10 класс
Вариант 1

1. Бочку с песком радиуса R вращают так, что она совершает n оборотов в секунду. Бочку наклонили под углом α к горизонту, на дне бочки на расстоянии r =15 см от оси симметрии сделали отверстие, через которое высыпается песок. По приведенным графикам зависимости *У=f(t)* и траектории *У = f(x)*, которую оставляет песок на поверхности, определите радиус бочки *R*, период, число оборотов бочки n, угол α, под которым наклонена бочка к горизонту. Оси *X* и *У* направлены вдоль поверхности Земли. Графики приведены на отдельной странице. Обязательно на них укажите все необходимые параметры, которые вы будете брать, для определения величин. (20 баллов)

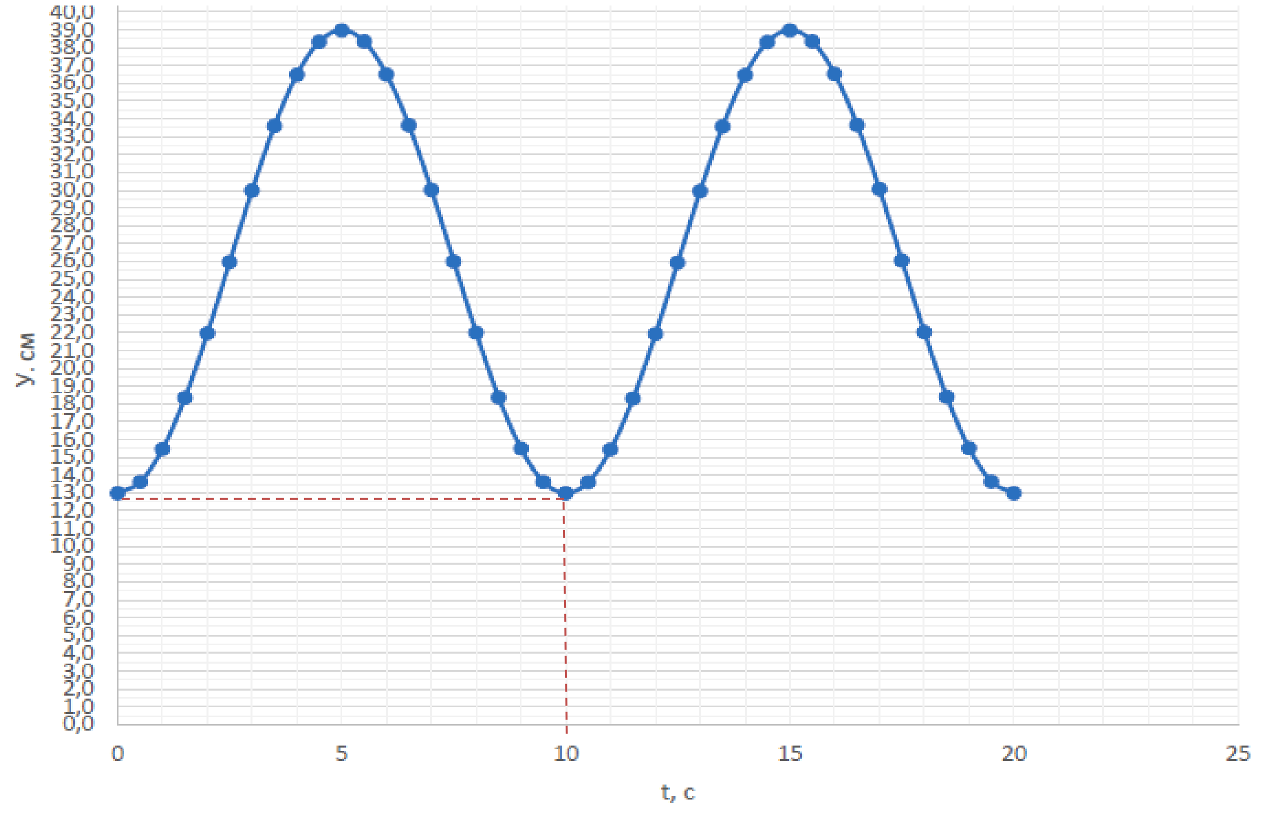
Решение:

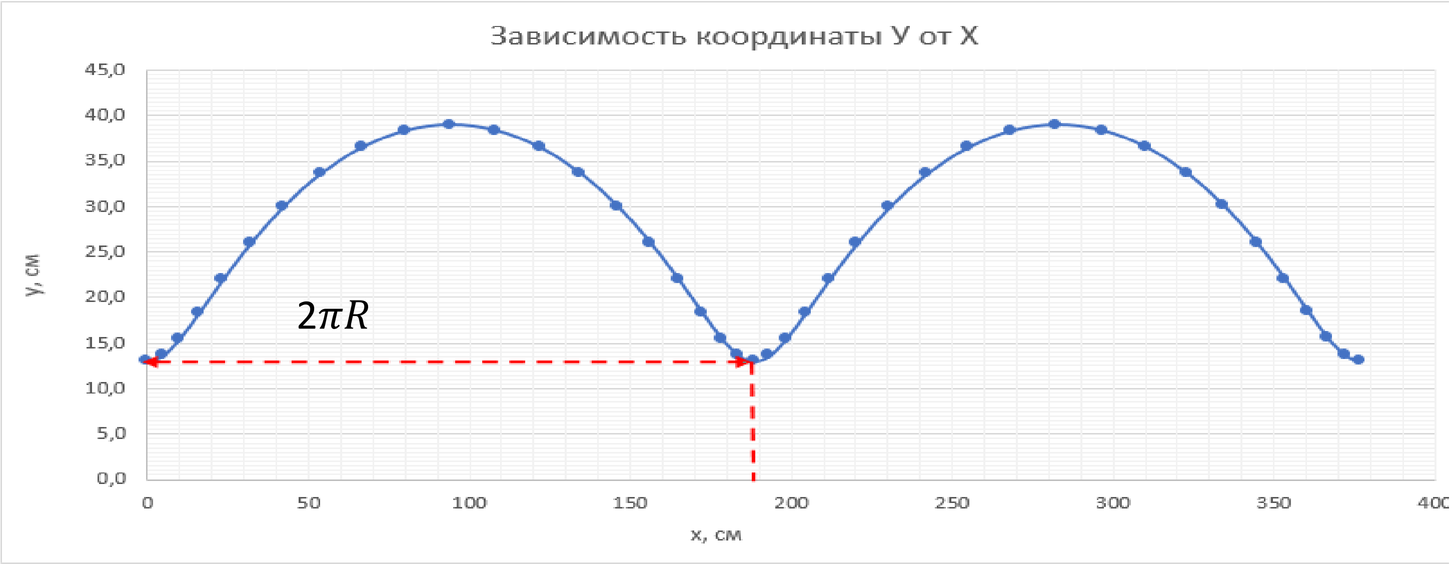
По графику зависимости У=f(t) определяем период

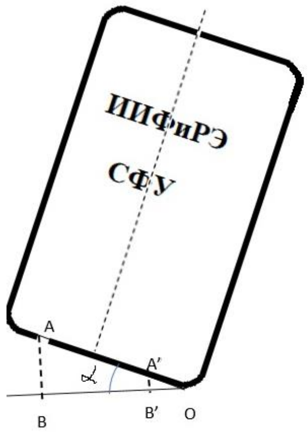
$$T=10\ c, \tag{12}$$

Число оборотов

$$n = \frac{1}{T} = 0{,}1\ c^{-1} \tag{13}$$







По графику У=f(x) определяем на какое расстояние сместилась бочка за период, оно примерно равно $\ell=2\pi R=188$ см.

Рассчитаем радиус бочки:

$$R=\frac{\ell}{2\pi}=29{,}9\text{ см}. \qquad (14)$$

По этому же графику определяем размах колебаний :

$$BB'=2r'=AA'\cos\alpha=26\text{ см}. \qquad (15)$$

С другой стороны,

$$BB'=AA'\cos\alpha=2r. \qquad (16)$$

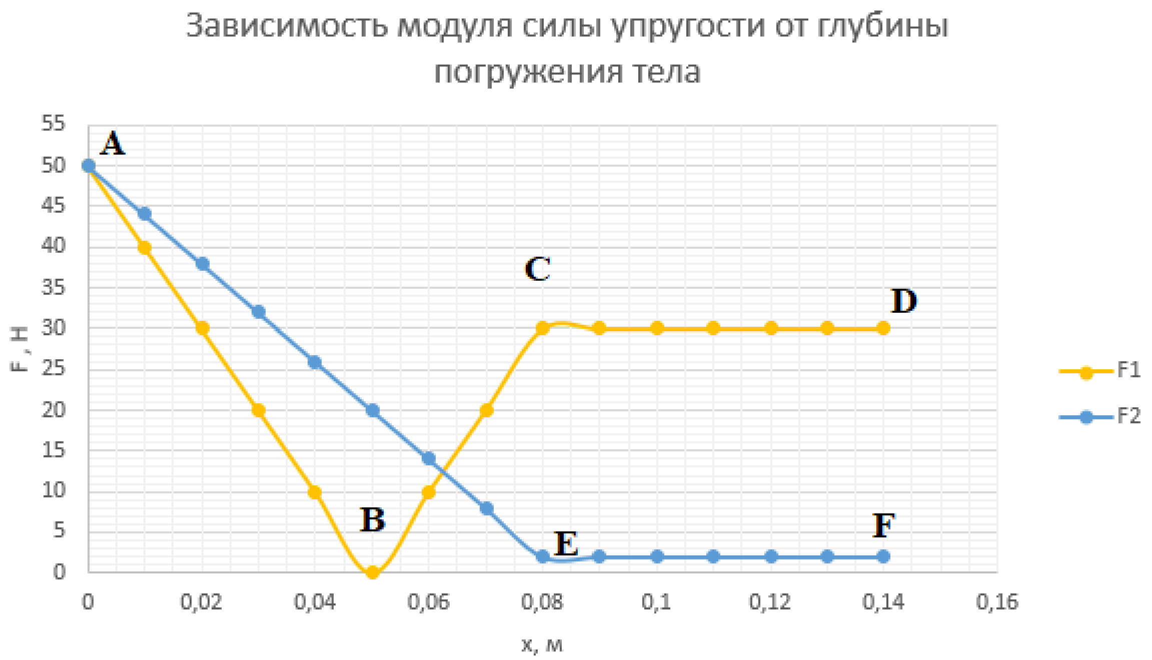
Определяем $\cos\alpha=\frac{BB'}{AA'}=\frac{26}{30}$=0,8667 (17)

$$\alpha=\arccos 0{,}8667=30^0. \qquad (18)$$

	Критерий	Количество баллов
1	На графике У(t) обозначены 1) период 2) Размах колебаний	 1 2
2	Найден период	1
3	Рассчитано число оборотов за ед. времени	2
4	На графике У(х) указано расстояние, которое бочка проходит за один период	2
5	Записана формула для определения радиуса бочки	2
6	Рассчитан радиус	1
7	Записана формула, определяющая связь размаха с двойным радиусом	6
8	Найден угол 1) Если только косинус 2) значение угла	 1 2
	Итого	20

Задача 2 (17 баллов) Тело плотностью $\rho_0 = 800$ кг/м^3, площадью поперечного сечения $S = 0{,}1$ м^2. Один раз тело погружают в жидкостью плотностью ρ_1, затем в другую жидкость плотностью ρ_2.

На рисунке представлены графики зависимости силы упругости, действующей в жидкостях на тело. Определите отношение плотностей жидкостей. Определите отношение плотностей жидкостей. Ускорение свободного падения в данной задаче взято за 10 м/с^2. Опишите графики.



