ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

7 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Кабина лифта вмещает или 15 гимнастов, или 12 борцов. Если в кабину зашли 8 борцов, сколько гимнастов может ещё зайти в кабину?

Ответ.5.

Решение.Если в кабину зашли 8 борцов, кабина заполнена на $^2/_3$. Оставшуюся $^1/_3$ может заполнить треть гимнастов, то есть 5.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Артём, Боря и Саша красили забор. Если бы Боря выкрасил столько, сколько Артём и Саша вместе, они бы закончили в этот день. А так им осталось на завтра столько, сколько выкрасил Артём сегодня. Но всё-таки сегодня один из них выкрасил столько, сколько двое других вместе. Какую часть забора выкрасил каждый из них?

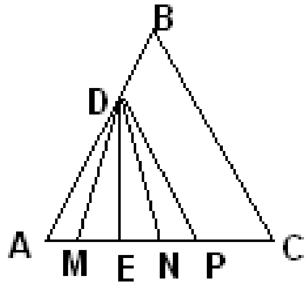
Ответ.$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$.

Решение. Из высказывания про Борю ясно, что $a + c = \frac{1}{2}$. Из высказывания про завтрашний день: $2a + b + c = 1\ (*)$. Последнее высказывание допускает два варианта: 1) $a = b + c$или 2) $c = a + b$.

Подставим $a + c = \frac{1}{2}$ в $2a + b + c = 1$: $a + b = \frac{1}{2}$, $b = c$. Тогда 2) $c = a + b$ невозможно, и верно утверждение 1) $a = b + c = 2b$. Таким образом, части равны $2b, b, b$и из условия($*$)находим: $6b = 1, b = \frac{1}{6}$. Получаем ответ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ответ найден подбором, не доказано, что других ответов нет – 18 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного* *продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB выбрали точку D, и из неё опустили перпендикуляр DE на сторону AC. На стороне AC выбрали точкиM и N (M ближе кA) так, что $ME = EN$. Известно, что $BD = 4, AM = 1$. Найдите NC.
Ответ.5.
Решение. Отложим от точки Nотрезок NP, равный AM. Отрезок DE – серединный перпендикуляр отрезка AP, поэтому $AD = DP$. Треугольник ADP равнобедренный с углом $60°$, значит, он равносторонний. Отсюда $BD = PC$. Тогда $NC = NP + PC = AM + BD = 4 + 1 = 5$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В доказательстве есть ошибка – 8-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или содержит грубые ошибки – 0 баллов.*

4. В деревне живёт несколько семей. У всех в каждой семье одинаковая фамилия, а в разных семьях фамилии разные. В каждой семье больше 3 человек. Для каждого жителя деревни есть 30 жителей, у которых другая фамилия. Например, для каждого Иванова или Ивановой есть 30 жителей, которые не Ивановы. Сколько разных фамилий может быть в этой деревне?
Ответ.$2, 3, 4, 6, 7$.
Решение.Рассмотрим двух людей из разных семей, например, Петрова и Иванова. Для Петрова есть 30 людей – Ивановых и остальных, не Петровых и не Ивановых. Для Иванова тоже есть 30 людей – Петровых и остальных, не Петровых и не Ивановых. Отсюда следует, что число Ивановых равно числу Петровых. Это относится ко всем семьям. Значит, 30 людей составляют несколько равных групп-семей, то есть число членов каждой семьи одинаково и является делителем 30. Делители $30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$. По условию, в каждой семье больше 3 человек. Если в каждой семье по 5 человек, всего семей (а значит, и разных фамилий), $6 + 1 = 7$. Если в каждой семье по 6 человек, всего семей $5 + 1 = 6$. Если в каждой семье по 10 человек, всего семей $3 + 1 = 4$. Если в каждой семье по 15 человек, всего семей $2 + 1 = 3$. Если в каждой семье по 30 человек, всего семей $1 + 1 = 2$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При числе ответов меньше 5, за каждый верный обоснованный ответ – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. Лесные бельчата или честные (всегда говорят правду), или лжецы (всегда лгут). На поляне собрались 6 бельчат из одного леса и 6 бельчат из другого леса. Все бельчата из одного леса знают, кто из них лжец, а кто честный, а бельчата из разных лесов не знают друг про друга. Каждый бельчонок сказал про каждого из остальных одну фразу, то есть всего прозвучало $12 \cdot 11 = 132$ фразы. При этом каждый бельчонок каждый раз говорил одну из трёх фраз: 1) «Это честный бельчонок из нашего леса», 2) «Это лжец из нашего леса», 3)

