ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Если сегодня плохая погода, то завтра с вероятностью 1 будет хорошая погода. Если сегодня хорошая погода, то завтра хорошая погода будет с вероятностью 0,5. Какова вероятность, что 14 марта будет хорошая погода, если 10 марта плохая и хорошая погоды равновероятны? (Погода одинаковая весь день и может быть только плохой или хорошей).

Ответ.$\frac{21}{32}$.

Решение 1. Обозначим P_nвероятность хорошей погоды в в день n, считая 10 марта за первый день. Тогда $P_{n+1} = P_n \cdot 0{,}5 + (1 - P_n) \cdot 1 = 1 - 0{,}5P_n$. По условию $P_1 = \frac{1}{2}$. Находим последовательно $P_2 = \frac{3}{4},\ P_3 = \frac{5}{8},\ P_4 = \frac{11}{16},\ P_4 = \frac{21}{32}$.

Решение 2. Будем обозначатьдень с плохой погодой П, день с хорошей погодой Х, хороший первый день Х_1. День с хорошей погодой, следующий за днем с плохой погодой, будем помечать $\text{Х}_\text{П}$. Рассмотрим все возможные цепочки:

$$\text{Х}_1\text{ХХХХ}, \text{Х}_1\text{ПХ}_\text{П}\text{ХХ},\ \text{Х}_1\text{ПХ}_\text{П}\text{ПХ}_\text{П}, \text{Х}_1\text{ХПХ}_\text{П}\text{Х},\ \text{Х}_1\text{ХХПХ}_\text{П}, \text{ПХ}_\text{П}\text{ХХХ},\ \text{ПХ}_\text{П}\text{ПХ}_\text{П}\text{Х}, \text{ПХ}_\text{П}\text{ХПХ}_\text{П}.$$

Найдем вероятность, учитывая, что $P(\text{Х}) = P(\text{П}) = \frac{1}{2}, P(\text{Х}_\text{П}) = 1$.

$$P = \frac{1}{32} + \frac{4}{16} + \frac{3}{8} = \frac{21}{32}.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15-18 баллов. Более одной ошибки – 5 баллов. Пропущен один вариант – 15 баллов. Пропущено более одного варианта – не больше 5 баллов. Небольшая ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 10 баллов. Существенная ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. Многочлен$P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 3$ имеет корни a, b, c, d. Многочлен $Q(x) = x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 2x + 7$. Найдите $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d)$.

Ответ. 2.

Решение.Поделим $Q(x)$ на $P(x)$: $Q(x) = P(x)(x^2 - 3) + x^2 - 2x - 2$.Поскольку $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$, $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(a + b + c + d) - 8$. $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 3 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем $a + b + c + d = -2$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = -1$. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a + b + c + d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 4 - 2 \cdot (-1) = 6$. Отсюда $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d) = 6 + 4 - 8 = 2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Арифметическая ошибка – 15 баллов. Многочлен $Q(x)$ упрощён с использованием $P(x)$ – 10 баллов. Использована теорема Виета – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

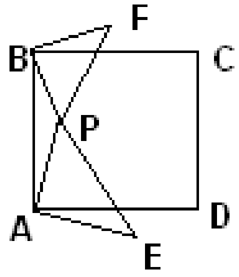
3. Сколько трёхзначных натуральных чисел нельзя представить в виде суммы двух палиндромов? *Палиндром – число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Однозначные числа* $0, 1, \dots, 9$ *также считаются палиндромами. Многозначные палиндромы не могут начинаться с* 0.

Ответ.1.

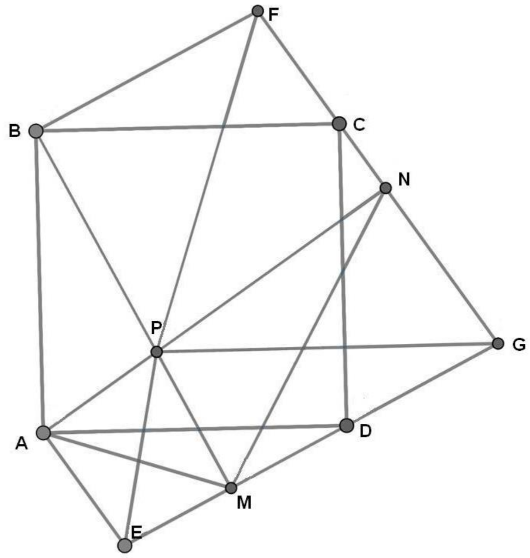
Решение.Если число nпалиндром, то числа $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 9$допускают нужное представление. Поэтому числа от 100 до 110могут быть представлены нужным образом: $100 = 99 + 1$, $101 = 101 + 0$, $102 = 101 + .1..$, $110 = 101 + 9$.Если число nтрёхзначно, является палиндромом, и число десятков не равно 9, то число $n + 10$ также палиндром и может быть представлено как $(n + 10) + 0$. Например, если $n = 373$, $n + 10 = 383 = 383 + 0$.Поскольку разность между трёхзначным полиномом, у которого число десятков не равно 9, и ближайшим справа палиндромом, равна 10 (поскольку ($\overline{ab + 1a} - \overline{aba} = 10$), это означает, что все такие числадопускают нужное представление. Осталось рассмотреть числа вида $n + 10$, где nпалиндром, в котором цифра десятков равна 9, то есть числа $201, 302, 403, 504, 605, 706, 807, 908$. Числа $302, 403, 504, 605, 706, 807, 908$ могут быть представлены в нужном виде по схеме $a = 111 + (a - 111)$, например, $302 = 111 + (302 - 111) = 111 + 191$. Осталось рассмотреть число 201. Пусть число $201 = a + b$. Одно из слагаемых должно быть трёхзначным, тогда первая цифра в нём 1, значит и последняя тоже 1, и второе слагаемое начинается с цифры 0. Но это невозможно. Число 201 нельзя представить как сумму двух палиндромов.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: сформулировано утверждение «Все числа, кроме* 201*, можно представить в виде суммы двух палиндромов» – 5 баллов. Доказано, что число* 201 *нельзя представить в требуемом виде – 5 баллов. Доказано, что все остальные числа, кроме* 201*, можно представить в требуемом виде – 10 баллов. Баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