Решение:
В точке А сила упругости равна силе тяжести, так как на тело ещё не действует сила Архимеда.

$$F_{\text{уп}} = mg \quad (19)$$

Найдем массу тела $m = 5$ кг.
Участки CD и EF соответствуют ситуации, когда тела погружены полностью в жидкости, что позволяет определить длину тела ℓ=0,08 м
Рассмотрим график 1, Вначале сила упругости уменьшалась, так как сила тяжести превышала силу Архимеда, затем в координате х=5 см (точка В) сила Архимеда и сила тяжести сравнялись .

$$mg = \rho_1 gV \quad (20)$$

$$mg = \rho_1 gsx \quad (21)$$

$$\rho_1 = \frac{m}{x \cdot S} = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (22)$$

Далее до точки С сила Архимеда увеличивалась, а сила упругости увеличивалась, то есть теперь тело притапливали, то есть сила упругости и сила тяжести на этом участке направлены в одну сторону Найдем силу Архимеда на участке CD:

$$F_{A1} = mg + F_{\text{уп}1} = 80\ \text{Н} \quad (23)$$

где $F_{\text{уп}1} = 30$ Н
Рассмотрим график для силы F_2.. В этом случае сила Архимеда непрерывно нарастает, а сила упругости падает. В очевидно, что плотность второй среды меньше первой. Определим силу Архимеда а участке EF;

$$F_A = mg - F_{уп2}\text{=48 Н, где } F_{уп2}\text{=2Н}$$

Определим отношение плотностей жидкостей:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{mg - F_{уп2}}{mg + F_{уп1}} = \frac{48}{80} = 0{,}6 \qquad (24)$$

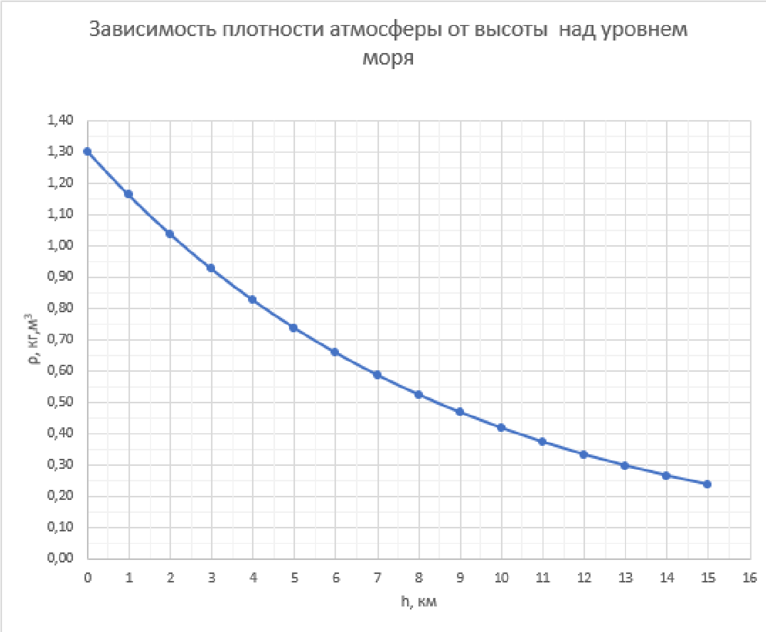
Определим плотность второй жидкости;

$$\rho_2 = 0{,}6p_1 = 600\,\frac{кг}{м^3} \qquad (25)$$

	Критерии	Баллы
1	Указано, что В точке А сила упругости равна силе тяжести	2
2	Определена масса груза	1
3	Для точки В записано равенство силы Архимеда и сила тяжести	2
4	Записана формула для расчета плотности первой жидкости	2
5	Получен результат для плотности первой жидкости	1
	Определены силы упругости для тел, после того как оно было погружено в различные жидкости По одному баллу за значения	2
6	Записаны силы Архимеда для случаем, когда тела полностью погружены в жидкость, по 2 балла за формулу	4
7	Записана формула для расчета плотности второй жидкости	2
8	Получено численное значение плотности ворой жидкости	1
	Итого	17

3. Высокоскоростные самолёты летают на высоте от 7 км до 13 км. На этой высоте дуют достаточно сильные ветра. Считайте, что на высоте 7 км скорость ветров 100 км/ч, а на высоте 13 км – 200 км/ч; Плотность воздуха тоже меняется с высотой. На графике представлена зависимость плотности атмосферы над уровнем моря. Собственная скорость самолёта составляет $v_с = 900$ км/час. Сила сопротивления со стороны воздуха прямо пропорциональна плотности, скорости и площади лобового сечения самолёта, т.е. $F = \alpha\rho s v,$ где α - зависит от конструкции самолета.

Определите во сколько раз отличаются мощности потребляемые самолётом на высотах 7 км до 13 км, если ветер дует попутно. (10 баллов)



Решение:

Так как самолёт летит равномерно, то сила тяги самолёта уравновешивает силу сопротивления, действующую на самолёт со стороны воздуха.

$$F = F_c = \alpha \rho v S \tag{26}$$

Мощность находится по формуле

$$P = Fv \quad =\alpha \rho v^2 s \tag{27}$$

Мощности самолёта на разных высотах равны соответственно:

$$P_1 = \alpha \rho_1 v_1^2 S \tag{28}$$

$$P_2 = \alpha \rho_2 v_2^2 S \tag{29}$$

В формулах (28) и (29) $v_{1,}$и v_2 относительные скорости самолета по отношению к ветру:

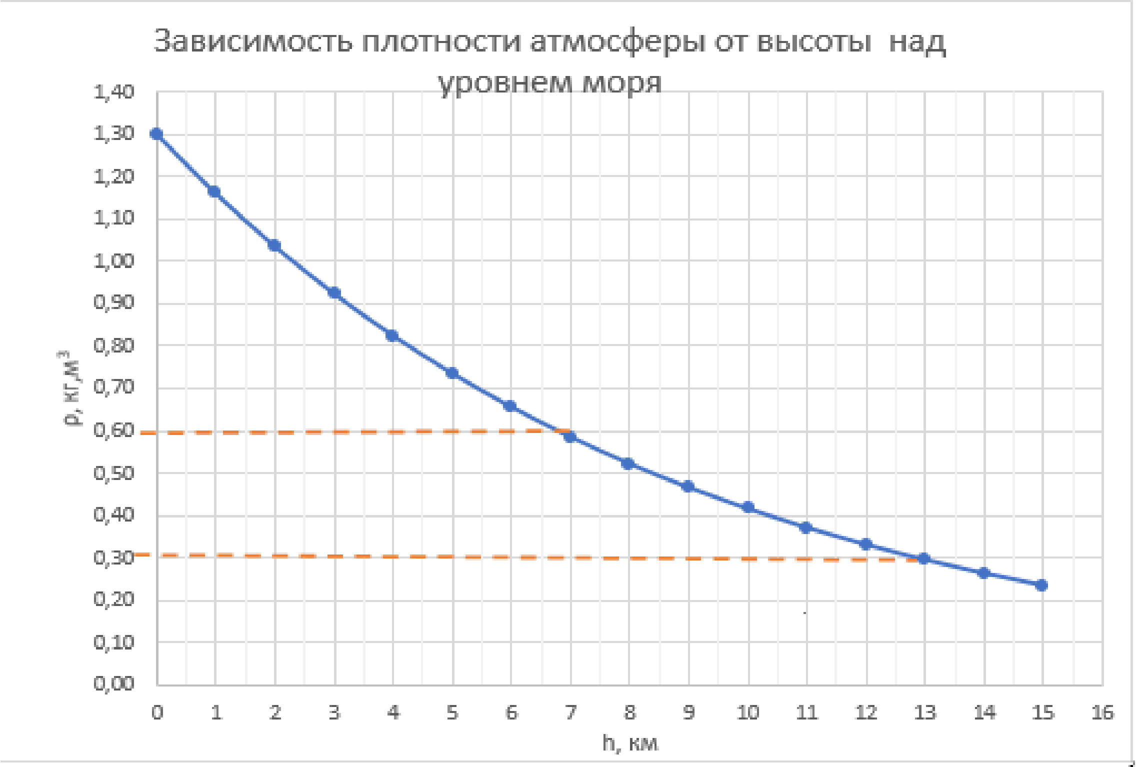
$$v_1 = v_c - v_{\text{в}_1} = 800 \text{ км/ч} \tag{30}$$

$$v_2 = v_c - v_{\text{в}_2} = 700 \text{ км/ч} \tag{31}$$

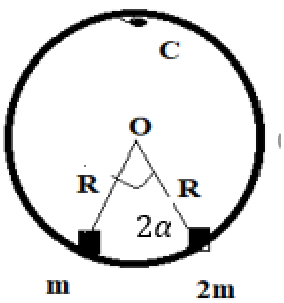
Плотности определяем по графику зависимости плотности атмосферы от высоты. ρ_2=0,3 кг/м^3 плотность воздуха на высоте 13 км, $\rho_1 = 0{,}6$ кг/м^3 плотность воздуха на высоте 7 км.

Отношение мощностей равно:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2 v_2^2}{\rho_1 v_1^2} = 0{,}65 \tag{32}$$



	Критерий	Количество баллов
1	Записана формула для мощности в общем виде	1
2	Указано, что сила сопротивления равна силе тяги	1
3	Получена формула для расчета мощности с учетом силы сопротивления в общем виде	2
4	Записаны формулы для расчета мощностей на различных высотах, по одному баллу за формулу	2
5	Записана формула для скорости на высоте h, по одному баллу за формулу для высот h_1 и h_2	2
6	По графику определены значения плотностей, по одному баллу за каждое значение	2
7	Записана формула для отношения мощностей	2
	Получено численное значение для отношения плотностей	1
	Итого	13



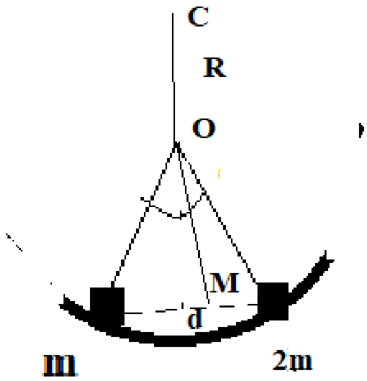
4. Необычный маятник. На невесомый обруч радиуса R= 50 см по краю образующей укреплены две гайки массами $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$ (см. рисунок). Угол между радиусами составляет $2\alpha = 60°$. Обруч свободно подвесили на гвоздь. После того как он успокоился, его вывели из положения равновесия. Определите период колебаний такого маятника. (25 баллов)

Решение:

Данную систему можно рассматривать как математический маятник, у которого вся масса системы сосредоточена в точке М.

