ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

5 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

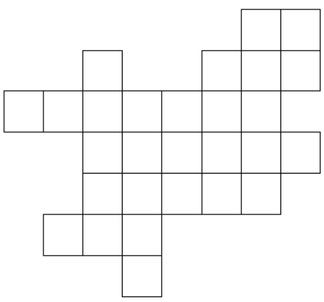
1.Петя, Вася, Сережа и Миша катались с горки. Фамилия одного из мальчиков была Петров, другого Васильев, у остальных – Сергеев и Михайлов. Петя скатился с горки на два раза больше, чем Петров. Вася скатился с горки на два раза больше, чем Васильев, Сережа скатился с горки на два раза больше, чем Сергеев. Кто скатился с горки больше, и на сколько раз, Миша или Михайлов?

Ответ. Михайлов скатился с горки на 6 раз больше, чем Миша.

Решение. Петя, Вася, Сережа и Миша скатились вместе столько же раз, сколько Петров, Васильев, Сергеев и Михайлов вместе, потому что это одни и те же люди. Одну и ту же сумму мы представили двумя способами, в первом случае слагаемые брали по именам, а во втором по фамилиям. Но по условию каждое из первых трёх слагаемых первой суммы на 2 больше соответствующего слагаемого второй суммы. Значит, чтобы суммы уравнялись, последнее слагаемое первой суммы должно быть на 6 меньше.

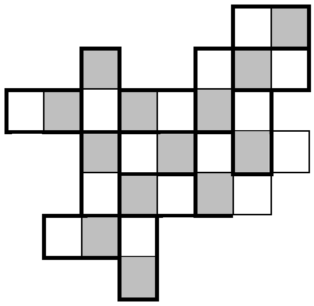
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, плашка – прямоугольник 1×2, состоит из двух таких же клеток. Сколько плашек можно разместить в фигуре без наложения?



Ответ. 13.

Решение. Всего клеток 28. Закрасим клетки в шахматном порядке как на рисунке ниже. Любая плашка закрывает ровно одну закрашенную клетку, а всего закрашенных клеток 13, поэтому 14 плашек разместить нельзя. 13 плашек можно разместить, например, так.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: есть утверждение, что нельзя разместить* 14 *плашек – 5 баллов; это утверждение доказано – 8 баллов; дан пример размещения – 7 баллов, баллы суммируются. Доказательство, что нельзя разместить* 14 *плашек, опирается на частные случаи – 5 баллов за эту часть. Таким образом, частичное доказательство и есть пример размещения – 17 баллов, если нет доказательства, есть пример – 12 баллов, есть доказательство, нет примера – 13 баллов, доказательство частичное и нет примера – 10 баллов. Размещение показано только частично – 5 баллов за эту часть. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

3. Запишите в каждую клетку одно из чисел 2, 3, 6, 7, 16, 73, а между клетками поставьте арифметические знаки. Расставьте, если потребуется, скобки, чтобы получилось верное равенство. Числа надо использовать все по разу, а из арифметических знаков $(+,\ -,\ \times,\ :)$можно брать нужные сколько угодно раз.

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square = \boxed{677}$$

Ответ. Например, так: $(16-7)\times(73+2)+6:3=677$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Аня, Боря и Ваня сосчитали, сколько у них карандашей.

Аня сказала: 1) У меня 8 карандашей. 2) У меня на 2 карандаша меньше, чем у Бори. 3) У меня на один карандаш больше, чем у Вани.

Боря сказал: 1) Число карандашей у меня и Вани отличается на 3. 2) Не у меня карандашей меньше всех. 3) У Вани 11 карандашей.

Ваня сказал: 1) У меня карандашей меньше, чем у Ани. 2) У Бори карандашей на 3 больше, чем у Ани. 3) У Ани 9 карандашей.

Каждый два раза сказал правду и один раз солгал. Сколько карандашей у каждого из них?

Ответ. У Ани 9 , у Бори 11, у Вани 8 карандашей.

