ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. На доске написаны числа $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$. Вася стёр одно или несколько чисел так, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп с равной суммой. Найдите максимальное значение суммы чисел, которые остались на доске.

Ответ. 91.

Решение. Сумма чисел от 4 до 14 равна 99. Если стереть хотя бы одно число, то сумма оставшихся чисел не превосходит 95. Давайте последовательно перебирать варианты.

• Если сумма 95, то стереть Вася мог только число 4; тогда оставшиеся числа можно разбить на пять групп с суммой 19: $14 + 5 = 13 + 6 = 12 + 7 = 11 + 8 = 10 + 9$.

• Если сумма 94, то стереть Вася мог только число 5; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 47: $14 + 13 + 12 + 8 = 11 + 10 + 9 + 7 + 6 + 4$.

• Если сумма 93, то стереть Вася мог только число 6; тогда оставшиеся числа можно разбить на три группы с суммой 31: $14 + 13 + 4 = 12 + 11 + 8 = 10 + 9 + 7 + 5$.

• Если сумма 92, то стереть Вася мог только число 7; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 46: $14 + 13 + 11 + 8 = 12 + 10 + 9 + 6 + 5 + 4$.

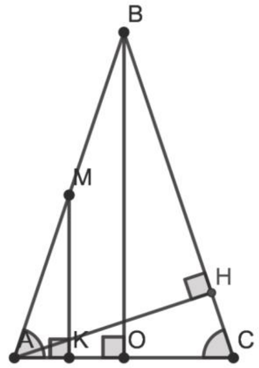
• Если Вася стёр число 8, то на доске остались числа с суммой 91: их можно было бы разбить или на 7 групп с суммой 13 или на 13 групп с суммой 7, или на 91 группы с суммой 1; но в какую-то группу попадёт число 14, поэтому сумма в этой группе будет хотя бы 14; значит, в этом случае разбить числа на группы с одинаковой суммой не получится.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, основанный на рассуждении, что число* $91 = 7 \cdot 13$*, а в наборе чисел присутствует число 14 – 5 баллов. Только верный ответ – 3 балла. Следующие 8 критериев могут суммироваться: доказано, что сумма не может равняться 95 – 4 балла; доказано, что сумма не может равняться 94 – 4 балла; показано, что сумма не может равняться 93 –*

4 балла; показано, что сумма не может равняться 92 – 4 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 95 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 94 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 93 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 92 – 2 балла.

2. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$, в котором проведена высота AH. Из точки M – середины стороны AB, опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника, если известно, что $MK = AH$ и $AK = 10$.

Ответ. 200.



Решение. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведём высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK: KO = AM: MB$, значит $AO = 2AK = 20$. Тогда $AC = 2AO = 40$, $AB = 2AC = 80$. Значит, периметр равен $80 + 80 + 40 = 200$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Найдено, что* $AC = 40$ *– 14 баллов. Доказано, что треугольники* MAK *и* AHC *равны – 8 баллов. Замечено, но не доказано, что треугольники* MAK *и* AHC *равны – 4 балла.*

3. Квадратная таблица размером 10×10 заполнена натуральными числами от 103 до 202. В каждой строке таблицы посчитали произведение чисел и получили набор $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$. Далее в каждом столбце также посчитали произведение чисел и получили набор $\{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$. Могут ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ. Нет, не могли.

Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 202: $151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199$. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 202. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что в некоторой строчке или столбце есть хотя бы 2 числа из набора 11 простых чисел, но не сказано, что от 103 до 202 нет чисел кратных данным – 16 баллов. В решении присутствует идея использовать 11 простых чисел или аналогичная без дальнейших продвижений – 10 баллов. В решении присутствует идея использовать простые числа без дальнейших продвижений – 4 балла. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрен частный случай расстановки чисел – 0 баллов.*

4. В алфавите языка бельчат ровно 5 букв: А, Б, В, И, О, а в каждом слове ровно две гласные, они стоят не рядом, а согласных может быть сколько угодно, но не бывает тройки согласных подряд. Вождь бельчат повелел считать словами все строки букв, удовлетворяющих этим условиям, и выпустить полный словарь. Сколько в нём будет слов?

Ответ. 2646 слов.