4. Внутри квадрата $ABCD$ произвольно выбрана точка P, и построены равнобедренные прямоугольные треугольники PAE и PBF, $\angle PAE = \angle PBF = 90°$ (см. рисунок).ПрямыеED и FC пересекаются в точке G. Докажите, что GP перпендикулярно AB.



Решение. Докажем, что треугольники APB и AEDравны.



По условию, $BA = AD, PA = EA. \angle EAD = 90° - \angle PAD, \angle PAB = 90° - \angle PAD$,следовательно, $\angle EAD = \angle PAB$ и $\Delta APB = \Delta AED$. Обозначим Mточкупересечения BPи ED, Nточкупересечения APи FC.Отсюда $\angle BPA = \angle AEM$, и $\angle AEM + \angle APM = 180°$. Значит, $AEMP$вписанный. Рассмотрим углы $PAE = 90°$, и PMD, $\angle PMD = 180° - \angle PAE = 90°$, но и $\angle BAD = 90°$. Равные углы BADи BMD опираются на отрезок BD, значит, точка Mлежит на окружности, описанной около квадрата $ABCD$. Аналогично, $BFNP$ является вписанным, и точка Nлежит на окружности, описанной около квадрата $ABCD$. Кроме этого, $PNGM$вписанный, так как $\angle PMG = 90° = \angle PNG$ (поскольку смежный с PNG угол равен $180° - \angle FBP = 180° - 90° = 90°$). $\angle PGD = \angle PGM = \angle PNM$ (как вписанные углы, опирающиеся на отрезок PMво вписанном четырехугольнике $PNGM$). $\angle PNM = \angle ANM = \angle ABM$(как вписанные углы),$\angle ABM = \angle ABP = \angle ADE$ (как соответствующие углы равных треугольников). Объединяя цепочки равенств, получаем $\angle PGD = \angle ADE$, что означает параллельность GP и AD, то есть GPперпендикулярно AB.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

5. Найдите множество всех целых значений суммы $\frac{x}{y} + \frac{y}{2} + \frac{2}{x}$, где x и y – произвольные натуральные числа.

Ответ.$\{3, 5, 6, 41\}$.

Решение.Пусть ${}^{x}/_{y} + {}^{y}/_{2} + {}^{2}/_{x} = m$– натуральное число. Тогда

$$2x^2 + y^2x + 4y = 2mxy.$$

Еслиx не делится на 2, то y делится на 2. Но в таком случае все члены равенства, кроме $2x^2$, делятся на 4, а $2x^2$ делится только на 2, что невозможно. Значит, x делится на 2, то есть$x = 2z$ для некоторого натурального числа z. Имеем

$$4z^2 + y^2z + 2y = 2myz,$$

откуда yделится на 2 илиzделится на 2.

а) Пусть $y = 2w$.Тогда

$$z^2 + w^2z + w = mwz,$$

откуда w делится на z. Но в таком случае w делится и на z^2, то есть $w = z^2u$ для некоторого натурального u. Теперь имеем

$$1 + z^3u^2 + u = mzu,$$

откуда $u = 1$.Ясно, что число $z^2 + \frac{2}{z}$будет целым только при $z \in \{1, 2\}$, при этом $m \in \{3, 5\}$.

б) Пусть $z = 2w$.Тогда$8w^2 + y^2w + y = 2myw$.Как и выше, отсюда следует, чтоyделится на w^2,то есть $y = w^2u$ для некоторого натуральногоu. Теперь имеем

$$8 + w^3u^2 + u = 2mwu,$$

откуда u делит 8, то есть $u \in \{1, 2, 4, 8\}$.При $u = 2, u = 4$ получаем равенства $2^3 + w^3 2^2 + 2 = 2^2 mw, 2^3 + w^3 2^4 + 2^2 = 2^3 mw$ соответственно, но они невозможны. При $u = 1$ число $m = \frac{9+w^3}{2w}$будет целым только при $w \in \{1, 3, 9\}$,и тогда $m \in \{5, 6, 41\}$.Наконец, при u =8 число $m = \frac{1+4w^3}{w}$будет целым только при $w = 1$ (и тогда $m = 5$).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть небольшие пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Обоснование только частичное – 10 баллов. Указаны все верные значения, но не показано, как они выбраны, и не доказано, что нет других – по 1 баллу за значение. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение верно начато – 2 балла.*

Вариант 2

1. Если сегодня плохая погода, то завтра с вероятностью 1 будет хорошая погода. Если сегодня хорошая погода, то завтра хорошая погода будет с вероятностью 0,4. Какова вероятность, что 7 марта будет хорошая погода, если 3 марта плохая и хорошая погоды равновероятны? (Погода одинаковая весь день и может быть только плохой или хорошей).