Решение. Пусть у Ани 8 карандашей. Тогда Ваня солгал, говоря «У Ани 9 карандашей», и правда, что у Бори 11 карандашей. Значит, слова Ани «У меня на 2 карандаша меньше, чем у Бори» – ложь, а утверждение, что у Ани на один карандаш больше, чем у Вани – правда. Отсюда следует, что у Вани 7 карандашей. Тогда у Бори первое и третье утверждения неверны. Значит, первое высказывание Ани – ложь, а другие два – правда. Слова Вани: «У Бори на 3 карандаша больше, чем у Ани» противоречат правдивому высказыванию Ани, значит, правда, что у Ани 9 карандашей. Тогда у Бори 11 карандашей, у Вани 8 карандашей. Неверные высказывания: у Ани 1), у Бори 3), у Вани 2).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, но есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Ошибки в рассмотрении вариантов – 10 баллов. Решение нача-*

то, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов.

5. Бельчата Рыжик и Пух по очереди берут орехи из кучи. За один раз можно взять не больше половины оставшихся орехов. Орехи берут целиком, на части делить их нельзя. Тот, кто сможет взять последним, выиграет. Первым берет Рыжик. Кто из них может выиграть при любых действиях другого, если сначала в куче было 40 орехов? Напишите, как должен действовать победитель.

Ответ. Выиграет Рыжик. Он должен оставлять Пуху $31, 15, 7, 3, 1$ орех.

Решение. Проиграет тот бельчонок, которому останется 0 или 1 орех. Но 0 орехов остаться не может, ведь предыдущий взял не больше половины. А чтобы остался 1 орех, у предыдущего должно быть 2 ореха. 2 получаются, если из 3 взять не больше половины, то есть 1. 3 ореха у предыдущего получаются, если перед его ходом было 4 или 5 или 6. Значит, нужно, чтобы перед этим было 7 орехов, что можно получить, если было от 8 до 14. Значит, перед ходом у бельчонка должно быть 15 орехов, а еще на ход назад – 31 (как и раньше, удваиваем и прибавляем 1). Запишем это в таблицу.

Рыжик взял	9	Чтобы осталось 15	Чтобы осталось 7	Чтобы осталось 3	1
Осталось	31	15	7	3	1
Пух взял	$1-15$	$1-7$	$1-3$	1	0
Осталось	$16-30$	$8-14$	$4-6$	2	

Теперь видно, что выиграет бельчонок, который начинает, то есть Рыжик. Первым ходом он оставит Пуху 31 орех, то есть возьмёт 9 орехов. Вторым ходом оставит 15 орехов, третьим – 7, четвёртым – 3. Пух на первых трёх ходах может брать разное число орехов, но не может помешать Рыжику. На своём четвёртом ходу Пух из 3 орехов может взять только 1. Рыжик из оставшихся двух орехов возьмёт 1, и Пух не сможет взять не больше половины.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть часть стратегии – 10-15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 2

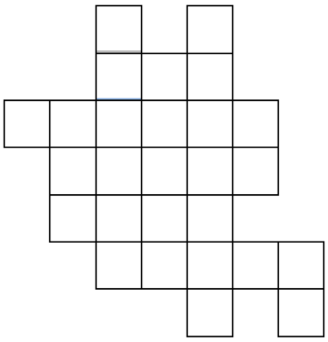
1. На арену цирка вышли четыре клоуна. Их звали Май, Бам, Зонг, Слон. На них были парики разного цвета – малиновый, белый, зелёный, синий. Каждый клоун кидал публике воздушные шарики. Май кинул на 2 шарика больше, чем клоун в малиновом парике. Бам кинул на 1 шарик больше, чем клоун в белом парике. Зонг кинул на 4 шарика больше, чем клоун в зелёном парике. Кто кинул больше шариков, и на сколько, Слон или клоун в синем парике?

Ответ. Клоун в синем парике кинул на 7 шариков больше, чем Слон.

Решение. Май, Бам, Зонг, Слон кинули вместе столько же шариков, сколько клоуны в малиновом, белом, зелёном, синем париках вместе, потому что это одни и те же клоуны. Одну и ту же сумму мы представили двумя способами, в первом случае слагаемые брали по именам, а во втором по парикам. Но по условию каждое из первых трёх слагаемых первой суммы больше соответствующего слагаемого второй суммы (на 2, на 1, на 4). Значит, чтобы суммы уравнялись, последнее слагаемое первой суммы должно быть на $2 + 1 + 4 = 7$ меньше.