Решение 1. Сначала перечислим грубые скелеты слов, обозначив места гласных через Г, а места групп согласных – через С: ГСГ, ГСГС, СГСГ, СГСГС. Сделаем скелеты более подробными, чтобы видеть число букв в слове. Место гласной обозначим через *г*, согласной – через *с*. Группа С может быть заменена на *с* или *сс*. Так, из СГСГ получим 4 подробных скелета: *сгсг, сгссг, ссгсг* и *ссгссг*. В всего получится $2 + 4 + 4 + 8 = 18$ подробных скелетов: *гсг, гссг*; *гсгс, -, гссгс, гссгсс*; *сгсг, сгссг, ссгсг, ссгссг*; *сгсгс, сгсгсс, сгссгс, сгссгсс, ссгсгс, ссгсгсс, ссгссгс, ссгссгсс*. Сгруппируем по длинам: длины 3, 4, 5, 6, 7, 8 встречаются соответственно 1, 3, 5, 5, 3, 1 раз. Осталось заметить, что число слов для каждого подробного скелета одинаково. Например, в $6-$буквенном есть две гласные и 4 согласные буквы. Для каждой гласной есть 3 варианта, для каждой согласное – 2 варианта, выбор независим, поэтому для данного скелета есть всего $3^2 \cdot 2^4 = 144$ слова. А всего $6-$буквенных слов будет $5 \cdot 144$. Так, вычисляя и суммируя по всем размерам, получим

$$1 \cdot 3^2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2^5 + 1 \cdot 3^2 \cdot 2^6 = 2646.$$

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ из-за одной или нескольких арифметических ошибок – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены случаи повтора гласных или согласных букв – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены некоторые скелеты слов – до 10 баллов. Доказано, что существует ровно 18 скелетов слов – 8 баллов. Найдены все 18 скелетов слов, но не доказано, что других нет – 6 баллов. Найдены менее 18 скелетов слов – 4 балла. Замечено, что минимальная длина слова – 3, а максимальная – 8 – 2 балла. Есть небольшие продвижения в решении – 2 балла. Только верный ответ – 0 баллов.*

Решение 2. Известно, что гласных букв всегда две, тогда наше слово можно представить в виде $(1)\Gamma(2)\Gamma(3)$, где на местах $(1), (2), (3)$ могут стоять согласные буквы. Различных расстановок гласных букв $3 \cdot 3 = 9$. На позиции (2) может стоять 1 или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки равно $2 + 2 \cdot 2 = 6$. Далее на местах (1) и (3) могут стоять $0, 1$ или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки на каждой из этих позиций равно $1 + 2 + 2 \cdot 2 = 7$. Отметим, что количество способов расставить согласные буквы на 0 мест равно 1. Тогда общее количество различных слов равно $9 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 = 2646$.

5. Натуральные числа x и y таковы, что $x^3 + y^3 + xy$ делится на $xy(x - y)$. Докажите, что наименьшее общее кратное чисел x и y является точным квадратом.

Решение. Пусть d – наибольший общий делитель чисел x и y. Положим $x = dx_1$ и $y = dy_1$. Тогда числа x_1 и y_1 взаимно просты, $\text{НОК}(x, y) = dx_1y_1$, а делимость $x^3 + y^3 + xy$ на $xy(x - y)$ влечёт делимость числа $n = dx_1^3 + dy_1^3 + x_1y_1$ на $dx_1y_1(x_1 - y_1)$ и, в частности, делимость на d. Следовательно, x_1y_1 делится на d. Заметим, что n делится на x_1 и, значит, dy_1^3 делится на x_1. Но поскольку числа x_1 и y_1 взаимно просты, d делится на x_1. Аналогично, проверяется, что d делится на y_1. Снова используя взаимную простоту чисел x_1 и y_1, получаем, что d делится на x_1y_1. Таким образом, $d = x_1y_1$. Стало быть, $\text{НОК}(x, y) = dx_1y_1 = d^2$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что d делится на x_1 или на y_1 – 15 баллов. Доказано, что dy_1^3 делится на x_1 или dx_1^3 делится на y_1, или аналогичное утверждение – 10 баллов. Доказано, что x_1y_1 делится на d или аналогичное утверждение – 5 баллов. Рассмотрен пример конкретных чисел x и y – 0 баллов.*

Вариант 2

1. На доске написаны числа $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$. Петя стёр одно или несколько чисел так, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп с равной суммой. Найдите максимальное значение суммы чисел, которые остались на доске.

Ответ. 121.

Решение. Сумма чисел от 4 до 16 равна 130. Если стереть хотя бы одно число, то сумма оставшихся чисел не превосходит 126. Давайте последовательно перебирать варианты.