Ответ.0,6088.

Решение 1.Обозначим P_nвероятность хорошей погоды в день n, считая 3 марта за первый день. Тогда $P_{n+1} = P_n \cdot 0{,}4 + (1 - P_n) \cdot 1 = 1 - 0{,}6P_n$. По условию $P_1 = \frac{1}{2}$. Находим последовательно $P_2 = 0{,}7,\ P_3 = 0{,}58,\ P_4 = 0{,}652,\ P_4 = 0{,}6088$.

Решение 2.Будем обозначатьдень с плохой погодой П, день с хорошей погодой Х, хороший первый день $Х_1$. День с хорошей погодой, следующий за днем с плохой погодой, будем помечать $Х_П$. Рассмотрим все возможные цепочки:

$$Х_1ХХХХ, Х_1ПХ_ПХХ,\ Х_1ПХ_ППХ_П, Х_1ХПХ_ПХ,\ Х_1ХХПХ_П, ПХ_ПХХХ,\ ПХ_ППХ_ПХ, ПХ_ПХПХ_П.$$

Найдем вероятность, учитывая, что $P(Х_1) = P(П_1) = 0{,}5, P(Х) = 0{,}4, P(П) = 0{,}6, P(Х_П) = 1$.

$$P = 0{,}5 \cdot (0{,}4)^4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 1 \cdot (0{,}4)^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 1 \cdot 0{,}6 \cdot 1 +\ 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 1 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot (0{,}4)^2 \cdot 0{,}6 \cdot 1 +\ 0{,}5 \cdot 1 \cdot\ (0{,}4)^3\ + 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}6 \cdot 1 \cdot 0{,}4 +\ 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 =\ 0{,}6088.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15-18 баллов. Более одной ошибки – 5 баллов. Пропущен один вариант – 15 баллов. Пропущено более одного варианта – не больше 5 баллов. Небольшая ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 10 баллов. Существенная ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. Многочлен $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$ имеет корни a, b, c, d. Многочлен $Q(x) = x^6 - x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x + 3$. Найдите $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d)$.

Ответ.10.

Решение.Поделим $Q(x)$ на $P(x)$: $Q(x) = P(x)(x^2 - 1) + x^2 - x + 2$.Поскольку $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0, Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a +\ b +\ c +\ d) + 8. P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$.Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем $a +\ b +\ c +\ d = 1,\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = -1. a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a +\ b +\ c +\ d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$. Отсюда $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d) = 3 - 1 + 8 = 10$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Арифметическая ошибка – 15 баллов. Многочлен $Q(x)$ упрощён с использованием $P(x)$ – 10 баллов. Использована теорема Виета – 10 баллов. Ошибка в теореме Виета – не больше 10 баллов за всё решение. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

3. Сколько двузначных натуральных чисел нельзя представить в виде суммы двух палиндромов? *Палиндром – число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Однозначные числа* $0, 1, \dots, 9$ *также считаются палиндромами. Многозначные палиндромы не могут начинаться с* 0.

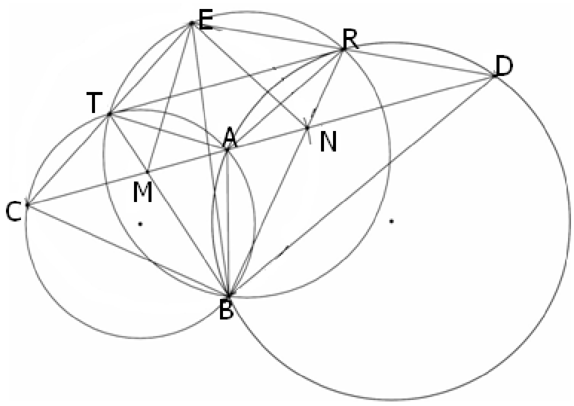
Ответ. 8.

Решение. Если число nпалиндром, то числа $n, n+1, n+2, \dots, n+9$допускают нужное представление. Поэтому числа от 10 до 20могут быть представлены нужным образом: $10 = 9+1, 11 = 11+0, 12 = 11+1.., 20 = 11+9$.Если число nдвузначно иявляется палиндромом, то число $n+11$ также палиндром, и может быть представлено как $(n+11)+0$. Например, если $n = 55, n+11 = 66 = 66+0$. Поскольку разность между соседними двузначными полиномами равна 11, это означает, что все такие числадопускают нужное представление. Осталось рассмотреть числа вида $n+10$, где nпалиндром, то есть числа $21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$. Пусть число $n+10 = a+b$. Если и a иb двузначные, то правая часть делится на 11, а левая нет. Одно из слагаемых должно быть однозначным, то есть числом из набора $0, 1, \dots 9$. Но разность 10 и любого числа из набора не кратна 11. Числа $21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$ нельзя представить как сумму двух палиндромов.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: сформулировано утверждение «Все числа, кроме* $21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$, *можно представить в виде суммы двух палиндромов» – 5 баллов. Доказано, что числа* $21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$ *нельзя представить в требуемом виде – 5 баллов. Доказано, что все остальные числа, кроме указанных, можно представить в требуемом виде – 10 баллов. Баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

4. Окружности w_1 и w_2 пересекаются в точках A и B. Прямая l расположена ближе к A, чем к B, и является общей касательной окружностей w_1 и w_2,касаясь их соответственно в точках T и R. Через точку A проведена параллельно касательной l прямая, пересекающая w_1 в точке C, w_2 в точке D. TC и RD пересекаются в точке E. Докажите, что $TBRE$ вписанный четырехугольник.