Координата центра масс лежит на прямой, соединяющей грузики, расстояние между которыми:

$$d = 2R\sin(\alpha), \qquad (33)$$



Тогда координата цента масс x лежит на линии, соединяющей грузы:

$$x = \frac{2m\,d}{m+2m} = \frac{4}{3}R\sin(\alpha) \qquad (34)$$

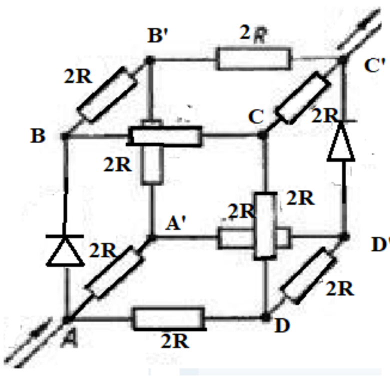
При подвешивании такой системы она стремится занять положение такое, чтобы точка М и точка С находились на одной прямой.: Длина ОМ - это расстояние от центра обруча до центра масс груза:1

$$0M = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos(90-\alpha)} = \frac{\sqrt{7}}{3}R \qquad (35)$$

Период колебаний математического маятника равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R+0M}{g}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{R}{g}} = 0{,}31 \text{ с-}$$

	Критерии	Количество баллов
1	Указано, что данную систему можно рассматривать как математический маятник	4
2	Определено расстояние между грузами	2
3	Определена координата центра масс системы	5
4	Рассчитано расстояние от центра масс до центра окружности	5
5	Записана формула для математического маятника	2
6	Выведена формула для периода колебаний такого маятника	6
7	Получено численное значение	1
	Итого	25

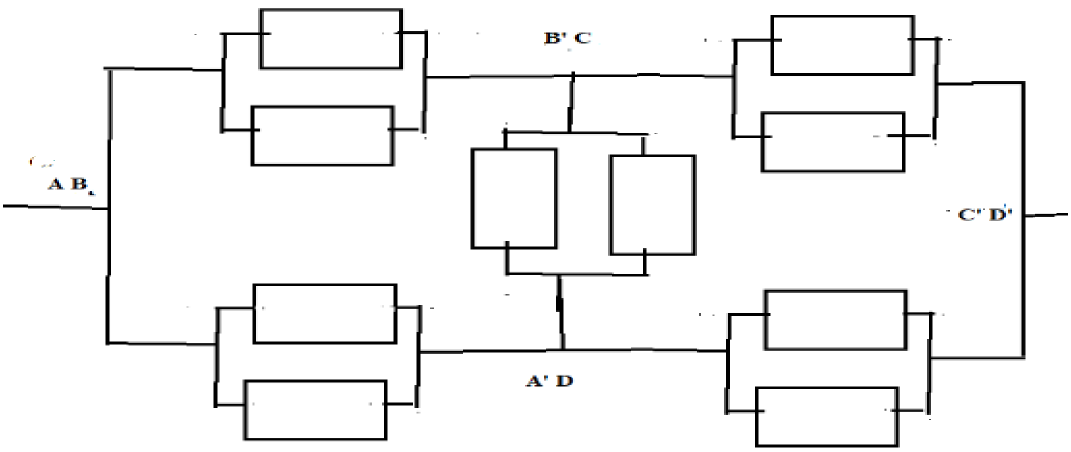


5. На рисунке представлена схема, где значение R=40 Ом. В два ребра куба в место сопротивления включены идеальные диоды. Определите полное сопротивление данной цепи, если между точками А и С' приложено напряжение U= 160 В. (25 баллов)

Решение:

При таком подключении ток через диоды бежит, а значит точки А и В соединены накоротко, аналогично для точек С' и D'.

Эквивалентная схема представлена на рисунке.



В силу симметрии ток не будет бежать через участки схемы B’C и A’D.
Сопротивление участков равны между собой:

$$R_{ABB'C} = R_{ABA'D} = R_{B'C\,C'D'} = R_{A'DC'D'} = R \qquad (36)$$

Сопротивление верхнего участка равно сопротивлению нижнего участка цепи:

$$R_I = R_{II} = 2R \qquad (37)$$

Полное сопротивление цепи:

$$R_0 = R. \qquad (38)$$

Ток бегущий через весь куб:

$$I = \frac{U}{R} = 4\ A \qquad (39)$$

Токи через все ребра где есть сопротивления равны между собой:

$$I_1 = \frac{I}{4} = 1\ \text{А}. \qquad (40)$$

Токи через диоды:

$$I_2 = \ 2I_1 = 1\ \text{А} \qquad (41)$$

Токи через ребра B’C’ и DC не текут.

	Критерии	Баллы
1	Указано, что токи через диоды бегут	2
2	Нарисована эквивалентная схема	9
3	Указано, что токи не бегут через участки схемы B’C и A’D.	4
4	Найдено полное сопротивление цепи	2
5	Найдены токи через все оставшиеся сопротивления	4
6	Найдены токи бегущие через диоды	4
	Итого:	25

10 класс
Вариант 2

1. Бочку с песком радиуса *R* вращают так, что она совершает n оборотов в секунду. Бочку наклонили под углом α=20° к горизонту, в дне бочки на расстоянии *r* от оси симметрии сделали отверстие, через которое высыпается песок. По приведенным графикам зависимости *У=f(t)* и траектории *У=f(x)*, которую оставляет песок на поверхности, определите радиус бочки *R*, период, число оборотов бочки *n*, расстояние *r*. Оси X и У направлены вдоль поверхности Земли. Графики приведены на отдельной странице. Обязательно на них укажите все необходимые параметры, которые вы будете брать для определения величин. (20 баллов)

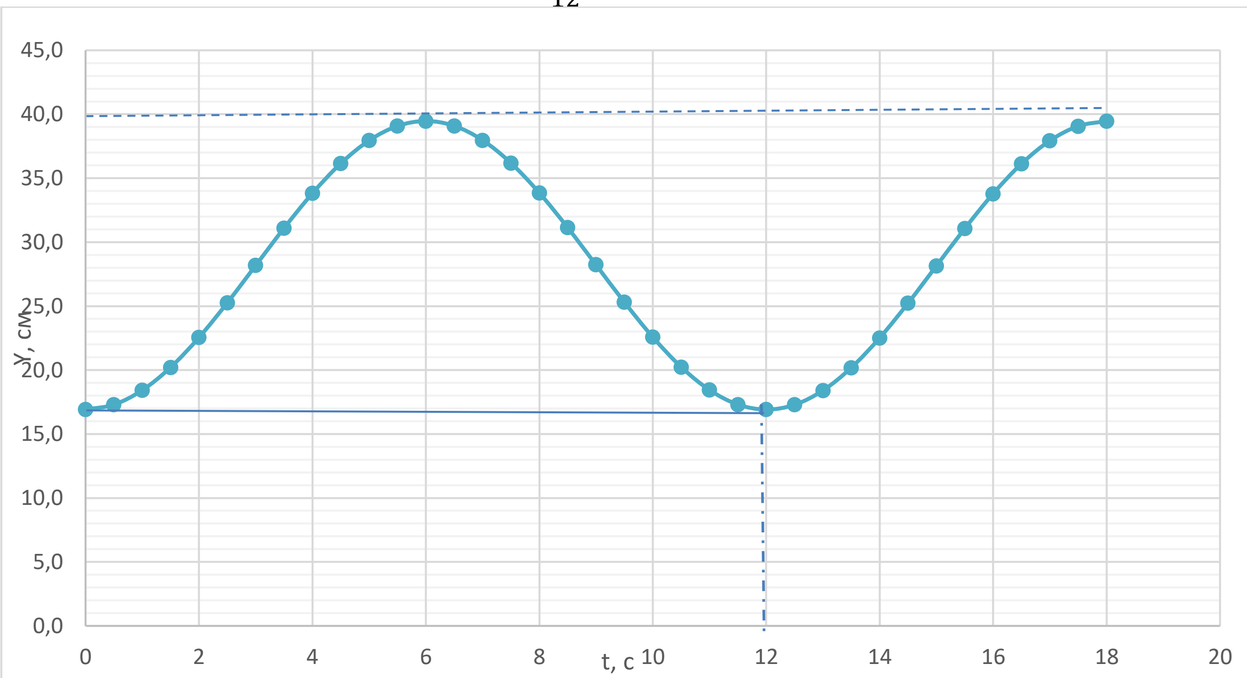
Решение:

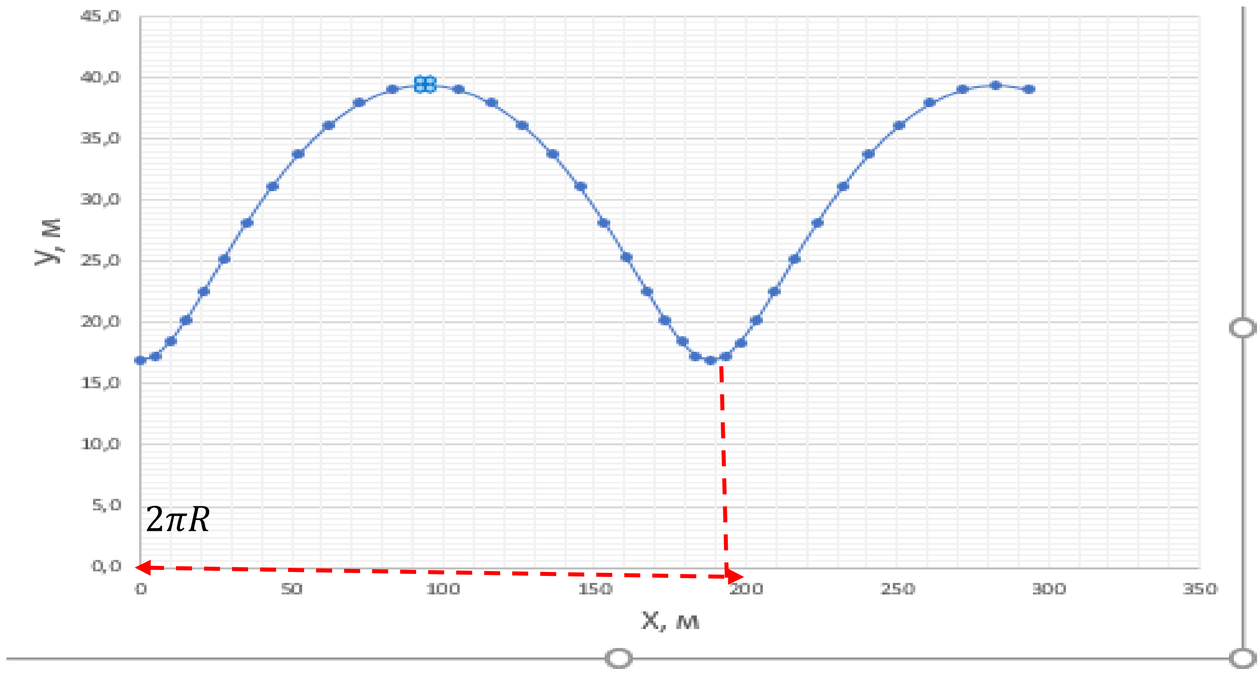
По графику зависимости У=f(t) определяем период

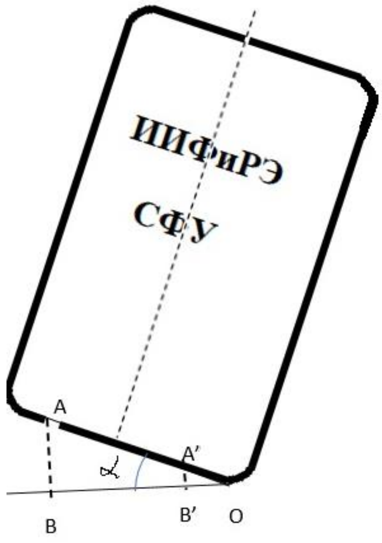
$$T=12\ \text{с}, \quad (12)$$

Число оборотов

$$n = \frac{1}{12} = 0{,}083\ c^{-1} \quad (13)$$







По графику У=f(x) определяем на какое расстояние сместилась бочка за период, оно примерно равно ℓ=$2\pi R$ =188 см.

Рассчитаем радиус бочки:

$$R = \frac{\ell}{2\pi} = 29{,}9 \text{ см.} \qquad (14)$$

Впрочем радиус бочки можно определить более точно. Видно, что координата У колеблется возле числа 30, значит наш радиус равен 30 см.