«Не знаю, кто он». Никакие два бельчонка не сказали друг про друга одинаковые фразы. Сколько раз могла прозвучать третья фраза?
Ответ.36 или 30 раз.
Решение.Честные бельчата из одного леса должны были сказать друг про друга фразу 1, а из разных лесов – фразу 3. Поскольку никакие два бельчонка не сказали друг про друга одинаковые фразы, честных не больше одного. Пусть честный бельчонок один. Тогда он сказал про бельчат из своего леса фразу 2, а про бельчат из другого леса фразу 3 (6 раз). Бельчата из его леса могли сказать про него фразу 2 или 3, но поскольку фразы должны быть разные, они сказали фразу 3 (5 раз). Бельчата из другого леса могли сказать про него фразу 1 или 2. Остальные бельчата из одного и того же леса в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 3, всего фраз было сказано $6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 50,$ половина из них – фраза 3. Остальные бельчата из разных лесов – лжецы, поэтому в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 2 .Всего фраза 3 прозвучала $6 + 5 + 25 = 36$ раз.
Если все бельчата были лжецами, то про бельчат из своего леса они говорили фразы 1 и 3 ($6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 60$ раз), половина из них – фраза 3, а про бельчат из другого леса фразы 1 и 2.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 15 баллов. Верно рассмотрен существенный случай – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

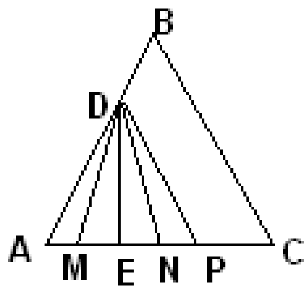
Вариант 2

1. Бумажный пакет вмещает или 20 одинаковых яблок, или 16 одинаковых груш. Если в пакет положили 5 яблок, сколько груш можно ещё положить в пакет?
Ответ.12.
Решение.Если в пакет положили 5 яблок, пакет заполнен на четверть. Оставшиеся три четверти можно заполнить тремя четвертями 16 груш, то есть можно положить 12 груш.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. В роще живут серые и черные бельчата, $\frac{2}{5}$ всех бельчат черные, остальные серые. $\frac{1}{4}$ всех бельчат – путешественники (они любят далеко бегать). Доля путешественников среди чёрных бельчат в 2 раза превышает долю путешественников среди серых бельчат. Какая часть чёрных бельчат – путешественники?
Ответ.$^5/_{14}$.
Решение.Пусть всего бельчат a, тогда $^{2a}/_5$ бельчат черные, $^{3a}/_5$ бельчат серые, $^a/_4$ бельчат – путешественники. Пусть число чёрных бельчат-путешественников равно b. Тогда b найдём из соотношения b: $^{2a}/_5 = 2 \cdot (^a/_4 - b)$: $^{3a}/_5$, откуда $b = {}^a/_7$. Поэтому $^a/_7 : {}^{2a}/_5 = {}^5/_{14}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB выбрали точку D, и из неё опустили перпендикуляр DE на сторону AC. На стороне AC выбрали точкиM и N (M ближе кA) так, что $ME = EN$. Известно, что $BD = 6, AM = 2$. Найдите NC.
Ответ.8.

Решение.Отложим от точки Nотрезок NP, равный AM. Отрезок DE – серединный перпендикуляр отрезка AP, поэтому $AD = DP$. Треугольник ADPравнобедренный с углом 60°, значит, он равносторонний. Отсюда $BD = PC$. Тогда $NC = NP + PC = AM + BD = 6 + 2 = 8$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В доказательстве есть ошибка – 8-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или содержит грубые ошибки – 0 баллов.*

4. 1 сентября школьники принесли в школу цветы, и составили из них общий букет. Среди цветов была хотя бы одна астра, и хотя бы один георгин, и для каждого цветка в букете было 10 цветков других видов (или одного другого вида). Например, для каждой астры в букете было 10 цветков, которые не являются астрами. Сколько цветков могло быть в букете?