Решение. Докажем, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам отрезок общей касательной к ним между точками касания.



Пусть прямые ABи TR пересекаются в точке K. Тогда по свойству касательной и секущей$KT^2 = KA \cdot KB, KR^2 = KA \cdot KB$, откуда $KT = KR$.По теореме о пропорциональных отрезках прямая AB делит пополам отрезок MN, то есть MA=AN. $\angle ETR = \angle ECD$, а $\angle ECD = \angle ATR$ (так как эти углы измеряются дугой TA окружности w_1). Аналогично, $\angle ERT = \angle EDC = \angle ART$. Заметим, что $\angle TBA = \angle ATR$, обозначим$\angle TBA = \angle ATR = \angle ETR = \alpha$.Обозначимтакже $\angle RBA = \angle TRA = \angle TRE = \beta$. Отсюда $\angle TER + \angle TBR = (180° - \alpha - \beta) + (\alpha + \beta) = 180°$.Следовательно, $TBRE$вписанный четырехугольник.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

5. Найдите множество всех целых значений суммы $\frac{x}{y}+\frac{y}{3}+\frac{3}{x}$, где x и y– произвольные натуральные числа.

Ответ.$\{3, 5, 6, 66\}$.

Решение.Пусть ${}^{x}/_{y}+{}^{y}/_{3}+{}^{3}/_{x}=m$– натуральное число. Тогда

$$3x^2+y^2x+9y=3mxy.$$

Еслиx не делится на 3, то y делится на 3. Но в таком случае все члены равенства, кроме $3x^2$, делятся на 9, а $3x^2$ делится только на 3, что невозможно. Значит, x делится на 3, то есть$x=3z$для некоторого натурального числа z. Имеем

$$9z^2+y^2z+3y=3myz,$$

откуда yделится на 3 илиzделится на 3.

а) Пусть $y=3w$.Тогда

$$z^2+w^2z+w=mwz,$$

откуда w делится на z. Но в таком случае w делится и на z^2, то есть $w=z^2u$для некоторого натуральногоu.Теперь имеем $1+z^3u^2+u=mzu$,откуда $u=1$.Ясно, что число $z^2+\frac{2}{z}$будет целым только при $z\in\{1,2\}$, при этом $m\in\{3,5\}$.

б) Пусть $z=3w$.Тогда$27w^2+y^2w+y=3myw$.Как и выше, отсюда следует, чтоyделится на w^2,то есть $y=w^2u$для некоторого натуральногоu.Теперь имеем

$27+w^3u^2+u=3mwu$,откуда u делит 27, то есть $u\in\{1,3,9,27\}$.При $u=3, u=9, u=27$ получаем невозможные равенства $3^3+w^33^2+3=3^2mw, 3^3+w^33^4+3^2=3^3mw,\ 2\cdot 3^3+w^33^6=3^4mw$соответственно.При $u=1$ число $m=\frac{28+w^3}{3w}$, откуда w– делитель 28, при этом $28+w^3\equiv w^3+1\equiv 0 \pmod 3$, то есть $w\equiv -1 \pmod 3$. Следовательно, $w\in\{2,14\}$,и тогда $m\in\{6,66\}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть небольшие пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Обоснование только частичное – 10 баллов. Указаны все верные значения, но не показано, как они выбраны, и не доказано, что нет других – по 1 баллу за значение. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение верно начато – 2 балла. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

Вариант 3

1. Если сегодня плохая погода, то завтра с вероятностью 1 будет хорошая погода. Если сегодня хорошая погода, то завтра хорошая погода будет с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что 5 марта будет хорошая погода, если 1 марта плохая и хорошая погоды равновероятны? (Погода одинаковая весь день и может быть только плохой или хорошей).

Ответ.0,8328.

Решение.Обозначим P_nвероятность хорошей погоды в в день n, считая 1 марта за первый день. Тогда $P_{n+1}=P_n\cdot 0{,}8+(1-P_n)\cdot 1=1-0{,}2P_n$. По условию $P_1=0{,}5$. Находим последовательно $P_2=0{,}9,\ P_3=0{,}82,\ P_4=0{,}836,\ P_4=0{,}8328$.

