

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

6 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри** из **20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Бельчата Сёма и Юра побежали на день рождения к своему другу Тимоше. Тимоша позвал их к 12:00, но бельчата перепутали. Сёма прибежал, когда до 14:00 оставалось вдвое меньше, чем прошло после 12:00. А Юра – когда до 14:00 оставалось вдвое больше, чем прошло после 13:00. Кто из бельчат пришел на день рождения раньше?

Ответ. Оба пришли в 13:20.

Решение. Выясним, когда пришёл Сёма к Тимоше. Между полуднем и двумя часами дня 120 минут. Этот промежуток времени необходимо разделить на 3 части, т.к. до прихода Сёмы прошло в 2 раза больше, чем от встречи до 14:00. Получаем, что Сёма пришел на $(120:3) \cdot 2 = 80$ минут позже указанного Тимошей времени, т.е. в 13:20. Теперь узнаем, когда Юра пришёл к Тимоше. Промежуток между 13:00 и 14:00 – это 60 минут. Одна часть – это время от часа дня до прихода Юра, время от Юриного времени до 14:00 составляет 2 части, поэтому $60:3 = 20$. Следовательно, Юра пришел в 13:20.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получено, что один из бельчат пришёл в 13:20 – 10 баллов. Только ответ – 2 балла.

2. Лена загадала двузначное число, и сообщила своей подруге Маше, что это число делится на 2, 3, 5, 10 и 15. Однако Маша узнала, что из этих пяти утверждений ровно два неверны. Какие числа могла загадать Лена?

Ответ. 10, 15, 20, 40, 45, 50, 70, 75, 80.

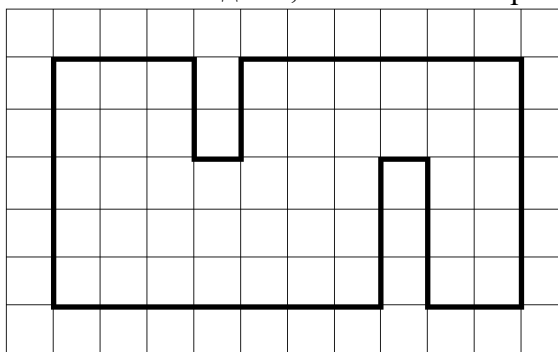
Решение. Если число не делится на 5, то оно не делится ни на 10, ни на 15, и мы получаем уже три неверных утверждения. Значит, загаданное число точно делится на 5. Если число делится на 5 и на 2, то оно делится и на 10 тоже, значит, в этом случае неверны утверждения про делимость на 3 и 15. Если же число не делится на 2, то оно не делится на 10, и утверждения про делимость на 3 и 15 должны быть, наоборот верны.

В первом случае мы получаем числа, которые делятся на 10, но не делятся на 3. Таких двузначных чисел ровно шесть: 10, 20, 40, 50, 70, 80. Во втором случае мы получаем числа, которые делятся на 15, но не делятся на 2. Таких чисел три: 15, 45 и 75.

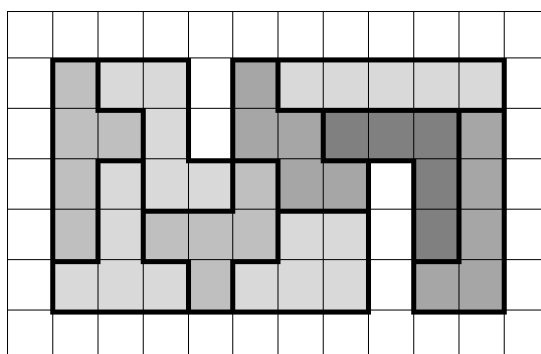
Всего получается 9 чисел: 10, 15, 20, 40, 45, 50, 70, 75, 80.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе отсутствуют одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа и отсутствует одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 12 баллов. Полностью рассмотрены оба случая (когда неверны утверждения про делимость на 3 и 15 и на 2 и 10), но не доказано, что других нет – 12 баллов. Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 3 и 15 или на 2 и 10) – 10 баллов (с верным примером). Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 3 и 15 или на 2 и 10) – 8 баллов (без верного примера). Верный ответ, без обоснования – 6 баллов. Верный ответ за исключением чисел 15, 45, 75, без обоснования – 4 балла. Неверный ответ, при одном, частично верном рассмотренном случае – 4 балла. Неверный ответ без обоснования – 0 баллов.