По этому же графику определяем размах колебаний :

$$BB' = 2r' = AA' \cos\alpha = (39{,}5 - 17{,}0) = 22{,}5 \text{ см.} \qquad (15)$$

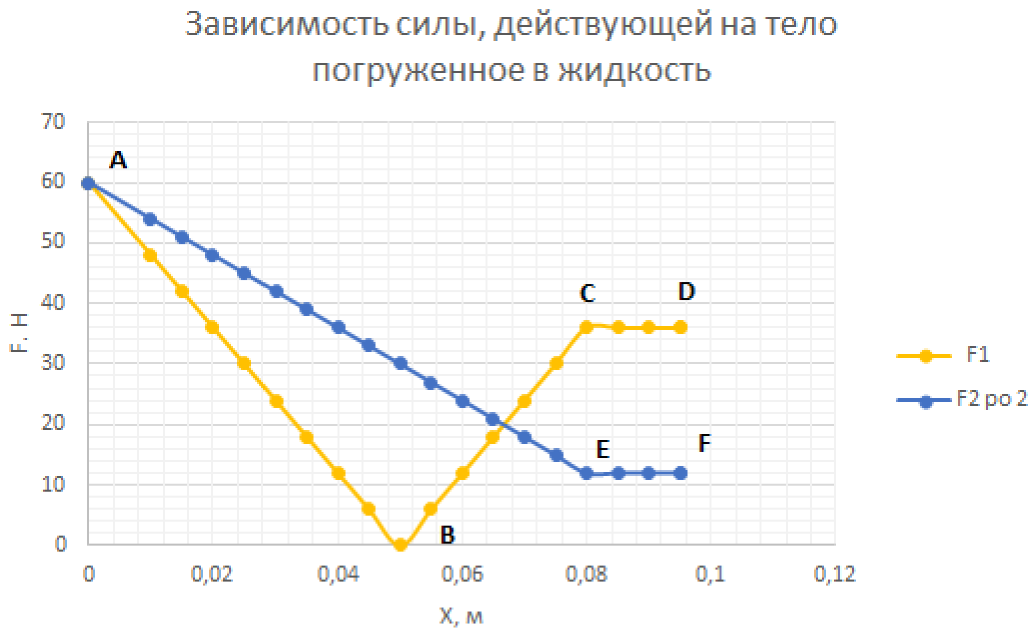
С другой стороны,

$$BB' = AA' \cos\alpha = 2r. \qquad (16)$$

Определяем $r = \frac{AA'}{2} = \frac{BB'}{2\cos\alpha} = \frac{22{,}5}{2\cos 20}$ ≅11,3 см (17)

	Критерий	Количество баллов
1	На графике У(t) обозначены 1)период 2) Размах колебаний	 1 2
2	Найден период	1
3	Рассчитано число оборотов за ед. времени	2
4	На графике У(х) указано расстояние, которое бочка проходит за один период	2
5	Записана формула для определения радиуса бочки	2
6	Рассчитан радиус	1
	Примечание: если радиус найден как центр траектории, по п.5 и 4 объединяем и даём 5 балла	
7	Записана формула, определяющая связь размаха с двойным радиусом	7
8	Найдено расстояние, на котором сделано отверстие	2
	Итого	20

2. Тело плотностью $\rho_0 =$ 800 кг/м^3, площадью поперечного сечения $S = 0{,}1$ м^2. Один раз тело погружают в жидкость плотностью ρ_1, затем в другую жидкость плотностью ρ_2.
На рисунке представлены графики зависимости силы упругости, действующей в жидкостях на тело. Определите отношение плотностей жидкостей. Ускорение свободного падения в данной задаче взято за 10 м/с^2. Опишите графики. (20 баллов)



Решение:
В точке А сила упругости равна силе тяжести, так как на тело ещё не действует сила Архимеда.

$$F_{уп} = mg \tag{18}$$

Найдем массу тела $m = 6$ кг.
Участки CD и EF соответствуют ситуации, когда тела погружены полностью в жидкости, что позволяет определить длину тела ℓ=0,08 м
Рассмотрим график 1. Вначале сила упругости уменьшалась, так как сила тяжести превышала силу Архимеда, затем в координате x=5 см (точка B) сила Архимеда и сила тяжести сравнялись .

$$mg = \rho_1 gV \tag{19}$$

$$mg = \rho_1 gsx \tag{20}$$

$$\rho_1 = \frac{m}{x \cdot S} = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \tag{21}$$

Далее до точки С сила Архимеда увеличивалась, и сила упругости увеличивалась, то есть теперь тело притапливали, то есть сила упругости и сила тяжести на этом участке направлены в одну сторону Найдем силу Архимеда на участке CD:

$$F_{A1} = mg + F_{уп1} = 96 \text{ Н} \tag{22}$$

где $F_{уп1} = 36$ Н
Рассмотрим график для силы $F_{2.}$. В этом случае сила Архимеда непрерывно нарастает, а сила упругости падает. В очевидно, что плотность второй среды меньше первой. Определим силу Архимеда а участке EF;
$F_A = mg - F_{уп2}$=48 Н,

где $F_{уп2}$=12Н

Определим отношение плотностей жидкостей:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{mg - F_{уп2}}{mg + F_{уп1}} = \frac{48}{96} = 0{,}5 \qquad (23)$$

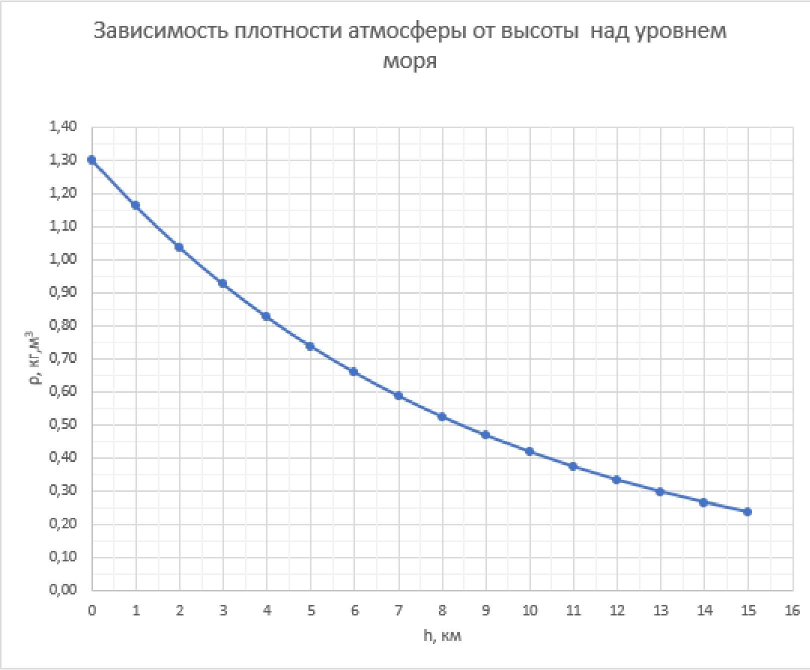
Определим плотность второй жидкости;

$$\rho_2 = 0{,}5p_1 = 600\,\frac{кг}{м^3} \qquad (24)$$

		Баллы
1	Указано, что В точке А сила упругости равна силе тяжести	2
2	Определена масса груза	1
3	Для точки В записано равенство силы Архимеда и сила тяжести	2
4	Записана формула для расчета плотности первой жидкости	2
5	Получен результат для плотности первой жидкости	1
	Определены силы упругости для тел, после того как оно было погружено в различные жидкости По одному баллу за значения	2
6	Записаны силы Архимеда для случаем, когда тела полностью погружены в жидкость, по 2 балла за формулу	4
7	Записана формула для расчета плотности второй жидкости	2
8	Получено численное значение плотности второй жидкости	1
	Итого	17

3. Высокоскоростные самолёты летают на высоте от 7 км до 13 км. На этой высоте дуют достаточно сильные ветра. Считайте, что на высоте 8,5 км скорость ветров 120 км/ч, а на высоте 13 км – 200 км/ч; Плотность воздуха тоже меняется с высотой. На графике представлена зависимость плотности атмосферы над уровнем моря. Собственная скорость самолёта составляет $v_с = 920$ км/час. Сила сопротивления со стороны воздуха прямо пропорциональна плотности, скорости и площади лобового сечения самолёта, т.е. $F = \alpha\rho s v$, где α - зависит от конструкции самолета.

Определите во сколько раз отличаются мощности потребляемые самолётом на высотах 8,5 км до 13 км, если ветер дует попутно. (10 баллов)



Решение:

Так как самолёт летит равномерно, то сила тяги самолёта уравновешивает силу сопротивления, действующую на самолёт со стороны воздуха.

$$F = F_c = \alpha\rho v S \qquad (25)$$

Мощность находится по формуле

$$P = Fv = \alpha\rho v^2 s \qquad (26)$$

Мощности самолёта на разных высотах равны соответственно:

$$P_1 = \alpha\rho_1 v_1^2 S \qquad (27)$$

$$P_2 = \alpha\rho_2 v_2^2 S \qquad (28)$$

В формулах (28) и (29) $v_{1,}$и v_2 относительные скорости самолета по отношению к ветру:

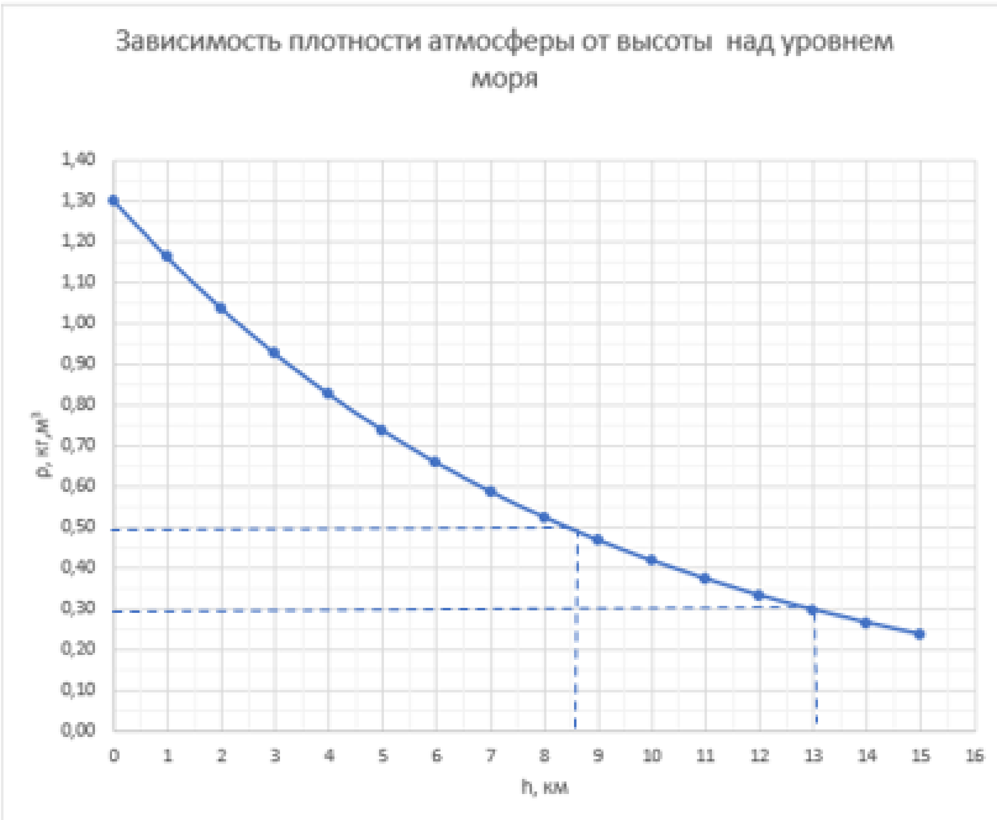
$$v_1 = v_c - v_{в_1} = 800 \text{ км/ч} \qquad (29)$$