Решение.Будем обозначатьдень с плохой погодой П, день с хорошей погодой Х, хороший первый день Х_1. День с хорошей погодой, следующий за днем с плохой погодой, будем помечать $\text{Х}_\text{П}$. Рассмотрим все возможные цепочки: $\text{Х}_1\text{ХХХХ}, \text{Х}_1\text{ПХ}_\text{П}\text{ХХ}, \text{Х}_1\text{ПХ}_\text{П}\text{ПХ}_\text{П}, \text{Х}_1\text{ХПХ}_\text{П}\text{Х},\ \text{Х}_1\text{ХХПХ}_\text{П}, \text{ПХ}_\text{П}\text{ХХХ},\ \text{ПХ}_\text{П}\text{ПХ}_\text{П}\text{Х}, \text{ПХ}_\text{П}\text{ХПХ}_\text{П}$.Найдем вероятность, учитывая, что $P(\text{Х}_1)=P(\text{П}_1)=0{,}5, P(\text{Х})=0{,}8, P(\text{П})=0{,}2, P(\text{Х}_\text{П})=1$.

$$P=0{,}5\cdot(0{,}8)^4+0{,}5\cdot 0{,}2\cdot 1\cdot(0{,}8)^2+0{,}5\cdot 0{,}2\cdot 1\cdot 0{,}2\cdot 1+\ 0{,}5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 1\cdot 0{,}8+$$
$$0{,}5\cdot(0{,}8)^2\cdot 0{,}2\cdot 1+\ 0{,}5\cdot 1\cdot\ (0{,}8)^3\ +0{,}5\cdot 1\cdot 0{,}2\cdot 1\cdot 0{,}8+\ 0{,}5\cdot 1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}8328.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15-18 баллов. Более одной ошибки – 5 баллов. Пропущен один вариант – 15 баллов. Пропущено более одного варианта – не больше 5 баллов. Небольшая ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 10 баллов. Существенная ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов.*

Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.

2. Многочлен $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 1$ имеет корни a, b, c, d. Многочлен $Q(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 4$. Найдите $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d)$.

Ответ. $-66(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 597$.

Решение. Поделим $Q(x)$ на $P(x)$: $Q(x) = P(x)(x^2 - 6x + 22) - 66x^3 + 39x^2 - 6x + 18$. Поскольку $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 1 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$. Тогда $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d) = -66(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 39(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 6(a + b + c + d) + 4 \cdot 18$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем $a + b + c + d = -3$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = -2$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a + b + c + d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 9 - 2 \cdot (-2) = 13$. Отсюда $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d) = -66(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 39 \cdot 13 - 6 \cdot (-3) + 72 = -66(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 597$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Арифметическая ошибка – 15 баллов. Многочлен $Q(x)$ упрощён с использованием $P(x)$ – 10 баллов. Использована теорема Виета – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

3. Сколько среди натуральных чисел от 50 до 250 включительно таких, которые нельзя представить в виде суммы двух палиндромов? *Палиндром – число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Однозначные числа* $0, 1, \dots, 9$ *также считаются палиндромами. Многозначные палиндромы не могут начинаться с* 0.

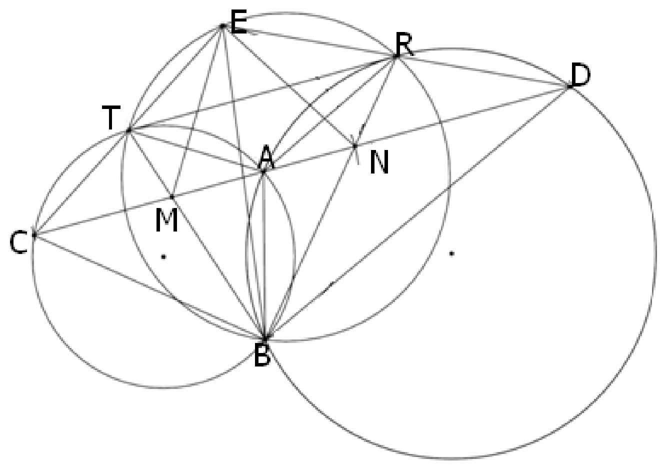
Ответ. 6.

Решение. Если число n палиндром, то числа $n, n+1, n+2, \dots, n+9$ допускают нужное представление. Если число n двузначно и является палиндромом, то число $n + 11$ также палиндром, и может быть представлено как $(n + 11) + 0$. Например, если $n = 55$, $n + 11 = 66 = 66 + 0$. Поскольку разность между соседними двузначными полиномами равна 11, это означает, что все такие числа допускают нужное представление. Осталось рассмотреть двузначные числа вида $n + 10$, где n палиндром, то есть числа $54, 65, 76, 87, 98$. Пусть число $n + 10 = a + b$. Если и a и b двузначные, то правая часть делится на 11, а левая нет. Одно из слагаемых должно быть однозначным, то есть числом из набора $0, 1, \dots 9$. Но разность 10 и любого числа из набора не кратна 11. Числа $54, 65, 76, 87, 98$ нельзя представить как сумму двух палиндромов. Если число n трёхзначно, является палиндромом, и число десятков не равно 9, то число $n + 10$ также палиндром и может быть представлено как $(n + 10) + 0$. Поскольку разность между трёхзначным полиномом, у которого число десятков не равно 9, и ближайшим справа палиндромом, равна 10 (поскольку $\overline{ab + 1a} - \overline{aba} = 10$), это означает, что все такие числа допускают нужное представление. Осталось рассмотреть трёхзначные числа вида $n + 10$, где n палиндром, в котором цифра десятков равна 9, от 50 до 250 одно такое число, это 201 $(201 = 191 + 10)$. Пусть число $201 = a + b$. Одно из слагаемых должно быть трёхзначным, тогда первая цифра в нём 1, значит и последняя тоже 1, и второе слагаемое начинается с цифры 0. Но это невозможно. Число 201 нельзя представить как сумму двух палиндромов. Таким образом, в заданном интервале существует 6 чисел, которые нельзя представить в виде суммы двух палиндромов: $54, 65, 76, 87, 98, 201$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: сформулировано утверждение «Все числа, кроме* $54, 65, 76, 87, 98, 201$, *можно представить в виде суммы двух палиндромов» – 5 баллов. Доказано, что числа* $54, 65, 76, 87, 98, 201$ *нельзя представить в требуемом виде – 5 баллов. Доказано, что все остальные числа, кроме 201, можно представить в требуемом виде – 10 баллов. Баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