• Если сумма 126, то стереть Петя мог только число 4; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 63: $16 + 15 + 14 + 13 + 5 = 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6$.

• Если сумма 125, то стереть Петя мог только число 5; тогда оставшиеся числа можно разбить на пять групп с суммой 25: $16 + 9 = 15 + 10 = 14 + 11 = 13 + 12 = 8 + 7 + 6 + 4$.

• Если сумма 124, то стереть Петя мог только число 6; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 62: $16 + 15 + 14 + 13 + 4 = 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 5$.

• Если сумма 123, то стереть Петя мог только число 7; тогда оставшиеся числа можно разбить на три группы с суммой 41: $16 + 15 + 10 = 14 + 13 + 9 + 5 = 12 + 11 + 8 + 6 + 4$.

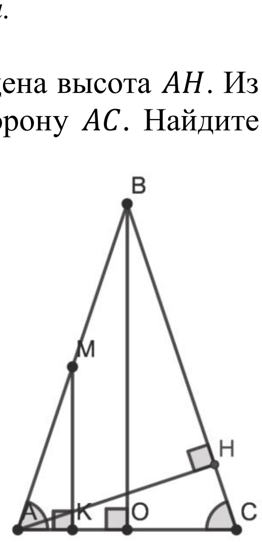
• Если сумма 122, то стереть Петя мог только число 8; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 61: $16 + 15 + 14 + 12 + 4 = 13 + 11 + 10 + 9 + 7 + 6 + 5$.

• Если Петя стёр число 9, то число на доске остались числа с суммой 121: их можно было бы разбить или на 11 групп с суммой 11 или на 121 групп с суммой 1; но в какую-то группу попадёт число 16, поэтому сумма в этой группе будет хотя бы 16; значит, в этом случае разбить числа на группы с одинаковой суммой не получится.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, основанный на рассуждении, что число* $121 = 11 \cdot 11$, *а в наборе чисел присутствует число 16 – 5 баллов. Только верный ответ – 3 балла. Следующие 10 критериев могут суммироваться: доказано, что сумма не может равняться 126 – 3 балла; доказано, что сумма не может равняться 125 – 3 балла; доказано, что сумма не может равняться 124 – 3 балла; доказано, что сумма не может равняться 123 – 3 балла; доказано, что сумма не может равняться 122 – 3 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 126 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 125 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 124 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 123 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 122 – 2 балла.*

2. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$, в котором проведена высота AH. Из точки M – середины стороны AB, опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника, если известно, что $MK = AH$ и $AK = 12$.

Ответ. 240.



Решение. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведём высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK{:}\,KO = AM{:}\,MB$, значит $AO = 2AK = 24$. Тогда $AC = 2AO = 48$, $AB = 2AC = 96$. Значит, периметр равен $96 + 96 + 48 = 240$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Найдено, что* $AC = 48$ *– 14 баллов. Доказано, что треугольники* MAK *и* AHC *равны – 8 баллов. Замечено, но не доказано, что треугольники* MAK *и* AHC *равны – 4 балла.*

3. Квадратная таблица размером 10×10 заполнена натуральными числами от 104 до 203. В каждой строке таблицы посчитали произведение чисел и получили набор $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$. Далее в каждом столбце также посчитали произведение чисел и получили набор $\{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$. Могут ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ. Нет, не могли.

Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 203: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 203. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что в некоторой строчке или столбце есть хотя бы 2 числа из набора 11 простых чисел, но не сказано, что от 104 до 203 нет чисел кратных данным – 16 баллов. В решении присутствует идея использовать 11 простых чисел или аналогичная без дальнейших продвижений – 10 баллов. В решении присутствует идея использовать простые числа без дальнейших продвижений – 4 балла. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрен частный случай расстановки чисел – 0 баллов.*

4. В алфавите языка бельчат ровно 5 букв: Е, Г, Д, У, Ю, а в каждом слове ровно две гласные, они стоят не рядом, а согласных может быть сколько угодно, но не бывает тройки согласных подряд. Вождь бельчат повелел считать словами все строки букв, удовлетворяющих этим условиям, и выпустить полный словарь. Сколько в нём будет слов?

Ответ. 2646 слов.