Ответ.$11, 12, 15, 20$.

Решение.Рассмотрим все астры, и возьмём одну из них. Для неё есть 10 цветков – георгинов и остальных, не астр и не георгинов. Теперь возьмем один георгин. Для него есть 10 цветков – астр и остальных, не астр и не георгинов. Отсюда следует, что число астр равно числу георгинов. Это относится и к цветам любого вида. Значит, 10 цветков состоят из нескольких равных групп цветов разного вида, то есть число цветов каждого вида одинаково и является делителем10. Делители $10: 1, 2, 5, 10$. Если каждого вида по одному цветку, всего цветков 11. Если каждого вида по два цветка, всего цветков 12. Если каждого вида по 5 цветков, всего цветков 15. Если каждого вида по 10 цветков, всего цветков 20.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За каждый верный обоснованный ответ – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. Собрались однажды вместе 5 жителей одной деревни и 5 жителей другой деревни. Каждый житель или рыцарь (всегда говорит правду), или лжец (всегда лжёт). Все жители из одной деревни знают, кто из них лжец, а кто рыцарь, а жители из разных деревень не знают друг про друга. Каждый житель сказал про каждого из остальных одну фразу, то есть всего прозвучало $10 \cdot 9 = 90$ фраз. При этом каждый житель каждый раз говорил одну из трёх фраз: 1) «Это рыцарь из нашей деревни», 2) «Это лжец из нашей деревни», 3) «Не знаю, кто он». Никакие два жителя не сказали друг про друга одинаковые фразы. Сколько раз могла прозвучать третья фраза?

Ответ.25 или 20 раз.

Решение. Рыцари из одной деревни должны были сказать друг про друга фразу 1, а из разных деревень – фразу 3. Поскольку никакие два человека не сказали друг про друга одинаковые фразы, честных не больше одного. Пусть рыцарь один. Тогда он сказал про людей из своей деревни фразу 2, а про людей из другой деревни фразу 3 (5 раз). Люди из его деревни могли сказать про него фразу 2 или 3, но поскольку фразы должны быть разные, они сказали фразу 3 (4 раза). Люди из другой деревни могли сказать про него фразу 1 или 2. Остальные люди из одной и той же деревни в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 3, всего фраз было сказано $5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 32$, половина из них – фраза 3.

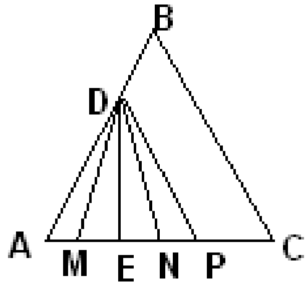
Остальные люди из разных деревень – лжецы, поэтому в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 2 .Всего фраза 3 прозвучала $5+4+16=25$ раз.
Если все люди были лжецами, то про людей из своей деревни они говорили фразы 1 и 3 ($5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 40$ раз), половина из них – фраза 3, а про людей из другой деревни фразы 1 и 2.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 15 баллов. Верно рассмотрен существенный случай – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 3