3. Разрежьте фигуру по линиям сетки на девять различных частей, состоящих из 5 клеток (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



Решение.



Комментарий. Любой верный пример с различными фигурами – 20 баллов. Если в примере присутствует хотя бы две равные фигуры – 0 баллов.

4. В лесу живут бельчата в разноцветных шапочках. Однажды 100 бельчат встали в круг. Оказалось, что каждый бельчонок стоит рядом хотя бы с одним бельчком в шапочке того же цвета. При этом 58 бельчат стоят между двумя бельчатами в шапочках того же цвета. Какое наибольшее количество бельчат в красных шапочках могли иметь соседа не в красной шапочке?

Ответ. 20.

Решение. Назовем группой последовательность подряд стоящих бельчат в одноцветных шапочках, при этом «крайние» бельчата группы стоят рядом с бельчатами в шапочках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп. При этом в каждой группе есть хотя бы два бельчонка, иначе в ней только один бельчонок, тогда он стоит рядом с двумя бельчатами в шапочках другого цвета, что противоречит условию. Давайте попросим 58 бельчат, каждый из которых стоит между бельчатами в шапочках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 42 бельчонка, при этом в каждой группе осталось 2 бельчонка. Рассмотрим группы в красных шапочках. Заметим, что все бельчата, которые

сейчас в них состоят, и есть те бельчата, которые имели соседа в не красной шапочке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп. Всего осталась $21 = 42:2$ группа. Если хотя бы 11 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 10, то есть максимальное количество бельчат в красных шапочках, которые стоят рядом с бельчком в не красной шапочке, равно 20.

Приведем пример, когда это возможно. В таком примере должно быть 10 групп бельчат в красных шапочках и 11 других групп. Так и сделаем: возьмем 10 групп бельчат в красных шапочках и 11 групп бельчат 11 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных бельчат не стояли рядом (достаточно сначала расположить 10 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 60 бельчат, а остальные – из двух.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 20 бельчат в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 16 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 21 бельчонок в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 12 баллов. Приведён пример, что ровно 20 бельчат в красной шапочке могут иметь соседей не в красной шапочке – 6 баллов. Явно сказано, что 42 бельчонок имеют соседа в не красной шапочке – 4 балла. Только верный ответ – 0 баллов.

Примечание. Любые рассуждения о том, как должны быть расставлены бельчата «оптимальным образом», «выгоднее всего», «парами», «все вместе», «чередоваться» и т.д. оцениваются максимум 6 баллами при наличии верного примера расстановки.

5. Однажды за большим круглым столом собрались 80 жителей уезда. Каждый из них либо купец, либо разбойник, либо торговец. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут. Торговец говорит правду, если слева от него сидит разбойник; ложь, если слева от него сидит купец; все, что угодно, если слева от него торговец. Каждый сказал: «Справа от меня сидит разбойник». Сколько всего разбойников?

Ответ. 40 или 0 разбойников.

Решение. Если за столом есть разбойник, тогда справа от него сидит торговец или купец. В такой ситуации оба они скажут правду, значит, следующий после них – снова разбойник. Получаем, что разбойники и не разбойники чередуются, т.е. разбойников ровно половина. Если же разбойников за столом нет, то купцов тоже нет (потому что справа от купца должен быть разбойник) и за столом одни торговцы.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обоснованно получен ответ «40 разбойников», но не разобран случай отсутствия купцов и разбойников – 12 баллов. Рассмотрен случай чередования разбойников и купцов/торговцев, без обоснования – 6 баллов (если дополнительно рассмотрен случай отсутствия разбойников, то +2 балла). Приведён ответ «0 или 40 разбойников» – 4 балла. Приведён только ответ «0 разбойников» или ответ «40 разбойников» – 0 баллов.