Решение. Сначала перечислим грубые скелеты слов, обозначив места гласных через Г, а места групп согласных – через С: ГСГ, ГСГС, СГСГ, СГСГС. Сделаем скелеты более подробными, чтобы видеть число букв в слове. Место гласной обозначим через *г*, согласной – через *с*. Группа С может быть заменена на *с* или *сс*. Так, из СГСГ получим 4 подробных скелета: *сгсг, сгссг, ссгсг* и *ссгссг*. В всего получится $2 + 4 + 4 + 8 = 18$ подробных скелетов: *гсг, гссг*; *гсгс, гсгсс, гссгс, гссгсс*; *сгсг, сгссг, ссгсг, ссгссг*; *сгсгс, сгсгсс, сгссгс, сгссгсс, ссгсгс, ссгсгсс, ссгссгс, ссгссгсс*. Сгруппируем по длинам: длины 3, 4, 5, 6, 7, 8 встречаются соответственно 1, 3, 5, 5, 3, 1 раз. Осталось заметить, что число слов для каждого подробного скелета одинаково. Например, в 6 –буквенном есть две главнсые и 4 согласные буквы. Для каждой гласной есть 3 варианта, для каждой согласное – 2 варианта, выбор независим, поэтому для данного скелета есть всего $3^2 \cdot 2^4 = 144$ слова. А всего 6 –буквенных слов будет $5 \cdot 144$. Так, вычисляя и суммируя по всем размерам, получим

$$1 \cdot 3^2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2^5 + 1 \cdot 3^2 \cdot 2^6 = 2646.$$

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ из-за одной или нескольких арифметических ошибок – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены случаи повтора гласных или согласных букв – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены некоторые скелеты слов – до 10 баллов. Доказано, что существует ровно 18 скелетов слов – 8 баллов. Найдены все 18 скелетов слов, но не доказано, что других нет – 6 баллов. Найдены менее 18 скелетов слов – 4 балла. Замечено, что минимальная длина слова – 3, а максимальная – 8 – 2 балла. Есть небольшие продвижения в решении – 2 балла. Только верный ответ – 0 баллов.*

Решение 2. Известно, что гласных букв всегда две, тогда наше слово можно представить в виде $(1)\Gamma(2)\Gamma(3)$, где на местах $(1),(2),(3)$ могут стоять согласные буквы. Различных расстановок гласных букв $3 \cdot 3 = 9$. На позиции (2) может стоять 1 или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки равно $2 + 2 \cdot 2 = 6$. Далее на местах (1) и (3) могут стоять $0, 1$ или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки на каждой из этих позиций равно $1 + 2 + 2 \cdot 2 = 7$. Отметим, что количество способов расставить согласные буквы на 0 мест равно 1. Тогда общее количество различных слов равно $9 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 = 2646$.

5. Целые числа k, m и n удовлетворяют равенству
$$(k-5)^2 + (m-12)^2 - (n-13)^2 = k^2 + m^2 - n^2.$$
Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.

Решение. Раскрыв скобки в условии, получим, что $10k + 24m - 26n = 0$. Тогда
$$13^2(k^2 + m^2 - n^2) = (13k)^2 + (13m)^2 - (5k + 12m)^2 = (12k - 5m)^2.$$
Следовательно, $12k - 5m$ делится на 13, т.е. $12k - 5m = 13a$ для некоторого целого a и
$$k^2 + m^2 - n^2 = \frac{(12k - 5m)^2}{13^2} = a^2.$$
Комментарий. *Верное обоснованное доказательство – 20 баллов. Доказано, что левая или правая части является полным квадратом – 16 баллов. Получено выражение* $10k + 24m - 26n = 0$ *или аналогичное – 5 баллов.*

Вариант 3

1. На доске написаны числа $7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$. Саша стёр одно или несколько чисел так, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп с равной суммой. Найдите максимальное значение суммы чисел, которые остались на доске.

Ответ. 121.

Решение. Сумма чисел от 7 до 17 равна 132. Если стереть хотя бы одно число, то сумма оставшихся чисел не превосходит 125. Давайте последовательно перебирать варианты.

• Если сумма 125, то стереть Саша мог только число 7; тогда оставшиеся числа можно разбить на пять групп с суммой 26: $8 + 17 = 9 + 16 = 10 + 15 = 11 + 14 = 12 + 13$.

• Если сумма 124, то стереть Саша мог только число 8; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 62: $17 + 16 + 15 + 14 = 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 7$.