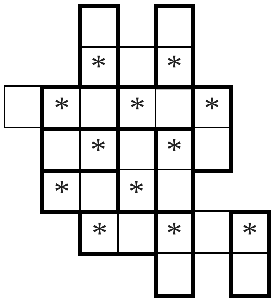
Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, плашка – прямоугольник 1×2, состоит из двух таких же клеток. Сколько плашек можно разместить в фигуре без наложения?



Ответ.12.

Решение. Всего клеток 27. Отметим клетки в шахматном порядке как на рисунке ниже. Любая плашка закрывает ровно одну отмеченную клетку, а всего отмеченных клеток 12, поэтому 13 плашек разместить нельзя. 12 плашек можно разместить, например, так.



Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: есть утверждение, что нельзя разместить 13 плашек – 5 баллов; это утверждение доказано – 8 баллов; дан пример размещения – 7 баллов, баллы суммируются. Доказательство, что нельзя разместить 13 плашек, опирается на частные случаи – 5 баллов за эту часть. Таким образом, частичное доказательство и есть пример размещения – 17 баллов, если нет доказательства, есть пример – 12 баллов, есть доказательство, нет примера – 13 баллов, доказательство частичное и нет примера – 10 баллов. Размещение показано только частично – 5 баллов за эту часть. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

3. Запишите в каждую клетку одно из чисел 3, 4, 4, 11, 13, 18, а между клетками поставьте арифметические знаки. Расставьте, если потребуется, скобки, чтобы получилось верное равенство. Числа надо использовать все по разу, а из арифметических знаков ($+$, $-$, $\times$, $:$)можно брать нужные сколько угодно раз.

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square = \boxed{487}$$

Ответ. Например, так: $(11 - 4) \times \big((13 \times 4) + 18\big) - 3 = 487$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Галя, Дима и Женя сосчитали, сколько пятёрок по математике они получили за месяц. Галя сказала: 1) У меня 7 пятёрок. 2) У меня на 4 пятёрки меньше, чем у Димы. 3) У меня на одну пятёрку больше, чем у Жени.

Дима сказал: 1) Число пятёрок у меня и Жени отличается на 5. 2) Не у меня пятёрок меньше всех. 3) У Жени 10 пятёрок.
Женя сказал: 1) У меня пятёрок меньше, чем у Гали. 2) У Димы пятёрок на 3 больше, чем у Гали. 3) У Гали 8 пятёрок.
Каждый два раза сказал правду и один раз солгал. Сколько пятёрок у каждого из них?
Ответ. У Гали 8 , у Димы 12, у Жени 7 пятёрок.
Решение. Пусть у Гали 7 пятёрок. Тогда Женя солгал, говоря «У Гали 8 пятёрок», и правда, что у Димы 10 пятёрок. Значит, слова Гали «У меня на 4 пятёрки меньше, чем у Димы» – ложь, а утверждение, что у Гали на одну пятёрку больше, чем у Жени – правда. Отсюда следует, что у Жени 6 пятёрок. Тогда у Димы первое и третье утверждения неверны. Значит, первое высказывание Гали – ложь, а другие два – правда. Слова Жени: «У Димы на 3 пятёрки больше, чем у Гали» противоречат правдивому высказыванию Гали, значит, правда, что у Гали 8 пятёрок. Тогда у Димы 12 пятёрок, у Жени 7 пятёрок. Неверные высказывания: у Гали 1), у Димы 3), у Жени 2).
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, но есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Ошибки в рассмотрении вариантов – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов.*