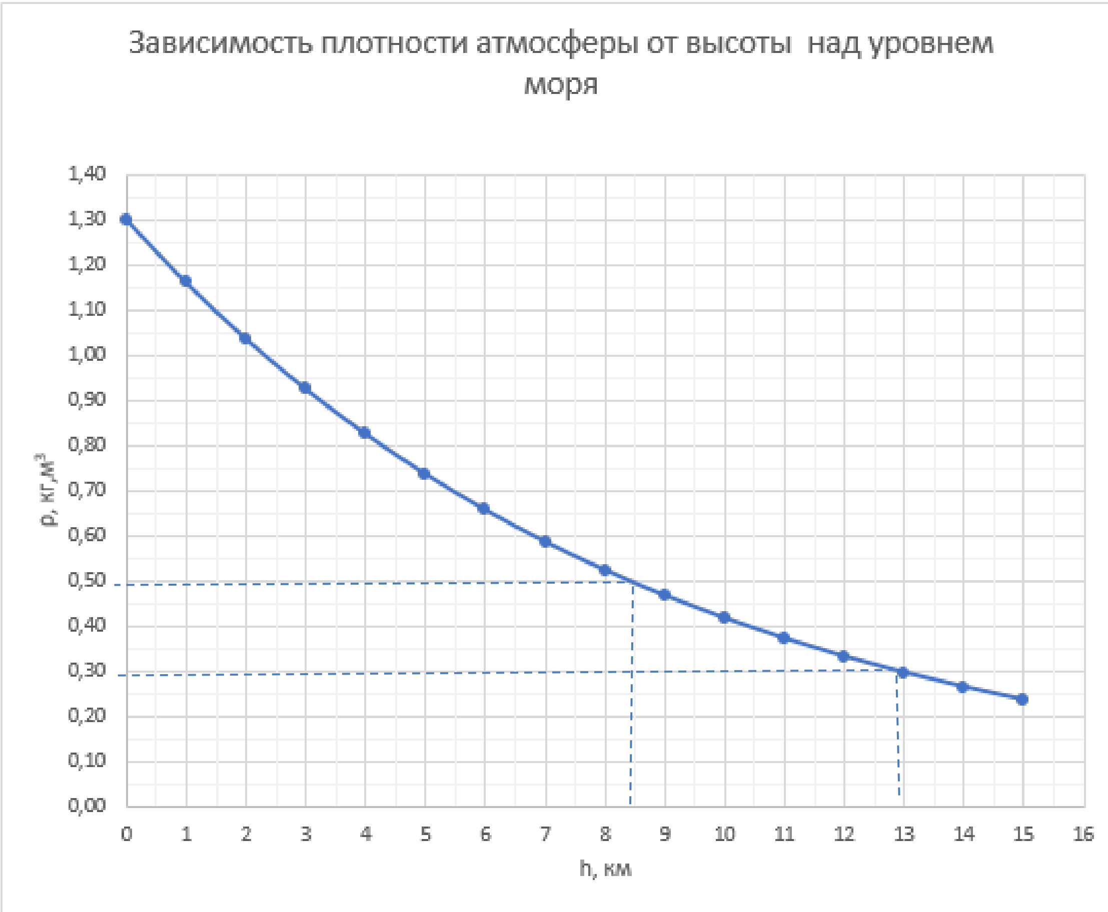
$$v_2 = v_c - v_{в_2} = 720 \text{ км/ч} \qquad (30)$$

Плотности определяем по графику зависимости плотности атмосферы от высоты. ρ_2=0,3 кг/м^3 плотность воздуха на высоте 13 км, $\rho_1 = 0{,}5$ кг/м^3 плотность воздуха на высоте 8,5 км.

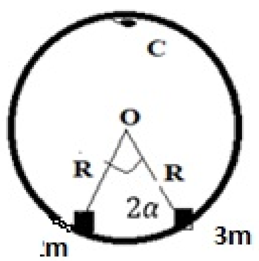
Отношение мощностей равно:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2 v_2^2}{\rho_1 v_1^2} = 0{,}486 \qquad (31)$$





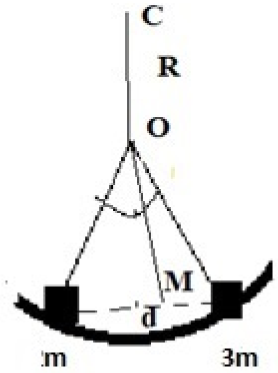
,	Критерий	Количество баллов
1	Записана формула для мощности в общем виде	1
2	Указано, что сила сопротивления равна силе тяги	1
3	Получена формула для расчета мощности с учетом силы сопротивления в общем виде	2
4	Записаны формулы для расчета мощностей на различных высотах, по одному баллу за формулу	2
5	Записана формула для скорости на высоте h , по одному баллу за формулу для высот h_1и h_2	2
6	По графику определены значения плотностей, по одному баллу за каждое значение	2
7	Записана формула для отношения мощностей	2
8	Получено численное значение для отношения плотностей	1
	Итого	13



4. Необычный маятник. На невесомый обруч радиуса R= 1 м по краю образующей укреплены две гайки массами $m_1 = m$ и $m_2 = 3m$ (см. рисунок). Угол между радиусами составляет $2\alpha = 90°$. Обруч свободно подвесили на гвоздь. После того как он успокоился, его вывели из положения равновесия. Определите период колебаний такого маятника. (25 баллов)

Решение:

Данную систему можно рассматривать как математический маятник, у которого вся масса системы сосредоточена в точке М.



Координата центра масс лежит на прямой, соединяющей грузики, расстояние между которыми:

$d = 2R\sin(\alpha)$, (32)

Тогда координата цента масс x лежит на линии, соединяющей грузы:

$x = \frac{3m\, d}{m+3m} = \frac{3}{2}R\sin(\alpha)$ (33

При подвешивании такой системы, она стремится занять положение такое, чтобы точка М и точка С находились на одной прямой, т.е в равновесии. Длина ОМ - это расстояние от центра обруча до центра масс груза:

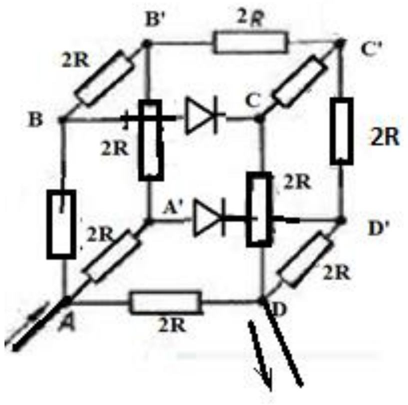
$$0M = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos(90-\alpha)} =$$

$$0M = \sqrt{R^2(1-\frac{3}{8})} = \sqrt{\frac{5}{8}}R \qquad (34)$$

Период колебаний математического маятника равен:

$$T = {}^{2\pi}\sqrt{\frac{\ell}{g}} = {}^{2\pi}\sqrt{\frac{R+0M}{g}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{5}{8}}}{g}}R = 0{,}137\ c\text{-} \qquad (35)$$

	Критерии	Количество баллов
1	Указано, что данную систему можно рассматривать как математический маятник	4
2	Определено расстояние между грузами	2
3	Определена координата центра масс системы	5
4	Рассчитано расстояние от центра масс до центра окружности	5
5	Записана формула для математического маятника	2
6	Выведена формула для периода колебаний такого маятника	6
7	Получено численное значение	1
	Итого	25

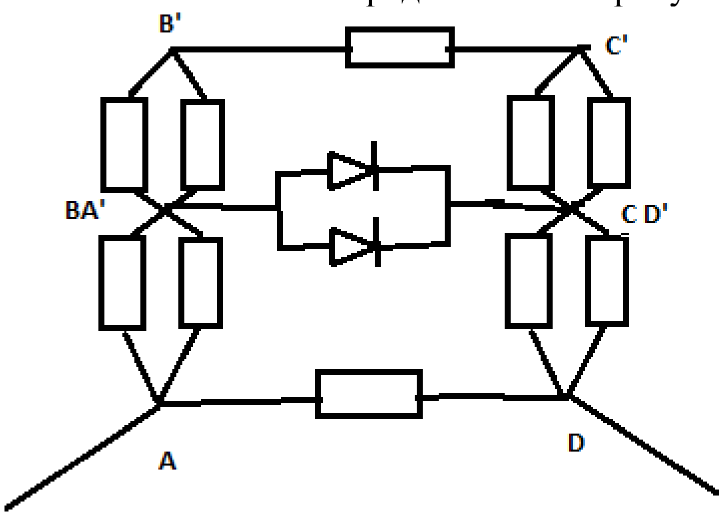


5. На рисунке представлена схема, где значение R=40 Ом. В два ребра куба в место сопротивления включены идеальные диоды. Определите полное сопротивление данной цепи, если между точками A и D приложено напряжение U= 160 В. (25 баллов)

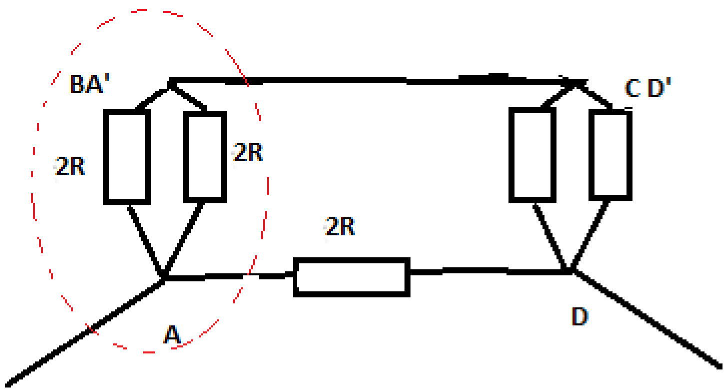
Решение:

При таком подключении ток через диоды бежит, а значит точки BA' и CD' соединены накоротко

Эквивалентная схема представлена на рисунке.



Следовательно, верхняя часть схемы не работает. Эквивалентная схема будет как на рисунке, представленном ниже.



Сопротивление параллельного участка цепи будет:

$$R_{ABA'} = R_{BCD'} = R$$

Сопротивление верхнего участка равно:

$$R_{AA'CD} = 2R$$

Полное сопротивление цепи:

$$R_0 = R.$$

Ток бегущий через весь куб:

$$I = \frac{U}{R} = 4\ A$$

Токи через участок AD и

$I_1 = \frac{I}{2} = 2$ A.

Токи через участки AB, AA' CD и DD’ равны между собой, их значение равно:

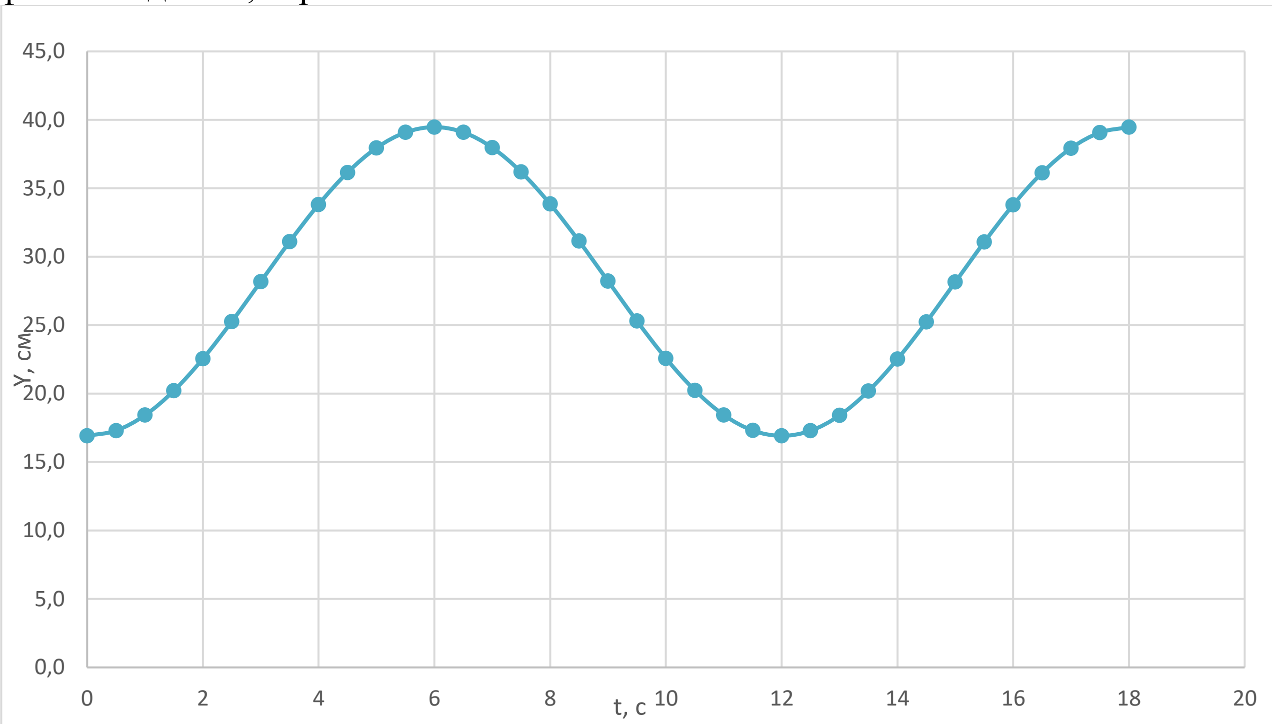
$$I_2 = \frac{I_1}{2} = 1\ A.$$

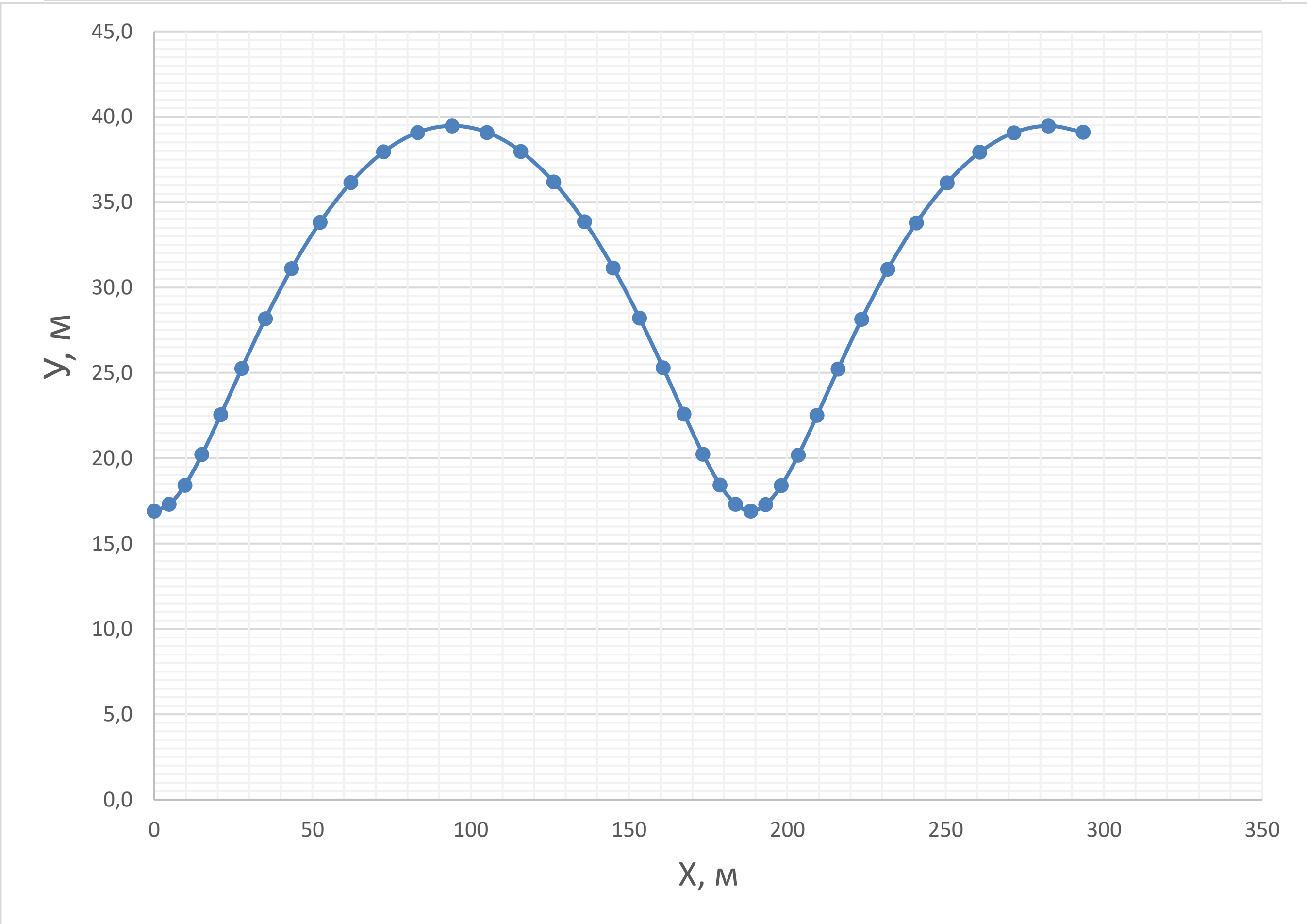
Токи через диоды:

$I_3 = 1$ A

	Критерии	Баллы
1	Указано, что токи через диоды бегут	2
2	Нарисована полная эквивалентная схема	8
3	Указано, что токи через верхнюю часть схемы не идут	4
4	Найдено полное сопротивление цепи	2
5	Найдены токи через все оставшиеся сопротивления: Через участок AD – 1 балл Указано, что токи через участки AB, AA' CD и DD’ равны между – 1 балл; Найдено значение тока через участки AB, AA' CD и DD’ – 2 балл	4
6	Найдены токи бегущие через диоды	4
	Итого:	25

Графики к задаче 1, вариант 2





10 класс
Вариант 3

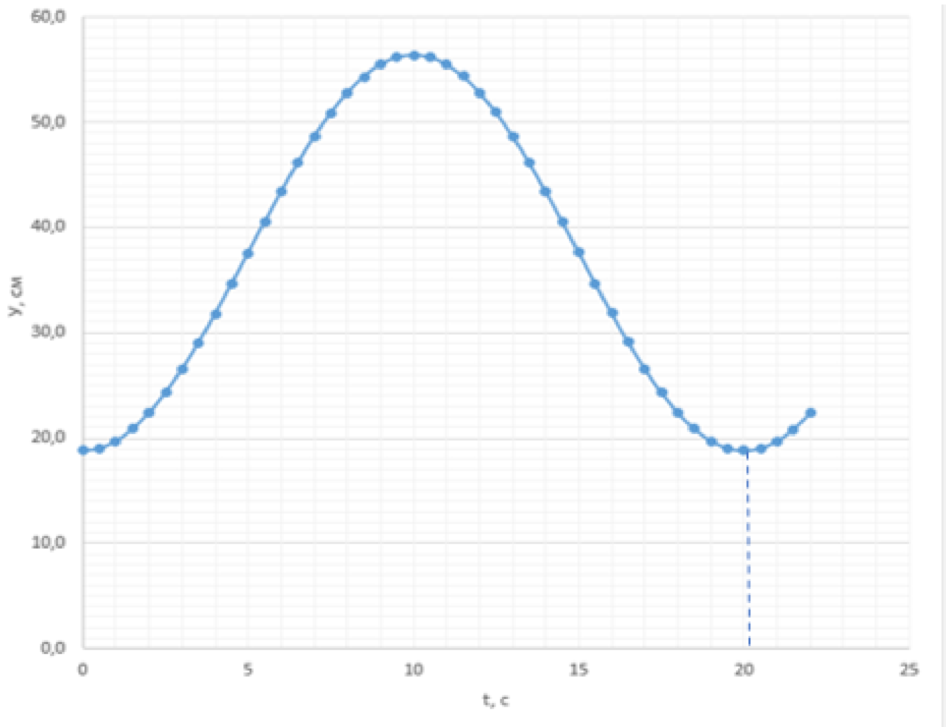
1. Бочку с песком радиуса R вращают так, что она совершает n оборотов в секунду. Бочку наклонили под углом α к горизонту, в дне бочки на расстоянии r=20 см от оси симметрии сделали отверстие, через которое высыпается песок. По приведенным графикам зависимости *У=f(t)* и траектории *У=f(x)*, которую оставляет песок на поверхности, определите радиус бочки R, период, число оборотов бочки n, угол α, под которым наклонена бочка к горизонту. Оси Х и У направлены вдоль поверхности Земли. Графики приведены на отдельной странице. Обязательно на них укажите все необходимые параметры, которые вы будете брать, для определения величин. (20 баллов).

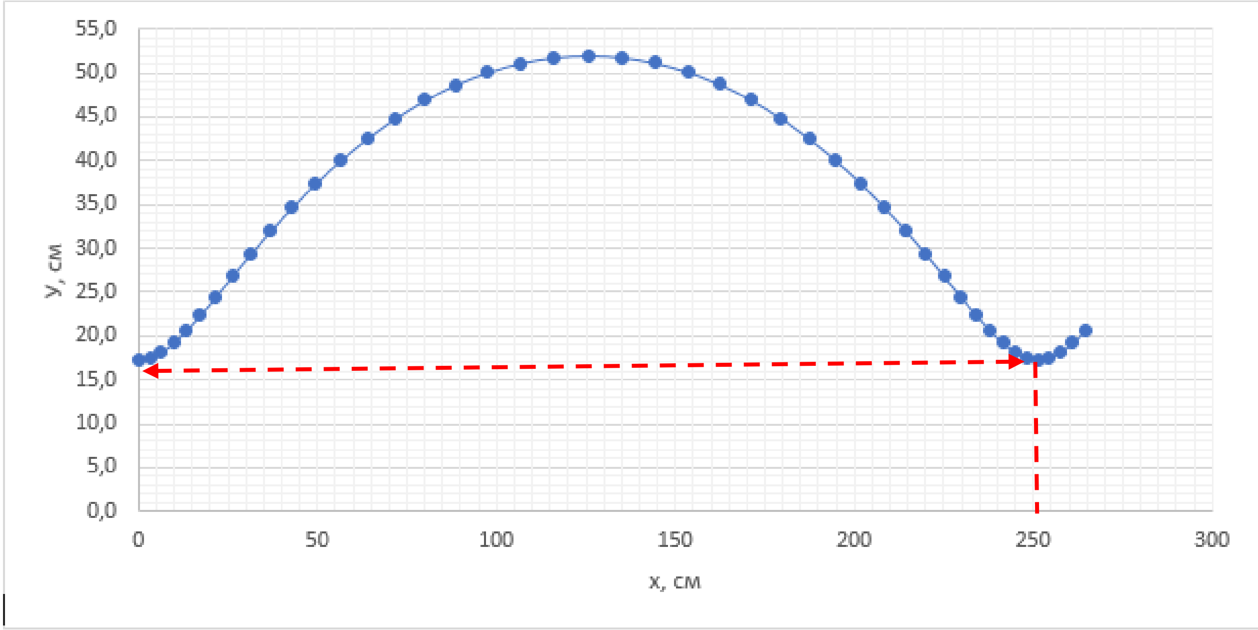
Решение:
По графику зависимости У=f(t) определяем период

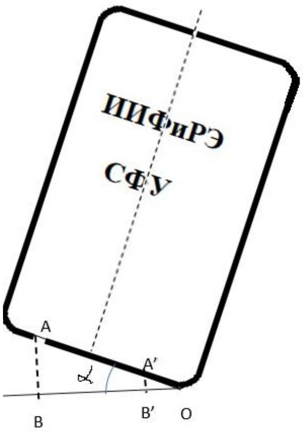
$$T=20\ \text{с}, \tag{12}$$

Число оборотов

$$n=\frac{1}{T}=0{,}05\ c^{-1} \tag{13}$$







По графику У=f(x) определяем на какое расстояние сместилась бочка за период, оно примерно равно $\ell = 2\pi R$ =250 см.

Рассчитаем радиус бочки:

$$R = \frac{\ell}{2\pi} = 39{,}8 \text{ см.} \tag{14}$$

Впрочем радиус бочки можно определить более точно. Видно, что координата У колеблется возле числа 40, значит наш радиус равен 40 см.