• Если сумма 123, то стереть Саша мог только число 9; тогда оставшиеся числа можно разбить на три группы с суммой 41: $17 + 16 + 8 = 15 + 14 + 12 = 13 + 11 + 10 + 7$.

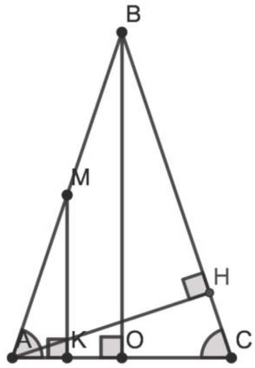
• Если сумма 122, то стереть Саша мог только число 10; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 61: $17 + 16 + 14 + 13 = 14 + 12 + 11 + 9 + 8 + 7$.

• Если Саша стёр число 11, то число на доске остались числа с суммой 121: их можно было бы разбить или на 11 групп с суммой 11 или на 121 групп с суммой 1; но в какую-то группу попадёт число 17, поэтому сумма в этой группе будет хотя бы 17; значит, в этом случае разбить числа на группы с одинаковой суммой не получится.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, основанный на рассуждении, что число* $121 = 11 \cdot 11$, *а в наборе чисел присутствует число 16 – 5 баллов. Только верный ответ – 3 балла. Следующие 8 критериев могут суммироваться: доказано, что сумма не может равняться 125 – 4 балла; доказано, что сумма не может равняться 124 – 4 балла; доказано, что сумма не может равняться 123 – 4 балла; доказано, что сумма не может равняться 122 – 4 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 125 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 124 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 123 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 122 – 2 балла.*

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), в котором проведена высота AH. Из точки M – середины стороны AB, опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника, если известно, что $MK = AH$ и $AK = 14$.

Ответ. 280.



Решение. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведём высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK{:}\,KO = AM{:}\,MB$, значит $AO = 2AK = 28$. Тогда $AC = 2AO = 56$, $AB = 2AC = 112$. Значит, периметр равен $112 + 112 + 56 = 280$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Найдено, что* $AC = 56$ *– 14 баллов. Доказано, что треугольники* MAK *и* AHC *равны – 8 баллов. Замечено, но не доказано, что треугольники* MAK *и* AHC *равны – 4 балла.*

3. Квадратная таблица размером 10×10 заполнена натуральными числами от 105 до 204. В каждой строке таблицы посчитали произведение чисел и получили набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$. Далее в каждом столбце также посчитали произведение чисел и получили набор $\{b_1, b_2, \ldots, b_{10}\}$. Могут ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ.

Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 204: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 204. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что в некоторой строчке или столбце есть хотя бы 2 числа из набора 11 простых чисел, но не сказано, что от 105 до 204 нет чисел кратных данным – 16 баллов. В решении присутствует идея использовать 11 простых чисел или аналогичная без дальнейших продвижений – 10 баллов. В решении присутствует идея использовать простые числа без дальнейших продвижений – 4 балла. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрен частный случай расстановки чисел – 0 баллов.*

4. В алфавите языка бельчат ровно 5 букв: О, К, М, Е, Я, а в каждом слове ровно две гласные, они стоят не рядом, а согласных может быть сколько угодно, но не бывает тройки согласных подряд. Вождь бельчат повелел считать словами все строки букв, удовлетворяющих этим условиям, и выпустить полный словарь. Сколько в нём будет слов?

Ответ. 2646 слов.

Решение. Сначала перечислим грубые скелеты слов, обозначив места гласных через Г, а места групп согласных – через С: ГСГ, ГСГС, СГСГ, СГСГС. Сделаем скелеты более подробными, чтобы видеть число букв в слове. Место гласной обозначим через *г*, согласной – через *с*. Группа С может быть заменена на *с* или *сс*. Так, из СГСГ получим 4 подробных скелета: *сгсг, сгссг, ссгсг* и *ссгссг*. В всего получится $2+4+4+8=18$ подробных скелетов: *гсг, гссг*; *гсгс, гсгсс, гссгс, гссгсс*; *сгсг, сгссг, ссгсг, ссгссг*; *сгсгс, сгсгсс, сгссгс, сгссгсс, ссгсгс, ссгсгсс, ссгссгс, ссгссгсс*. Сгруппируем по длинам: длины 3, 4, 5, 6, 7, 8 встречаются соответственно 1, 3, 5, 5, 3, 1 раз. Осталось заметить, что число слов для каждого подробного скелета одинаково. Например, в $6-$буквенном есть две главнсые и 4 согласные буквы. Для каждой гласной есть 3 варианта, для каждой согласное – 2 варианта, выбор независим, поэтому для данного скелета есть всего $3^2 \cdot 2^4 = 144$ слова. А всего $6-$буквенных слов будет $5 \cdot 144$. Так, вычисляя и суммируя по всем размерам, получим

$$1 \cdot 3^2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2^5 + 1 \cdot 3^2 \cdot 2^6 = 2646.$$