5. Бельчата Тоша и Кеша по очереди берут орехи из кучи. За один раз можно взять не больше половины оставшихся орехов. Орехи берут целиком, на части делить их нельзя. Тот, кто сможет взять последним, выиграет. Первым берет Тоша. Кто из них может выиграть при любых действиях другого, если сначала в куче было 50 орехов? Напишите, как должен действовать победитель.
Ответ. Тоша.
Решение. Проиграет тот бельчонок, которому останется 0 или 1 орех. Но 0 орехов остаться не может, ведь предыдущий взял не больше половины. А чтобы остался 1 орех, у предыдущего должно быть 2 ореха. 2 получаются, если из 3 взять не больше половины, то есть 1. 3 ореха у предыдущего получаются, если перед его ходом было 4 или 5 или 6. Значит, нужно, чтобы перед этим было 7 орехов, что можно получить, если было от 8 до 14. Значит, перед ходом у бельчонка должно быть 15 орехов, а еще на ход назад – 31 (как и раньше, удваиваем и прибавляем 1). Запишем это в таблицу.

Тоша взял	19	Чтобы осталось 15	Чтобы осталось 7	Чтобы осталось 3	1
Осталось	31	15	7	3	1
Кеша взял	$1-15$	$1-7$	$1-3$	1	0
Осталось	$16-30$	$8-14$	$4-6$	2	

Теперь видно, что выиграет бельчонок, который начинает, то есть Тоша. Первым ходом он оставит Кеше 31 орех, то есть возьмёт 19 орехов. Вторым ходом оставит 15 орехов, третьим – 7, четвёртым – 3. Кеша на первых трёх ходах может брать разное число орехов, но не может помешать Тоше. На своём четвёртом ходу Кеша из 3 орехов может взять только 1. Тоша из оставшихся двух орехов возьмёт 1, и Кеша не сможет взять не больше половины.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть часть стратегии – 10-15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 3

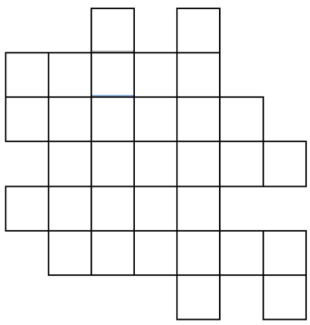
1. Маша, Ира, Катя, Лена, Света делали соломенных куколок для школьной ярмарки. Фамилия одной из девочек была Матвеева, другой Иванова, у остальных – Кузнецова, Лапина и Соколова. Маша сделала на три куколки больше, чем Матвеева. Ира сделала на четыре куколки больше, чем Иванова. Катя сделала на одну куколку больше, чем Кузнецова. Света сделала на две куколки больше, чем Соколова. Кто сделал больше куколок, и на сколько, Лена или Лапина?

Ответ. Лапина сделала на 10 куколок больше, чем Лена.

Решение. Маша, Ира, Катя, Лена, Света сделали вместе столько же куколок, сколько Матвеева, Иванова, Кузнецова, Лапина и Соколова вместе, потому что это одни и те же девочки. Одну и ту же сумму мы представили двумя способами, в первом случае слагаемые брали по именам, а во втором по фамилиям. Но по условию каждое из первых четырёх слагаемых первой суммы больше соответствующего слагаемого второй суммы (на 3, на 4, на 1, на 2). Значит, чтобы суммы уравнялись, последнее слагаемое первой суммы должно быть на $3+4+1+2=10$ меньше.

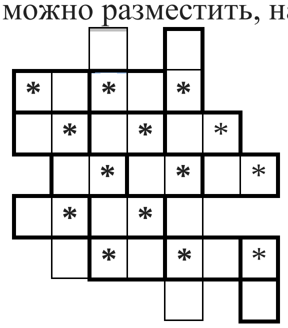
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, плашка – прямоугольник 1×2, состоит из двух таких же клеток. Сколько плашек можно разместить в фигуре без наложения?



Ответ. 14.