По этому же графику определяем размах колебаний :

$$BB' = 2r' = AA' \cos\alpha = (52 - 17) = 35 \text{ см.} \tag{15}$$

С другой стороны,

$$BB' = AA' \cos\alpha = 2r. \tag{16}$$

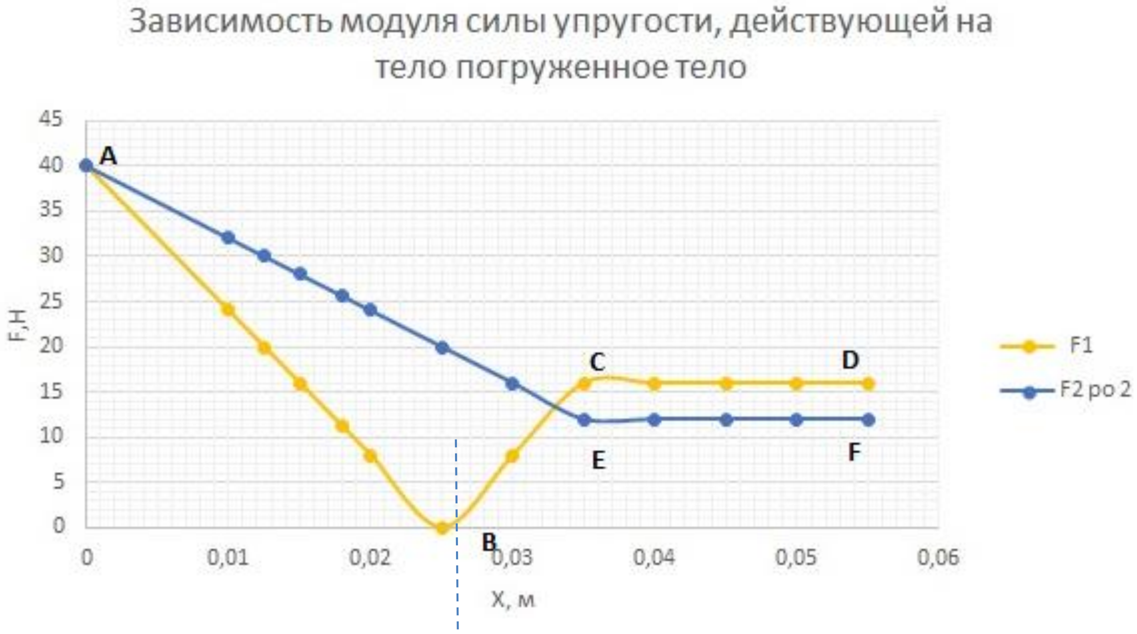
Определяем $\cos\alpha = \frac{BB'}{AA'} = \frac{35}{40}$=0,875 (17)

$$\alpha = \arccos 0{,}875 = 29^0. \tag{18}$$

	Критерий	Количество баллов
1	На графике У(t) обозначены 1) период 2) Размах колебаний	 1 2
2	Найден период	1
3	Рассчитано число оборотов за ед. времени	2
4	На графике У(х) указано расстояние, которое бочка проходит за один период	2
5	Записана формула для определения радиуса бочки	2
6	Рассчитан радиус	1
	Примечание: если радиус найден как центр траектории, по п.5 и 4 объединяем и даём 5 баллов	

7	Записана формула, определяющая связь размаха с двойным радиусом	6
8	Найден угол 1) Если только косинус 2) значение угла	 1 2
	Итого	20

2. Тело плотностью $\rho_0 =$ 1200 кг/м^3, площадью поперечного сечения $S = 0{,}1$ м^2. Один раз тело погружают в жидкость плотностью ρ_1, затем в другую жидкость плотностью ρ_2.
На рисунке представлены графики зависимости силы упругости, действующей в жидкостях на тело. Определите отношение плотностей жидкостей. Ускорение свободного падения в данной задаче взято за 10 м/с^2. Опишите графики. (20 баллов)



Решение.
В точке А сила упругости равна силе тяжести, так как на тело ещё не действует сила Архимеда.

$$F_{уп} = mg \tag{19}$$

Найдем массу тела $m = 4$ кг.
Участки CD и EF соответствуют ситуации, когда тела погружены полностью в жидкости, что позволяет определить длину тела ℓ=0,08 м
Рассмотрим график 1, Вначале сила упругости уменьшалась, так как сила тяжести превышала силу Архимеда, затем в координате х=2,5 см (точка В) сила Архимеда и сила тяжести сравнялись .

$$mg = \rho_1 gV \tag{20}$$

$$mg = \rho_1 gsx \tag{21}$$

$$\rho_1 = \frac{m}{x \cdot S} = 1600\,\frac{кг}{м^3} \tag{22}$$

Далее до точки С сила Архимеда увеличивалась, а сила упругости увеличивалась, то есть теперь тело притапливали, то есть сила упругости и сила тяжести на этом участке направлены в одну сторону Найдем силу Архимеда на участке CD:

$$F_{A1} = mg + F_{уп1} = 56 \text{ Н} \tag{23}$$

где $F_{уп1} = 16$ Н

Рассмотрим график для силы $F_{2.}$. В этом случае сила Архимеда непрерывно нарастает, а сила упругости падает. В очевидно, что плотность второй среды меньше первой. Определим силу Архимеда а участке EF;

$F_A \ = mg - F_{уп2}$=28 Н, где $F_{уп2}$=12Н

Определим отношение плотностей жидкостей:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{mg - F_{уп2}}{mg + F_{уп1}} = \frac{28}{56} = 0{,}5 \qquad (24)$$

Определим плотность второй жидкости;

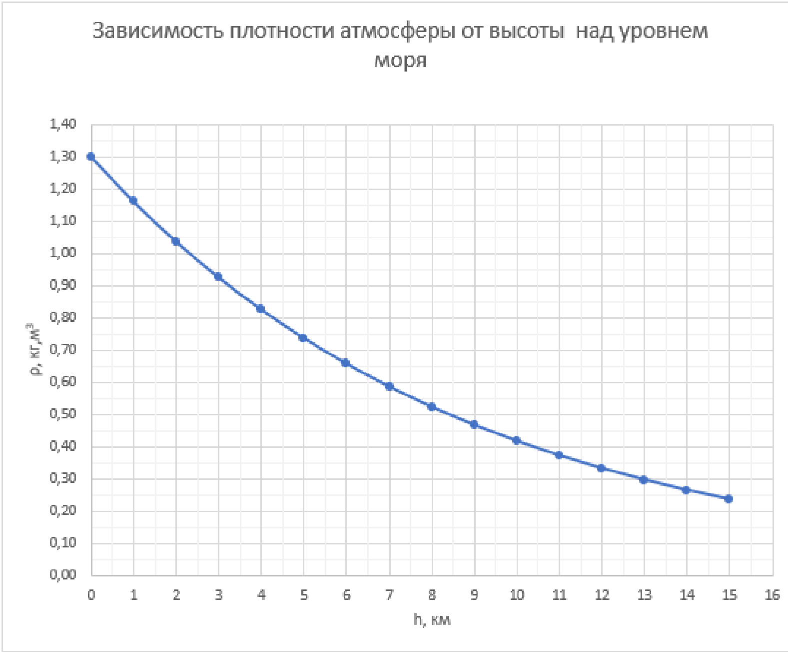
$$\rho_2 = 0{,}6 p_1 = 800 \, \frac{кг}{м^3} \qquad (25)$$

	Критерии	**Баллы**
1	Указано, что В точке А сила упругости равна силе тяжести	2
2	Определена масса груза	1
3	Для точки В записано равенство силы Архимеда и сила тяжести	2
4	Записана формула для расчета плотности первой жидкости	2
5	Получен результат для плотности первой жидкости	1
	Определены силы упругости для тел, после того как оно было погружено в различные жидкости По одному баллу за значения	2
6	Записаны силы Архимеда для случаем, когда тела полностью погружены в жидкость, по 2 балла за формулу	4
7	Записана формула для расчета плотности второй жидкости	2
8	Получено численное значение плотности ворой жидкости	1
	Итого	17

3. Высокоскоростные самолёты летают на высоте от 7 км до 13 км. На этой высоте дуют достаточно сильные ветра. Считайте, что на высоте 7 км скорость ветров $v_{в_1}$ =100 км/ч. Собственная скорость самолёта составляет $v_с = 950$ км/час на всех высотах. Сила сопротивления со стороны воздуха прямо пропорциональна плотности, скорости и площади лобового сечения самолёта, т.е. $F = \alpha\rho s v$, где α - зависит от конструкции самолета.

Известно, что отношение мощности, что развивают двигатели самолета на высоте 10 км к мощности на 7 км составляет $\frac{P_2}{P_1} = 0{,}59$. Определите скорость ветра на высоте 10 км.

Плотность воздуха тоже меняется с высотой. На графике представлена зависимость плотности атмосферы над уровнем моря. (10 баллов)



Решение:

Так как самолёт летит равномерно, то сила тяги самолёта уравновешивает силу сопротивления, действующую на самолёт со стороны воздуха.

$$F = F_c = \alpha\rho v S \tag{26}$$

Мощность находится по формуле

$$P = Fv \qquad =\alpha\rho v^2 s \tag{27}$$

Мощности самолёта на разных высотах равны соответственно:

$$P_1 = \alpha\rho_1 v_1^2 S \tag{28}$$

$$P_2 = \alpha\rho_2 v_2^2 S \tag{29}$$

Отношение мощностей равно:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2 v_2^2}{\rho_1 v_1^2} \tag{30}$$

В формулах (28) и (29) $v_{1,}$и v_2 относительные скорости самолета по отношению к ветру:

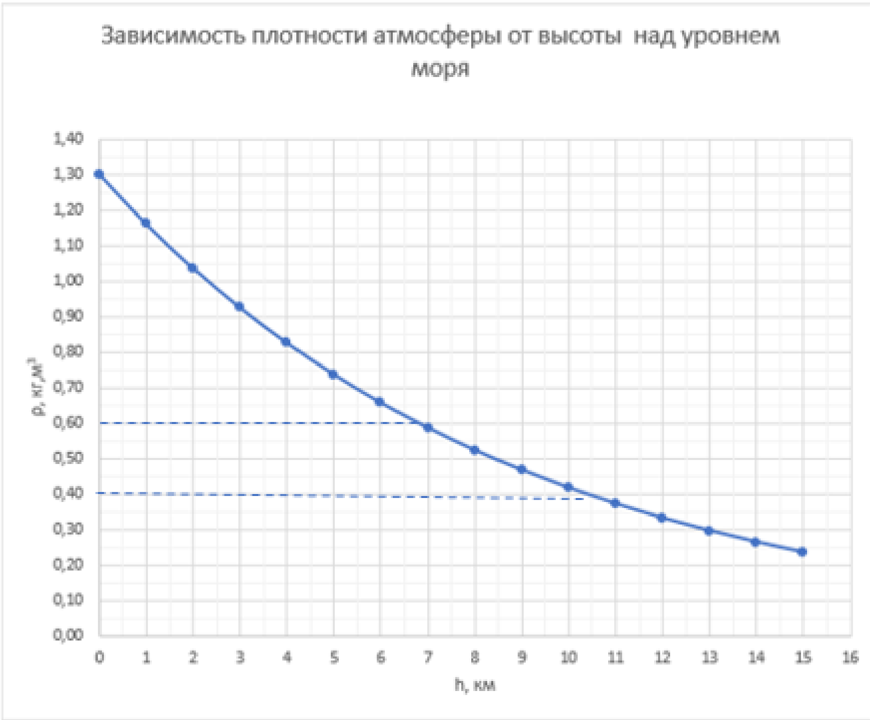
$$v_1 = v_c - v_{\text{в}_1} = 850 \text{ км/ч} \tag{31}$$

$$v_2 = v_c - v_{\text{в}_2} \tag{32}$$

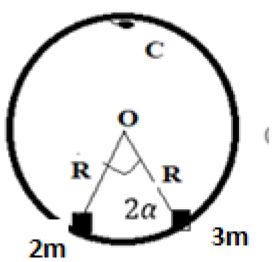
Плотности определяем по графику зависимости плотности атмосферы от высоты. ρ_2=0,4 кг/м^3 плотность воздуха на высоте 10,5 км, $\rho_1 = 0,6$ кг/м^3 плотность воздуха на высоте 7 км.