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ из-за одной или нескольких арифметических ошибок – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены случаи повтора гласных или согласных букв – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены некоторые скелеты слов – до 10 баллов. Доказано, что существует ровно 18 скелетов слов – 8 баллов. Найдены все 18 скелетов слов, но не доказано, что других нет – 6 баллов. Найдены менее 18 скелетов слов – 4 балла. Замечено, что минимальная длина слова – 3, а максимальная – 8 – 2 балла. Есть небольшие продвижения в решении – 2 балла. Только верный ответ – 0 баллов.*

Решение 2. Известно, что гласных букв всегда две, тогда наше слово можно представить в виде $(1)\Gamma(2)\Gamma(3)$, где на местах $(1), (2), (3)$ могут стоять согласные буквы. Различных расстановок гласных букв $3 \cdot 3 = 9$. На позиции (2) может стоять 1 или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки равно $2 + 2 \cdot 2 = 6$. Далее на местах (1) и (3) могут стоять $0, 1$ или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки на каждой из этих позиций равно $1 + 2 + 2 \cdot 2 = 7$. Отметим, что количество способов расставить согласные буквы на 0 мест равно 1. Тогда общее количество различных слов равно $9 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 = 2646$.

5. Целые числа k, m и n удовлетворяют равенству

$$(k+3)^2 + (m+4)^2 - (n+5)^2 = k^2 + m^2 - n^2.$$

Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.

Решение. Раскрыв скобки в условии, получим, что $6k + 8m - 10n = 0$. Тогда

$$5^2(k^2 + m^2 - n^2) = (5k)^2 + (5m)^2 - (3k + 4m)^2 = (4k - 3m)^2.$$

Следовательно, $4k - 3m$ делится на 5, т.е. $4k - 3m = 5a$ для некоторого целого a и

$$k^2 + m^2 - n^2 = \frac{(4k - 3m)^2}{5^2} = a^2.$$

Комментарий. *Верное обоснованное доказательство – 20 баллов. Доказано, что левая или правая части является полным квадратом – 16 баллов. Получено выражение* $6k + 8m - 10n = 0$ *или аналогичное – 5 баллов.*

Вариант 4

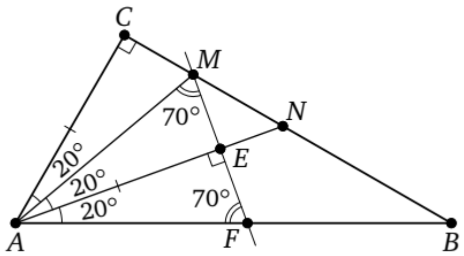
1. Две неубывающие последовательности неотрицательных целых чисел начинаются с разных чисел, и каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Десятые члены этих последовательностей совпадают. Найдите наименьшее возможное значение десятого члена.

Ответ. 1870.

Решение. Поскольку $a_3 = a_1 + a_2$, то $a_4 = a_2 + a_3 = a_1 + 2a_2$, $a_5 = a_3 + a_4 = 2a_1 + 3a_2$, $a_6 = 3a_1 + 5a_2$, …, $a_{10} = 21a_1 + 34a_2$. Аналогично, $b_{10} = 21b_1 + 34b_2$. Пусть $a_1 < b_1$. Возьмем для минимизации выражения $21a_1 + 34a_2$ число $a_1 = 0$. Тогда $34a_2 = 21b_1 + 34b_2$, и b_1 должно делиться на 34, при этом $b_1 \neq a_1 = 0$. Поэтому минимальное