Вариант 2

1. Бельчата Миша и Саша побежали на день рождения к своему другу Тимоше. Тимоша позвал их к 13:00, но бельчата перепутали. Миша прибежал, когда до 15:00 оставалось вдвое меньше, чем прошло после 13:00. А Саша – когда до 15:00 оставалось вдвое больше, чем прошло после 14:00. Кто из бельчат пришел на день рождения раньше?

Ответ. Оба пришли в 14:20.

Решение. Выясним, когда пришёл Миша к Тимоше. Между полуднем и двумя часами дня 120 минут. Этот промежуток времени необходимо разделить на 3 части, т.к. до прихода Миши прошло в 2 раза больше, чем от встречи до 15:00. Получаем, что Миша пришел на $(120:3) \cdot 2 = 80$ минут позже указанного Тимошей времени, т.е. в 14:20. Теперь узнаем, когда Саша пришёл к Тимоше. Промежуток между 14:00 и 15:00 – это 60 минут. Одна

часть – это время от часа дня до прихода Саши, время от Сашиного времени до 15:00 составляет 2 части, поэтому $60:3 = 20$. Следовательно, Саша пришел в 14:20.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получено, что один из бельчат пришёл в 14:20 – 10 баллов. Только ответ – 2 балла.

2. Катя загадала двузначное число, и сообщила своей подруге Насте, что это число делится на 2, 3, 4, 5 и 6. Однако Настя узнала, что из этих пяти утверждений ровно два неверны. Какие числа могла загадать Катя?

Ответ. 18, 20, 40, 42, 54, 66, 78, 80.

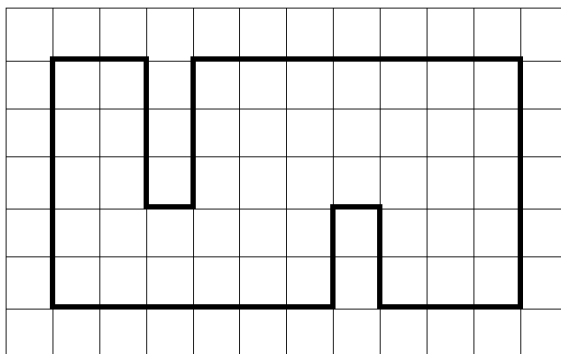
Решение. Если число не делится на 2, то оно не делится ни на 4, ни на 6, и мы получаем уже три неверных утверждения. Значит, загаданное число точно делится на 2. Если чётное число делится на 3, то оно делится и на 6 тоже, значит, в этом случае неверны утверждения про делимость на 4 и 5. Если же число не делится на 3, то оно не делится на 6, и утверждения про делимость на 4 и 5 должны быть, наоборот верны.

В первом случае мы получаем числа, которые делятся на 6, но не делятся на 4, ни на 5. Таких двузначных чисел ровно пять: 18, 42, 54, 66, 78. Во втором случае мы получаем числа, которые делятся на 20, но не делятся на 3. Таких чисел три: 20, 40 и 80.

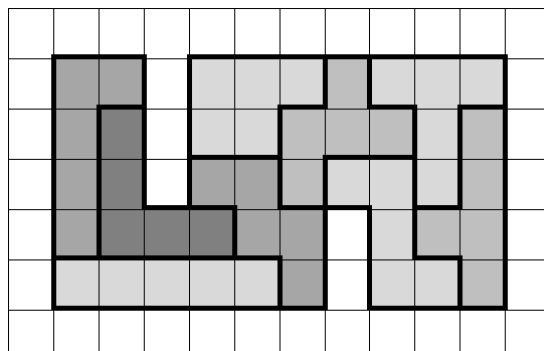
Всего получается 8 чисел: 18, 20, 40, 42, 54, 66, 78, 80.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе отсутствуют одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа и отсутствует одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 12 баллов. Полностью рассмотрены оба случая (когда неверны утверждения про делимость на 4 и 5 и на 3 и 6), но не доказано, что других нет – 12 баллов. Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 4 и 5 или на 3 и 6) – 10 баллов (с верным примером). Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 4 и 5 или на 3 и 6) – 8 баллов (без верного примера). Верный ответ, без обоснования – 6 баллов. Верный ответ за исключением чисел 20, 40, 80, без обоснования – 4 балла. Неверный ответ, при одном, частично верном рассмотренном случае – 4 балла. Неверный ответ без обоснования – 0 баллов.