4. Окружности w_1 и w_2пересекаются в точках A и B. Прямая l расположена ближе к A, чем к B, и является общей касательной окружностей w_1 и w_2, касаясь их соответственно в точках T и R. Через точку A проведена параллельно касательной l прямая, пересекающая w_1 в точке C, w_2 в точке D. Прямые TC и RD пересекаются в точке E. Докажите, что BE – биссектриса угла CBD.

Решение.Пусть прямые TB и CD пересекаются в точке M; прямые RB и CD пересекаются в точке N.Докажем, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам отрезок общей касательной к ним между точками касания.



Пусть прямые ABи TR пересекаются в точке K. Тогда по свойству касательной и секущей$KT^2 = KA \cdot KB, KR^2 = KA \cdot KB$, откуда $KT = KR$.По теореме о пропорциональных отрезках прямая AB делит пополам отрезок MN, то есть MA=AN. $\angle ETR = \angle ECD$, а $\angle ECD = \angle ATR$ (так как эти углы измеряются половиной дугиTA окружности w_1). Аналогично, $\angle ERT = \angle EDC = \angle ART$. Заметим, что $\angle TBA = \angle ATR$, обозначим$\angle TBA = \angle ATR = \angle ETR = \alpha$.Обозначимтакже $\angle RBA = \angle TRA = \angle TRE = \beta$.
Отсюда $\angle TER + \angle TBR = (180° - \alpha - \beta) + (\alpha + \beta) = 180°$.Следовательно, TBR–вписанный четырехугольник. Тогда $\angle RBE = \angle RTE = \alpha$. Поскольку $\angle RBD = \angle RAD = \beta$,получаем, что$\angle EBD = \propto + \beta$. Аналогично получаем$\angle CBE = \angle CBT + \angle TBE$. При этом$\angle CBT = \angle CAT$ (опираются на одну дугу), $\angle CAT = \angle RTA$(как соответственные), $\angle RTA = \angle RTE$следовательно, $\angle CBT = \angle RTE = \propto . \angle TRE = \beta$.Таким образом, $\angle DBE = \propto + \beta = \angle CBE$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

5. Найдите множество всех целых значений суммы $\frac{x}{y} + \frac{y}{5} + \frac{5}{x}$, где x и y– произвольные натуральные числа.

Ответ.$\{3, 5, 19, 41\}$.

Решение.Пусть $x/_y + y/_5 + 5/_x = m$– натуральное число. Тогда

$$5x^2 + y^2x + 25y = 5mxy.$$

Еслиx не делится на 5, то y делится на 5. Но в таком случае все члены равенства, кроме $5x^2$, делятся на 25, а $5x^2$ делится только на 5, что невозможно. Значит, x делится на 5, то есть$x = 5z$для некоторого натурального числа z. Имеем

$$25z^2 + y^2z + 5y = 5myz,$$

откуда yделится на 5 илиzделится на 5.

а) Пусть $y = 5w$.Тогда

$$z^2 + w^2z + w = mwz,$$

откуда w делится на z. Но в таком случае w делится и на z^2, то есть $w = z^2u$для некоторого натуральногоu.Теперь имеем

$$1 + z^3u^2 + u = mzu,$$

откуда $u = 1$.Ясно, что число $z^2 + \frac{2}{z}$будет целым только при $z \in \{1, 2\}$, при этом $m \in \{3, 5\}$.
б) Пусть $z = 5w$.Тогда$125w^2 + y^2w + y = 5myw$.
Как и выше, отсюда следует, чтоyделится на w^2,то есть $y = w^2u$для некоторого натуральногоu.Теперь имеем

$$125 + w^3u^2 + u = 5mwu,$$

откуда u делит 125, то есть $u \in \{1, 5, 25, 125\}$.При $u = 5, u = 25, u = 125$ получаем невозможные равенства
$5^3 + w^3 5^2 + 5 = 5^2 mw, 5^3 + w^3 5^4 + 5^2 = 5^3 mw,\ 2 \cdot 5^3 + w^3 5^6 = 5^4 mw$ соответственно.
При $u = 1$ число $m = \frac{126+w^3}{5w}$, откуда w – делитель 126, при этом $126 + w^3 \equiv w^3 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, то есть $w \equiv -1 \pmod 5$. Следовательно, $w \in \{9, 14\}$,и тогда $m \in \{19, 41\}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть небольшие пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Обоснование только частичное – 10 баллов. Указаны все верные значения, но не показано, как они выбраны, и не доказано, что нет других – по 1 баллу за значение. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение верно начато – 2 балла. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