1. В библиотеку поступили книги «Маленький принц» и «Робинзон Крузо». Полка вмещает или 15 экземпляров книги «Робинзон Крузо», или 36 экземпляров книги «Маленький принц». Если на полку поставили 12 книг «Маленький принц», сколько книг «Робинзон Крузо» можно ещё туда поставить?
Ответ.10.
Решение. Если на полку поставили 12 книг «Маленький принц», полка заполнена на $1/3$. Оставшиеся $2/3$ могут заполнить две трети книг «Робинзон Крузо», то есть 10.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Среди бельчат, участвовавших в соревнованиях по прыжкам, $\frac{2}{7}$ были рыжими, остальные серыми. $\frac{1}{6}$ всех бельчат-прыгунов участвовала также в соревнованиях по бегу, назовём их «бегуны». Доля бегунов среди рыжих бельчат в 2 раза превышает долю бегунов среди серых бельчат. Какая часть рыжих бельчат – бегуны?
Ответ.$7/27$.
Решение.Пусть всего бельчат a, тогда $2a/7$ бельчат рыжие, $5a/7$ бельчат серые, $a/6$ бельчат – бегуны. Пусть число рыжих бельчат-бегунов равно b. Тогда b найдём из соотношения:b: $2a/7 = 2 \cdot (a/6 - b)$: $5a/7$, откуда $b = 2a/27$. Бегуны среди рыжих бельчат составляют $2a/27 : 2a/7 = 7/27$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 8-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB выбрали точку D, и из неё опустили перпендикуляр DE на сторону AC. На стороне AC выбрали точки M и N (M ближе кA) так, что $ME = EN$. Известно, что $BD = 10$, $AM = 3$. Найдите NC.
Ответ.13.
Решение.Отложим от точки Nотрезок NP, равный AM. Отрезок DE – серединный перпендикуляр отрезка AP, поэтому $AD = DP$. Треугольник ADPравнобедренный с углом 60°, значит, он равносторонний. Отсюда $BD = PC$. Тогда $NC = NP + PC = AM + BD = 10 + 3 = 13$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточные обоснования – 15 баллов. В доказательстве есть ошибка – 8-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или содержит грубые ошибки – 0 баллов.*

4. К празднику приготовили цветные шарики. Среди шариков был хотя бы один красный, и хотя бы один зелёный, и для каждого шарика было 15 шариков других цветов (или одного другого цвета). Например, для каждого красного шарика было 15 шариков, которые не красные. Сколько шариков могло быть?

Ответ. $16, 18, 20, 30$.

Решение. Рассмотрим все красные шарики, и возьмём один из них. Для него есть 15 шариков – зелёных и остальных, не красных и не зелёных. Теперь возьмем один зелёный шарик. Для него есть 15 шариков – красных и остальных, не красных и не зелёных. Отсюда следует, что число красных шариков равно числу зелёных шариков. Это относится и к шарикам любого цвета. Значит, 15 шариков состоят из нескольких равных групп шариков разного цвета, то есть число шариков каждого цвета одинаково и является делителем 15. Делители $15: 1, 3, 5, 15$. Если каждого цвета по одному шарику, всего шариков 16. Если каждого цвета по три шарика, всего шариков 18. Если каждого цвета по 5 шариков, всего шариков 20. Если каждого цвета по 15 шариков, всего шариков 30.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За каждый верный обоснованный ответ – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. Лесные гномы или честные (всегда говорят правду), или лжецы (всегда лгут). На поляне собрались 7 гномов из одного леса и 7 гномов из другого леса. Все гномы из одного леса знают, кто из них лжец, а кто честный, а гномы из разных лесов не знают друг про друга. Каждый гном сказал про каждого из остальных одну фразу, то есть всего прозвучало $14 \cdot 13 = 182$ фразы. При этом каждый гном каждый раз говорил одну из трёх фраз: 1) «Это честный гном из нашего леса», 2) «Это лжец из нашего леса», 3) «Не знаю, кто он». Никакие два гнома не сказали друг про друга одинаковые фразы. Сколько раз могла прозвучать третья фраза?

Ответ. 49 раз или 42 раза.

Решение. Честные гномы из одного леса должны были сказать друг про друга фразу 1, а из разных лесов – фразу 3. Поскольку никакие два гнома не сказали друг про друга одинаковые фразы, честных не больше одного. Пусть честный гном один. Тогда он сказал про гномов из своего леса фразу 2, а про гномов из другого леса фразу 3 (7 раз). Гномы из его леса могли сказать про него фразу 2 или 3, но поскольку фразы должны быть разные, они сказали фразу 3 (6 раз). Гномы из другого леса могли сказать про него фразу 1 или 2. Остальные гномы из одного и того же леса в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 3, всего фраз было сказано $7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 = 72$, половина из них – фраза 3. Остальные гномы из разных лесов – лжецы, поэтому в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 2. Всего фраза 3 прозвучала $7 + 6 + 36 = 49$ раз.

Если все гномы были лжецами, то про гномов из своего леса они говорили фразы 1 и 3 ($7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 = 84$ раз), половина из них – фраза 3, а про гномов из другого леса фразы 1 и 2.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 15 баллов. Верно рассмотрен существенный случай – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*