3. Разрежьте фигуру по линиям сетки на девять различных частей, состоящих из 5 клеток (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



Решение.



Комментарий. Любой верный пример с различными фигурами – 20 баллов. Если в примере присутствует хотя бы две равные фигуры – 0 баллов.

4. В лесу живут бельчата в разноцветных шапочках. Однажды 95 бельчат встали в круг. Оказалось, что каждый бельчонок стоит рядом хотя бы с одним бельчком в шапочке того же цвета. При этом 49 бельчат стоят между двумя бельчатами в шапочках того же цвета. Какое наибольшее количество бельчат в красных шапочках могли иметь соседи не в красной шапочке?

Ответ. 22.

Решение. Назовем группой последовательность подряд стоящих бельчат в одноцветных шапочках, при этом «крайние» бельчата группы стоят рядом с бельчатами в шапочках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп. При этом в каждой группе есть хотя бы два бельчонка, иначе в ней только один бельчонок, тогда он стоит рядом с двумя бельчатами в шапочках другого цвета, что противоречит условию. Давайте попросим 49 бельчат, каждый из которых стоит между бельчатами в шапочках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 46 бельчат, при этом в каждой группе осталось 2 бельчонка. Рассмотрим группы в красных шапочках. Заметим, что все бельчата, которые сейчас в них состоят, и есть те бельчата, которые имели соседа в не красной шапочке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп. Всего осталось $23 = 46:2$ группы. Если хотя бы 12 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 11, то есть максимальное количество бельчат в красных шапочках, которые стоят рядом с бельчком в не красной шапочке, равно 22.

Приведем пример, когда это возможно. В таком примере должно быть 11 групп бельчат в красных шапочках и 12 других групп. Так и сделаем: возьмем 11 групп бельчат в красных шапочках и 12 групп бельчат 12 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных бельчат не стояли рядом (достаточно сначала расположить 11 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 51 бельчонка, а остальные – из двух.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 22 бельчонка в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 16 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 23 бельчонка в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 12 баллов. Приведён пример, что ровно 22 бельчонка в красной шапочке могут иметь соседей не в красной шапочке – 6 баллов. Явно сказано, что 46 бельчонка имеют соседа в не красной шапочке – 4 балла. Только верный ответ – 0 баллов.

Примечание. Любые рассуждения о том, как должны быть расставлены бельчата «оптимальным образом», «выгоднее всего», «парами», «все вместе», «чередоваться» и т.д. оцениваются максимум 6 баллами при наличии верного примера расстановки.

5. Однажды за большим круглым столом собрались 100 жителей уезда. Каждый из них либо купец, либо разбойник, либо торговец. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут. Торговец говорит правду, если слева от него сидит разбойник; ложь, если слева от него сидит купец; все, что угодно, если слева от него торговец. Каждый сказал: «Справа от меня сидит разбойник». Сколько всего разбойников?

Ответ. 50 или 0 разбойников.

Решение. Если за столом есть разбойник, тогда справа от него сидит торговец или купец. В такой ситуации оба они скажут правду, значит, следующий после них – снова разбойник. Получаем, что разбойники и не разбойники чередуются, т.е. разбойников ровно половина. Если же разбойников за столом нет, то купцов тоже нет (потому что справа от купца должен быть разбойник) и за столом одни торговцы.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обоснованно получен ответ «50 разбойников», но не разобран случай отсутствия купцов и разбойников – 12 баллов. Рассмотрен случай чередования разбойников и купцов/торговцев, без обоснования – 6 баллов (если дополнительно рассмотрен случай отсутствия разбойников, то +2 балла).

Приведён ответ «0 или 50 разбойников» – 4 балла Приведён только ответ «0 разбойников» или ответ «50 разбойников» – 0 баллов.