Вариант 4

1. Три человека независимо задумали по одному целому числу от 1 до 9. Какова вероятность, что произведение этих трёх чисел делится на 10?
Ответ.$P = \frac{52}{243}$.
Решение 1. Обозначим событие $A =${Произведение 3 чисел не делится на 10}, $B =${Среди3 чисел нет 5}, $C =${Среди 3 чисел нет чётного}. Тогда$A = B + C, P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC) = \left(\frac{8}{9}\right)^3 + \left(\frac{5}{9}\right)^3 - \left(\frac{4}{9}\right)^3$.Вероятность искомого события равна $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^3 - \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{52}{243}$.
Решение 2. Рассматриваем событие {Произведение 3 чисел делится на 10}.Число всех исходов равно 9^3. Число благоприятных исходов равно $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 156$. Первое слагаемое – количество наборов с двумя числами, кратными 5, и одним, кратным 2. Второе слагаемое – количество наборов с одним числом, кратным 5, и двумя, кратным 2.Третье слагаемое – количество наборов ровно с одним числом, кратным 5, и ровно одним, кратным 2. $P = \frac{156}{729} = \frac{52}{243}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. Известно, что числа a, b, c, $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$ – целые. Обязательно ли являются целыми все три числа $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$?
Ответ. Да.
Решение.Рассмотрим многочлен $P(x) = \left(x - \frac{ab}{c}\right)\left(x - \frac{ac}{b}\right)\left(x - \frac{bc}{a}\right)$.
$P(x) = x^3 - x^2\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right) + x(a^2 + b^2 + c^2) - abc$.Все его коэффициенты – целые числа. Многочлен $P(x) = \left(x - \frac{ab}{c}\right)\left(x - \frac{ac}{b}\right)\left(x - \frac{bc}{a}\right)$ имеет корни $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$, которые рациональны как отношения целых чисел. Но рациональные корни приведённого многочлена с целыми коэффициентами являются целыми числами. Действительно, предположив, что существует несократимая дробь $\frac{p}{q}$, являющаяся корнем $P(x)$. Получаем $\left(\frac{p}{q}\right)^3 + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^2 +$

$a_2\left(\frac{p}{q}\right)+a_3=0$,или $\frac{p^3}{q}+a_1p^2+a_2p^2q+a_3q^2=0$. Поскольку первое слагаемое – несократимая дробь, а три следующих слагаемых – целые числа, такое равенство невозможно.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За пробелы в доказательстве снимается от 1 до 5 баллов. Есть рассуждения о возможных количествах единиц и двоек, чётных и нечётных чисел, и возможности их переноса, но нет строгого доказательства – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

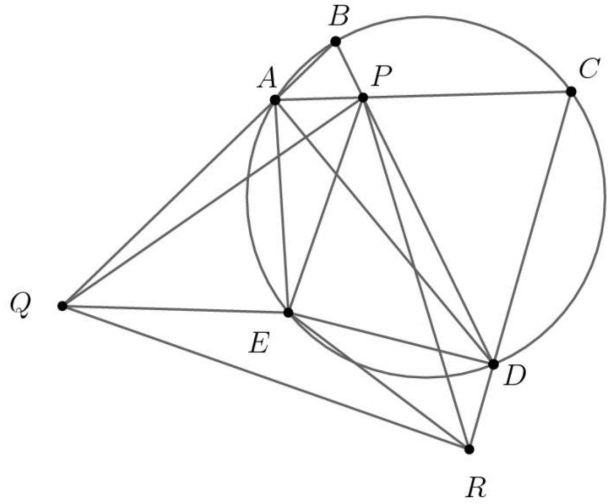
3. По кругу растёт шесть деревьев. Утром на каждом дереве сидел один бельчонок. Вечером опять на каждом дереве сидел один из тех же шести бельчат, но ни один бельчонок не сидел на том же самом дереве, и не сидел на дереве, которое было соседним с тем, которое он занимал утром. Сколькими способами это можно было сделать?
Ответ.20.
Решение 1. Каждый бельчонок должен сесть на одно из трёх определённых мест подряд, поэтому этот вопрос ничем не отличается от подсчёта случаев, когда каждый либо остается на месте, либо перемещаетсяна одно место влево или вправо.Предположим, что утром бельчата сидели в порядке $ABCDEF$.
1) Все остаются на своих местах. Тогда есть только один случай ($ABCDEF$). Если A перемещается вправо на местоB, у B есть два варианта действий. B может переместиться влево (на место A) или переместиться вправо на место C.
2) Рассмотрим движение по кругу. Если B перемещается на место C, то единственный способ для –переход кD, переход D к E, переход E к F и переход F к A, в результате чего достигается $FABCDE$. Каждый бельчонок может также двигаться влево($BCDEF$A). Таким образом, тут два случая.
3)Некоторые бельчата из соседних пар AB, CD, EF меняются местами, оставаясь в той же паре. Если A перемещается на место B, B перемещается на место A. C может остаться на месте, или переместиться на D,Eможет остаться на месте, или переместиться на F. Это даёт$2\cdot2\cdot2=8$ случаев, но бельчата не могут все оставаться на месте, поскольку мы уже посчитали такую возможность в случае 1, и, следовательно, здесь 7 случаев. Кроме этого, могут быть пары $BC, DE,\ F$A, что даёт еще 7 случаев.
4)Меняются местами не в соседних парах, а в парах, разделённых одним бельчонком. Если бы A и B поменялись местами, D и E могли бы поменяться местами, и это не было бы учтено предыдущими группировками. При этом два бельчонка, разделяющие пары, сидят на прежних местах. Это может происходить в трёх случаях (A и D не движутся, B и E не движутся,C и F не движутся). Всего случаев $1+2+7+7+3\ =\ 20$.
Решение 2.Предположим, что утром бельчата сидели в порядке $ABCDEF$. Составим таблицу для возможных новых позиций для A, B, C, D, E, F (пустые клетки обозначают невозможные позиции.