Из формулы (30). (31). (32) выразим скорость ветра на высоте 10,5 км:

$$v_{b_2} = v_\text{с} - \sqrt{\frac{P_2\rho_1}{P_1\rho_2}} \cdot (v_\text{с} - v_{\text{в}1}) = 150,3 \text{ км/час} \tag{33}$$



	Критерий	Количество баллов
1	Записана формула для мощности в общем виде	1
2	Указано, что сила сопротивления равна силе тяги	1
3	Получена формула для расчета мощности с учетом силы сопротивления в общем виде	2
4	Записаны формулы для расчета мощностей на различных высотах, по одному баллу за формулу	2
5	Записана формула для скорости на высоте h , по одному баллу за формулу для высот h_1 и h_2	2
6	По графику определены значения плотностей, по одному баллу за каждое значение	2
7	Записана формула для расчета скорости ветра на высоте h	2
	Получено численное значение для скорости	1
	Итого	13



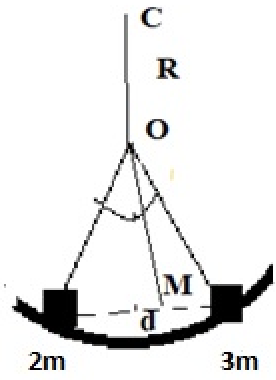
4. **Необычный маятник.** На невесомый обруч радиуса R = 100 см по краю образующей укреплены две гайки массами $m_1 = 2m$ и $m_2 = 3m$ (см. рисунок). Угол между радиусами составляет $2\alpha = 60°$. Обруч свободно подвесили на гвоздь. После того как он успокоился его вывели из положения равновесия. Определите период колебаний такого маятника. (25 баллов).

Решение:

Данную систему можно рассматривать как математический маятник, у которого вся масса системы сосредоточена в точке М.

Координата центра масс лежит на прямой, соединяющей грузики, расстояние между которыми:

$$d = 2R\sin(\alpha), \qquad (33)$$



Тогда координата цента масс x лежит на линии, соединяющей грузы:

$$x = \frac{3m\,d}{3m+2m} = \frac{6}{5}R\sin(\alpha) \qquad (34)$$

При подвешивании такой системы она стремится занять положение такое, чтобы точка M и точка C находились на одной прямой.: Длина OM - это расстояние от центра обруча до центра масс груза:1

$$0M = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos(90-\alpha)} =$$

$$0M = R\sqrt{\frac{76}{100}} = 0{,}872R \ (35)$$

Период колебаний математического маятника равен:

$$T = {}^{2\pi}\sqrt{\frac{\ell}{g}} = {}^{2\pi}\sqrt{\frac{R+0M}{g}} = \sqrt{1{,}872\cdot\frac{R}{g}} = 0{,}19 \text{ с-}$$

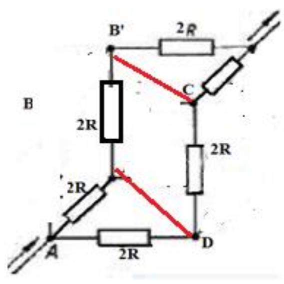
	Критерии	Количество баллов
1	Указано, что данную систему можно рассматривать как математический маятник	4
2	Определено расстояние между грузами	2
3	Определена координата центра масс системы	5
4	Рассчитано расстояние от центра масс до центра окружности	5
5	Записана формула для математического маятника	2
	Выведена формула для периода колебаний такого маятника	6
	Получено численное значение	1
	Итого	25

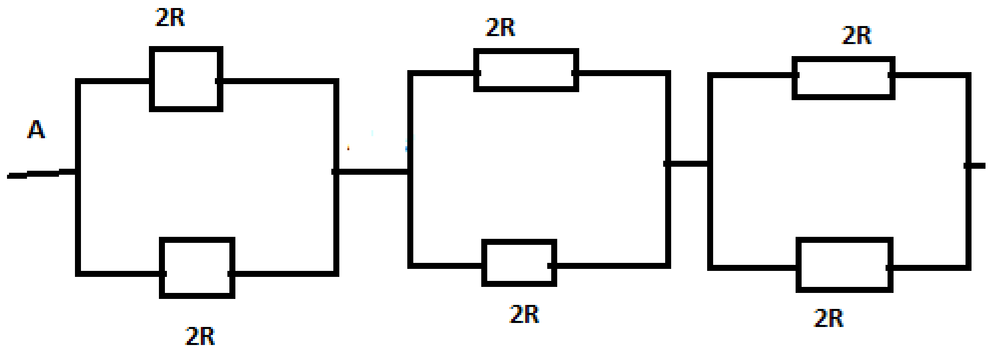
5. На рисунке представлена схема, где значение *R*=50 Ом. В два ребра куба в место сопротивления включены идеальные диоды. Определите полное сопротивление данной цепи, если между точками A и C’ приложено напряжение *U*= 150 В. (25 баллов)

Решение:

При таком подключении ток через диоды не бежит.

Эквивалентная схема представлена на рисунках.





Сопротивление параллельного участка цепи равно:

$$R_1 = R$$

Таких участков у нас три последовательно соединённых, значит полное сопротивление цепи:

$$R_0 = 3R. \qquad (38)$$

Ток бегущий через весь куб:

$$I = \frac{U}{3R} = 1\ A \qquad (39)$$

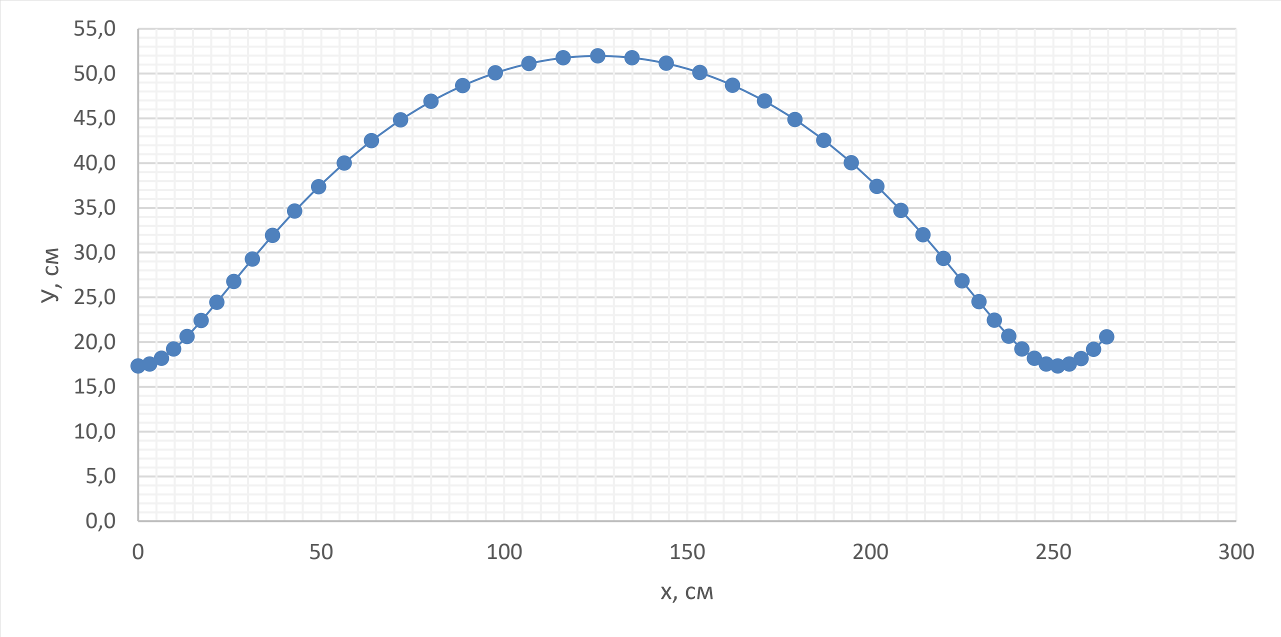
Токи через все оставшиеся сопротивления равны между собой и равны:ребра где есть сопротивления равны между собой:

$$I_1 = \frac{\overline{I}}{2} = 0{,}5\ \text{А}. \qquad (40)$$

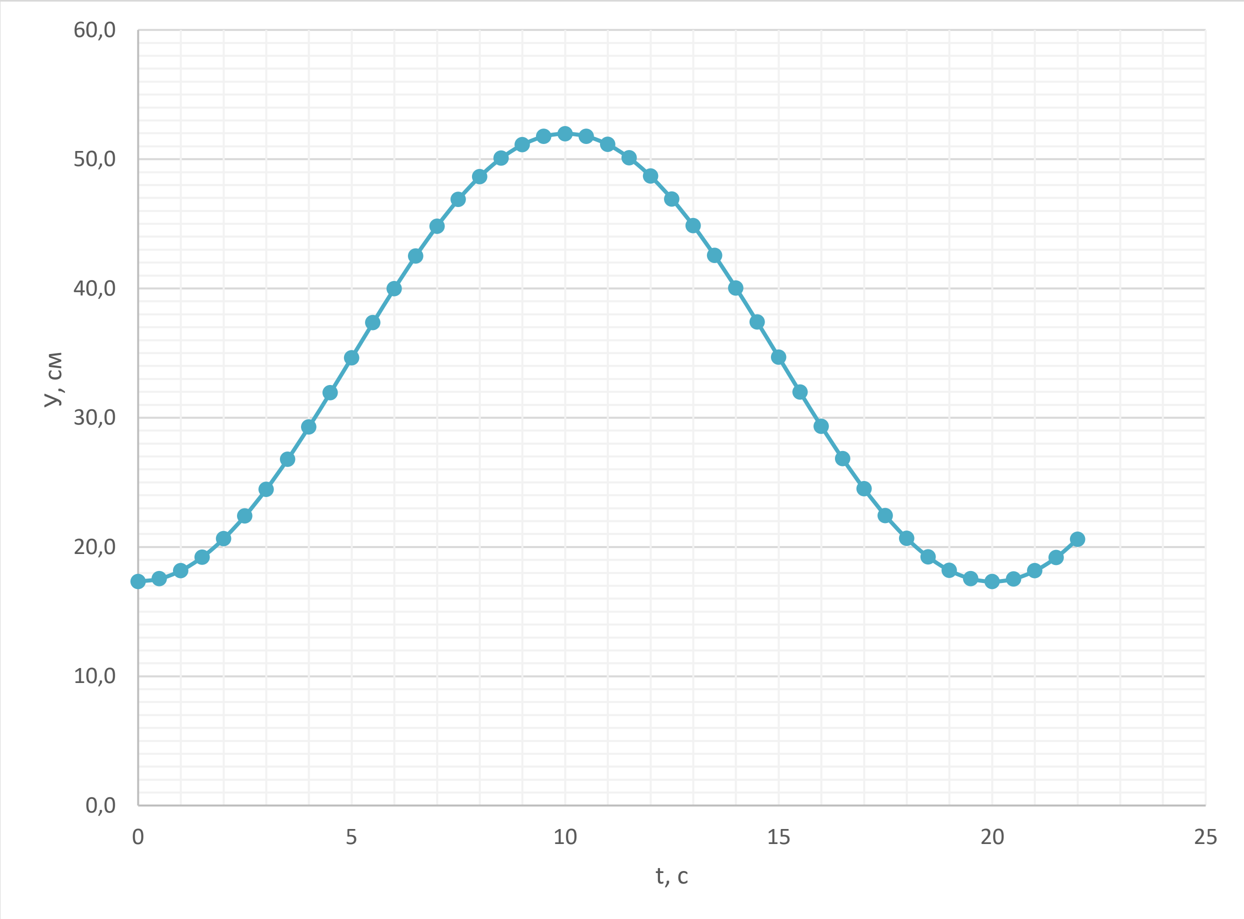
Токи через диоды:

$$I_2 = 0$$

	Критерии	Баллы
1	Указано, что токи через диоды не бегут	4
2	Нарисована эквивалентная схема	11
3	Указано, что токи не бегут через участки схемы BB’, BC, A’D’, DD’.	4
4	Найдено полное сопротивление цепи	2
5	Найдены токи через все оставшиеся сопротивления	4
	Итого	25
	Итого:	25



55,0
50,0
45,0
40,0
35,0
30,0
25,0
20,0
15,0
10,0
5,0
0,0
y, см
0
50
100
150
200
250
300
x, см



60,0
50,0
40,0
30,0
20,0
10,0
0,0
y, см
0
5
10
15
20
25
t, с