Решение. Отметим клетки в шахматном порядке как на рисунке ниже. Любая плашка закрывает ровно одну отмеченную клетку, а всего отмеченных клеток 14, поэтому 15 плашек разместить нельзя. 14 плашек можно разместить, например, так.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: есть утверждение, что нельзя разместить* 15 *плашек – 5 баллов; это утверждение доказано – 8 баллов; дан пример размещения – 7 баллов, баллы суммируются. Доказательство, что нельзя разместить* 15 *плашек, опирается на частные случаи – 5 баллов за эту часть. Таким образом, частичное доказательство и есть пример размещения – 17 баллов, если нет доказательства, есть пример – 12 баллов, есть доказательство, нет примера – 13 баллов, доказательство частичное и нет примера – 10 баллов. Размещение показано только частично – 5 баллов за эту часть. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

3. Запишите в каждую клетку одно из чисел $3,\ 6,\ 6,\ 12,\ 12,\ 100$, а между клетками поставьте арифметические знаки. Расставьте, если потребуется, скобки, чтобы получилось верное равенство. Числа надо использовать все по разу, а из арифметических знаков $(+,\ -,\ \times,\ :)$можно брать нужные сколько угодно раз.

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square = \boxed{309}$$

Ответ.$(6-3)\times\big((12:12)+100\big)+6=309.$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Три бельчонка, которых звали Ах, Бах и Вах, сосчитали найденные ими шишки.
Ах сказал: 1) У меня 6 шишек. 2) У меня на 2 шишки меньше, чем у Баха. 3) У меня на одну шишку больше, чем у Ваха.
Бах сказал: 1) Число шишек у меня и Ваха отличается на 3. 2) Не у меня шишек меньше всех. 3) У Ваха 10 шишек.
Вах сказал: 1) У меня шишек меньше, чем у Аха. 2) У Баха на три шишки больше, чем у Аха. 3) У Аха 8 шишек.
Каждый два раза сказал правду и один раз солгал. Сколько шишек у каждого бельчонка?
Ответ. У Аха 8, у Баха 10, у Ваха 7 шишек.
Решение. Пусть у Аха 6 шишек. Тогда Вах солгал, говоря «У Аха 8 шишек», и правда, что у Баха 9 шишек. Значит, слова А «У меня на 2 шишки меньше, чем у Баха» – ложь, а утверждение, что у Аха на одну шишку больше, чем у Ваха – правда. Отсюда следует, что у Ваха5 шишек. Тогда у Баха первое и третье утверждения неверны. Значит, первое высказывание Аха – ложь, а другие два – правда. Слова Ваха: «У Баха на три шишки больше, чем у Аха» противоречат правдивому высказыванию Аха, значит, правда, что у Аха 8 шишек. Тогда у Баха 10 шишек, у Ваха 7 шишек. Неверные высказывания: у Аха 1), у Баха 3), у Ваха 2).
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, но есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Ошибки в рассмотрении вариантов – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов.*

5. За один ход число, написанное на доске, заменяют на меньшее натуральное число, которое не меньше половины имеющегося числа. Например, если написано число 47, то можно заменить его на любое число от 24 до 46 включительно, а если записано число 42, то можно заменить его на любое число от 21 до 41 включительно. Старое число стирают. Вася и Петя делают ходы по очереди, начинает Вася и записывает число 60. Тот, кто сможет сделать ход последним, выиграет. Кто из них может выиграть при любых действиях другого? Напишите, как должен действовать победитель.
Ответ. Петя.
Решение. Проиграет тот мальчик, перед ходом которого на доске будет число 1. Чтобы появилось число 1, должно быть предыдущее число 2. 2 получается, если из 3 взять не больше половины, то есть 1. 3 у предыдущего получается, если перед его ходом было 4 или 5 или 6. Значит, нужно, чтобы перед этим было 7 , что можно получить, если было от 8 до 14. Значит, перед этим ходом на доске должно быть 15, а еще на ход назад – 31 (как и раньше, удваиваем и прибавляем 1). Запишем это в таблицу.

Вася	60	$16-30$	$8-14$	$4-6$	2
Петя	31	15	7	3	1

Теперь видно, что выиграет Петя. Своим первым ходом он напишет число 31. Вторым ходом число 15, третьим – 7, четвёртым – 3. Вася на своих ходах может записывать разные числа (см. таблицу), но не может помешать Пете. На своём пятом ходу Вася может заменить число 3 только на 2. Петя заменит 2 на 1 и выиграет.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть часть стратегии – 10-15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*