,2.

9. а) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a + b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a + 1)a + 7b = 1\,000\,001$?

Ответ: 144.

Решение. Правая часть равенства имеет остаток 2 от деления на 7. Левая часть имеет остаток 2 от деления на 7, только если a имеет остаток 1 или 5 от деления на 7.

Разберём эти случаи.

Пусть $a = 7k + 1$, где k — целое неотрицательное число. Тогда равенство можно преобразовать к виду $7k^2 + 3k + b = 142\,857$. Заметим, что для каждого целого k такого, что $7k^2 + 3k < 142\,857$ число b определяется однозначно и является натуральным. Также заметим, что $7k^2 + 3k$ всегда чётно, поэтому b нечётно. Тогда сумма $a + b = 7k + 1 + b$ будет чётной, если k — чётное число. Значит, количество пар в этом случае равно количеству чётных $k \geq 0$ таких, что $7k^2 + 3k < 142\,857$, то есть $k \leq 142$. Отсюда количество пар равно 72.

Пусть $a = 7k + 5$. Тогда равенство можно преобразовать к виду $7k^2 + 11k + b = 142\,853$. Аналогично предыдущему случаю получаем, что количество пар равно количеству чётных $k \geq 0$ таких, что $7k^2 + 11k < 142\,853$, то есть $k \leq 142$. Отсюда количество пар равно 72.

Общее количество пар равно $72 + 72 = 144$.

- б) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a + b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a + 1)a + 7b = 3\,000\,006$?

Ответ: 247.

- в) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a + b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a + 1)a + 7b = 4\,000\,005$?

Ответ: 286.

- г) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a + b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a + 1)a + 7b = 5\,000\,004$?

Ответ: 319.

10. а) В вершинах правильного 30-угольника разместили 28 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 80.

Решение. Опишем вокруг многоугольника окружность. Если три вершины образуют прямоугольный треугольник, то гипотенуза является диаметром этой окружности.

Возможны два случая.

1. Угол с чёрной фишкой – прямой. Тогда гипотенузу для каждой из чёрных фишек можно выбрать $(30 - 4) : 2 = 13$ способами. Всего в этом случае получаем $2 \cdot 13 = 26$ способов.

2. Угол с чёрной фишкой – не прямой. Значит, диаметр с концами в вершинах с белой и чёрной фишками является гипотенузой. Оставшуюся вершину прямого угла можно выбрать $30 - 3 = 27$ способами. Всего в этом случае получаем $2 \cdot 27 = 54$ способа.

Общее количество способов есть $26 + 54 = 80$.

- б) В вершинах правильного 34-угольника разместили 32 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 92.

- в) В вершинах правильного 40-угольника разместили 38 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 110.

- г) В вершинах правильного 44-угольника разместили 42 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 122.