		A	A	A	
			B	B	B
C				C	C
D	D				D
E	E	E			
	F	F	F		

1) На первом месте C. Пусть на первом и втором местах Cи D. Тогда на последнем месте B, на предпоследнем A. Получается всего одна комбинация: $CDEFAB$. Пусть на первом и втором местах Cи E, тогда на третьем F или A, получаются три комбинации: $CEFABD, CEFBAD, CEAFBD.$ Пусть на первом и втором местах Cи F, тогда на третьем E или A, получаются две комбинации: $CFEABD, CFEBAD$,итого 6 комбинаций.

2) На первом месте D. Пусть на первом и втором местах Dи E. Возможны комбинации $DEAFBC, DEAFCB, DEFABC, DEFACB, DEFBAC$. Пусть на первом и втором местах Dи F. Возможны комбинации$DFEABC, DFEACB, DFEBAC$. В этом случае 8 комбинаций.
3) На первом месте E. Пусть на первом и втором местах E и D. Возможны комбинации$EDAFBC, EDAFCB,\ EDFBAC, EDFABC,\ EDFACB$. Пусть на первом и втором местах E и F. Возможна только одна комбинация$EFABCD$.Всего 6 комбинаций. Итого $6 + 8 + 6 = 20$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном (в основном) решении есть ошибка – 15 баллов. Не учтено небольшое количество способов – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

4. На окружности по часовой стрелке поставлены точки A, B, C, D, E. Известно, что$AE = DE$. Пересечение отрезков AC и BD обозначим P. На продолжении отрезка AB за точку Aвыбрали точкуQ так, что $AQ = DP$. На продолжении отрезка CD за точку D выбрали точку R так, что $AP = DR$. Докажите, что прямые PE и QR перпендикулярны.
Решение. Докажем, что треугольники PDRи QAPравны. По условию, $AQ = DP, AP = DR$.



Угол, дополняющий угол PAQ до 180°, измеряется половиной дуги BC, так же, как и угол, дополняющий до 180° уголPDR, поэтому $\angle PAQ = \angle PDR$. Следовательно $\Delta\, PDR$=ΔQAP, и $QP = PR$. Докажем, что треугольники EDRи EAPравны.$\angle EDR = 180° - \angle EDC$(как смежные углы). $\angle EAP = 180° - \angle EDC$ (как противоположные углы вписанного четырехугольника). Следовательно, $\angle EDR = \angle EAP$. По условию,$AE = DE, AP = DR$.Следовательно $\Delta\, EDR = \Delta\, EAP$, и $EP = ER$.Докажем, что треугольники QAEи PDEравны.По условию,$AE = DE, AQ = DP$.Угол PDE измеряется половиной дуги BAE. УголQAEизмеряется полусуммой дуг BA и AE, то есть половиной дуги BAE. Значит, $\angle QAE = \angle PDE$, и $\Delta\, QAE$= $\Delta\, PDE$, откуда $EQ = EP$. Учитывая равенство $EP = ER$, получаем, что точка Eявляется центром описанной окружности треугольника QPR, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре стороны QR. Но ранее было доказано, что $QP = PR$, то есть QR – основание равнобедренного треугольника, и серединный перпендикуляр совпадает с высотой, то есть проходит через точку P.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

5. Найдите все пары (a, b)натуральных чисел, для которых $27ab + (1 - a + b)^3 = 0$.
Ответ.$(a, b) = ((v + 1)^3, v^3)$, где v– любое натуральное число.
Решение. Из уравнения следует, что a и b должны быть взаимно простыми. Действительно, если p – их общий простой делитель, то p делит $1 - a + b$, а значит, является делителем 1. Кроме того, $1 - a + b$ делится на 3. Имеем $ab = \left(\frac{a-b-1}{3}\right)^3$. В частности, произведение ab – точный куб. Следовательно, каждый из сомножителей должен быть точным ку-

бом: $a = u^3, b = v^3$для некоторых натуральных чисел u, v. В этом случае уравнение упрощается до $3uv + 1 - u^3 + v^3 = 0$.Теперь заметим, что левую часть можно разложить на множители: $3uv + 1 - u^3 + v^3 = (1 - u + v)(u^2 + v^2 + uv + u - v + 1)$. Имеем $u^2 + v^2 + uv + u - v + 1 > 0$, поэтому $1 - u + v = 0, u = v + 1$.Таким образом, получаем $(a, b) = ((v + 1)^3, v^3)$, где vможет быть любым натуральным числом.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Решение не закончено или содержит ошибку – 10 баллов. Получен верный ответ, но не доказано, что нет других ответов – 10 баллов. Верный ответ записан путем обобщения нескольких примеров, не доказано, что формула подходит для любых значений, и что нет других ответов – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*