Вариант 3

1. Бельчата Боря и Гена побежали на день рождения к своему другу Тимоше. Тимоша позвал их к 14:00, но бельчата перепутали. Боря прибежал, когда до 16:00 оставалось вдвое меньше, чем прошло после 14:00. А Гена – когда до 16:00 оставалось вдвое больше, чем прошло после 15:00. Кто из бельчат пришел на день рождения раньше?

Ответ. Оба пришли в 15:20.

Решение. Выясним, когда пришёл Боря к Тимоше. Между полуднем и двумя часами дня 120 минут. Этот промежуток времени необходимо разделить на 3 части, т.к. до прихода Сёмы прошло в 2 раза больше, чем от встречи до 16:00. Получаем, что Боря пришел на $(120:3) \cdot 2 = 80$ минут позже указанного Тимошей времени, т.е. в 15:20. Теперь узнаем, когда Гена пришёл к Тимоше. Промежуток между 15:00 и 16:00 – это 60 минут. Одна часть – это время от часа дня до прихода Гены, время от Гениного времени до 16:00 составляет 2 части, поэтому $60:3 = 20$. Следовательно, Гена пришел в 15:20.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получено, что один из бельчат пришёл в 15:20 – 10 баллов. Только ответ – 2 балла.

2. Даша загадала двузначное число, и сообщила своей подруге Оле, что это число делится на 2, 3, 5, 6 и 9. Однако Оля узнала, что из этих пяти утверждений ровно два неверны. Какие числа могла загадать Даша?

Ответ. 12, 24, 42, 45, 48, 66, 78, 84, 96.

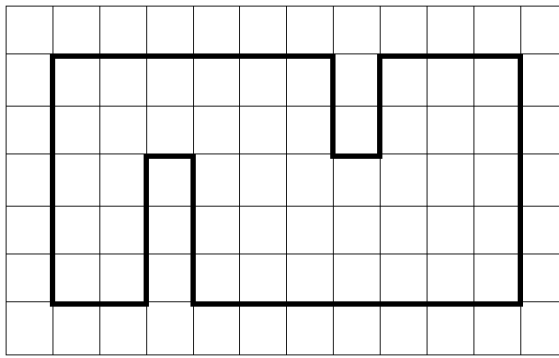
Решение. Если число не делится на 3, то оно не делится ни на 6, ни на 9, и мы получаем уже три неверных утверждения. Значит, загаданное число точно делится на 3. Если число делится на 3 и на 2, то оно делится и на 6 тоже, значит, в этом случае неверны утверждения про делимость на 5 и 9. Если же число не делится на 2, то оно не делится на 6, и утверждения про делимость на 5 и 9 должны быть, наоборот верны.

В первом случае мы получаем числа, которые делятся на 6, но не делятся на 5, ни на 9. Таких двузначных чисел ровно восемь: 12, 24, 42, 48, 66, 78, 84, 96. Во втором случае мы получаем числа, которые делятся на 45, но не делятся на 2. Таких чисел ровно одно: 45.

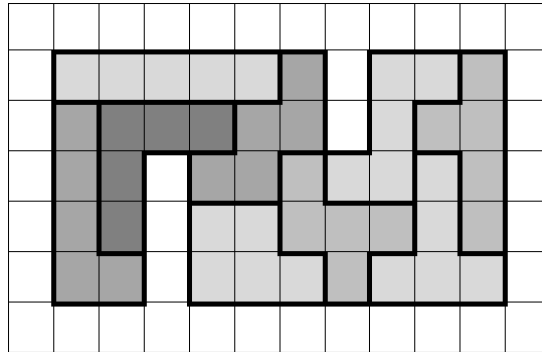
Всего получается 9 чисел: 12, 24, 42, 45, 48, 66, 78, 84, 96.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе отсутствуют одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа и отсутствует одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 12 баллов. Полностью рассмотрены оба случая (когда неверны утверждения про делимость на 5 и 9 и на 3 и 6), но не доказано, что других нет – 12 баллов. Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 5 и 9 или на 2 и 6) – 10 баллов (с верным примером). Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 5 и 9 или на 2 и 6) – 8 баллов (без верного примера). Верный ответ, без обоснования – 6 баллов. Верный ответ за исключением числа 45, без обоснования – 4 балла. Неверный ответ, при одном, частично верном рассмотренном случае – 4 балла. Неверный ответ без обоснования – 0 баллов.

3. Разрежьте фигуру по линиям сетки на девять различных частей, состоящих из 5 клеток (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



Решение.



Комментарий. Любой верный пример с различными фигурами – 20 баллов. Если в примере присутствует хотя бы две равные фигуры – 0 баллов.

4. В лесу живут бельчата в разноцветных шапочках. Однажды 105 бельчат встали в круг. Оказалось, что каждый бельчонок стоит рядом хотя бы с одним бельчком в шапочке того же цвета. При этом 67 бельчат стоят между двумя бельчатами в шапочках того же цвета. Какое наибольшее количество бельчат в красных шапочках могли иметь соседа не в красной шапочке?

Ответ. 18.

Решение. Назовем *группой* последовательность подряд стоящих бельчат в одноцветных шапочках, при этом «крайние» бельчата группы стоят рядом с бельчатами в шапочках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп. При этом в каждой группе есть хотя бы два бельчонка, иначе в ней только один бельчонок, тогда он стоит рядом с двумя бельчатами в шапочках другого цвета, что противоречит условию. Давайте попросим 67 бельчат, каждый из которых стоит между бельчатами в шапочках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 38 бельчат, при этом в каждой группе осталось 2 бельчонка. Рассмотрим группы в красных шапочках. Заметим, что все бельчата, которые сейчас в них состоят, и есть те бельчата, которые имели соседа в не красной шапочке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп. Всего осталось $19 = 38 : 2$ групп. Если хотя бы 10 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 9, то есть максимальное количество бельчат в красных шапочках, которые стоят рядом с бельчком в не красной шапочке, равно 18.

Приведем пример, когда это возможно. В таком примере должно быть 9 групп бельчат в красных шапочках и 10 других групп. Так и сделаем: возьмем 9 групп бельчат в красных шапочках и 10 групп бельчат 10 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных бельчат не стояли рядом (достаточно сначала расположить 9 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 69 бельчат, а остальные – из двух.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 18 бельчат в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 16 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 19 бельчонок в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 12 баллов. Приведён пример, что ровно 18 бельчат в красной шапочке могут иметь соседей не в красной шапочке – 6 баллов. Явно сказано,

что 38 бельчонка имеют соседа в не красной шапочке – 4 балла. Только верный ответ – 0 баллов.

Примечание. Любые рассуждения о том, как должны быть расставлены бельчата «оптимальным образом», «выгоднее всего», «парами», «все вместе», «чередоваться» и т.д. оцениваются максимум 6 баллами при наличии верного примера расстановки.

5. Однажды за большим круглым столом собрались 120 жителей уезда. Каждый из них либо купец, либо разбойник, либо торговец. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут. Торговец говорит правду, если слева от него сидит разбойник; ложь, если слева от него сидит купец; все, что угодно, если слева от него торговец. Каждый сказал: «Справа от меня сидит разбойник». Сколько всего разбойников?

Ответ. 60 или 0 разбойников.

Решение. Если за столом есть разбойник, тогда справа от него сидит торговец или купец. В такой ситуации оба они скажут правду, значит, следующий после них – снова разбойник. Получаем, что разбойники и не разбойники чередуются, т.е. разбойников ровно половина. Если же разбойников за столом нет, то купцов тоже нет (потому что справа от купца должен быть разбойник) и за столом одни торговцы.

Комментарий.

Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обоснованно получен ответ «60 разбойников», но не разобран случай отсутствия купцов и разбойников – 12 баллов. Рассмотрен случай чередования разбойников и купцов/торговцев, без обоснования – 6 баллов (если дополнительно рассмотрен случай отсутствия разбойников, то +2 балла). Приведён ответ «0 или 60 разбойников» - 4 балла. Приведён только ответ «0 разбойников» или ответ «60 разбойников» – 0 баллов.