возможное значение $b_1 = 34$. Получаем $34a_2 = 21 \cdot 34 + 34b_2$, или $a_2 = 21 + b_2$. Число b_2 мы выбираем наименьшим, но не меньше b_1, то есть b_2 =34. Тогда значение десятого члена равно $21 \cdot 34 + 34 \cdot 34 = 1870$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обоснованно получено, что* $b_2 = 34$ *– 16 баллов. Обоснованно получено, что* $a_1 = 0$, *а* $b_1 = 34$ *или наоборот – 8 баллов. Обоснованно получено, что* $b_{10} = 21b_1 + 34b_2$ *или* $a_{10} = 21a_1 + 34a_2$ *– 6 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. На катете BC отмечены точки M и N так, что $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB$. Пусть E и F – точки пересечения прямой, проходящей через точку M и отрезков AN и AB соответственно. Найдите AB, если известно, что $AE = 10$, $\angle ANB = 130^\circ$ и $\angle BFM = 110^\circ$.
Ответ. 20.
Решение. Из условия следует, что $\angle ANC = 50^\circ$. Тогда в прямоугольном треугольнике ANC имеем $CAN = 40^\circ$. Отсюда следует, что $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB = 20^\circ$. Так как $\angle BFM = 110^\circ$, получаем, что $\angle AFM = 70^\circ$. Но тогда в треугольнике MAF получаем $\angle AMF = 70^\circ$. Значит, треугольник MAF равнобедренный и его биссектриса AE является высотой. Но тогда прямоугольные треугольники AME и AMC равны (AM – общая гипотенуза, $\angle CAM = MAE$). Поэтому $AC = a$. Наконец, поскольку в прямоугольном треугольнике ABC угол CAB равен 60°, гипотенуза равна $AB = 2AC = 2a$.



Комментарий. *Полное обоснованное решение – 20 баллов. Следующие 4 критерия могут суммироваться: Найдено, что* $\angle CAB = 60°$ *- 4 балла. Доказано, что* $AE = AC$ *– 4 балла. Доказано, что треугольник* MAF *равнобедренный – 5 баллов. Доказано, что* $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB = 20^\circ$ *- 5 баллов.*

3. Вася придумал новую шахматную фигуру X, которая может бить фигуру, которая находится на растоянии 5 сантиметров от неё (расстояние между фигурами – это расстояние между центрами клеток, в которых находятся фигуры). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга фигур X можно расставить на квадратной клетчатой доске 8×8 со стороной клетки, равной одному сантиметру?
Ответ. 32.
Решение. Заметим, что при шахматной раскраске доски фигура X бьёт только клетки цвета, противоположного цвету клетки, на которой стоит он сам.
Примечание. Идея использовать шахматную раскраску сама по себе не является оценкой.
Оценка. Разметим поле следующим образом:

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	D	E	F	G	H
I	J	K	L	M	O	P	Q
R	S	T	U	V	W	X	Z
5	6	7	8	1	2	3	4
E	F	G	H	A	B	C	D
M	O	P	Q	I	J	K	L
V	W	X	Z	R	S	T	U

На каждой паре клеток, помеченной одинаковыми символами, может стоять максимум одна фигура X.
Пример. Покрасим доску в шахматном порядке и расставим фигуры X на клетках чёрного цвета.

Комментарий. *Верное решение, содержащее в себе оценку+пример – 20 баллов. Получена верная оценка, что максимум 32 фигуры X – может быть на доске – 14 баллов. Замечено, что при шахматной раскраске фигура X бьёт только клетки противоположного цвета – 6 баллов (+ 4 балла за приведённый пример). Только пример на расстановку 32 фигур – 4 балла. Замечено, что фигура X может совершать шаги на* $(3;\ 4), (0;\ 5)$ *или аналогичные – 2 балла.*

4. На клетчатой доске 21×21 фишку двигали из одного угла в другой, делая ходы только вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Ходов в каждом направлении было поровну. Найдите число возможных маршрутов, если известно, что фишку не могли двигать два хода подряд по диагонали.

Ответ. $C_{20}^{10} \cdot C_{21}^{10}$.

Решение. Очевидно, что фишка двигалась из левого нижнего угла в правый верхний. Она сдвинулась на 20 клеток вправо и на 20 вверх, итого на 40. Ход по диагонали увеличивал суммарный сдвиг на 2, остальные ходы – на 1. Если в каждом направлении было сделано x ходов, то получаем уравнение $x + x + 2x = 40$, откуда находим $x = 10$. Обозначая ходы буквами П (вправо), В (вверх) и Д (по диагонали) закодируем каждый маршрут словами из 30 букв, где всех букв по 10. Соответствие однозначное. Сначала составим скелет: слово их 10 букв П и 10 букв В, это можно сделать C_{20}^{10} способами. Затем расставим 10 букв Д по 21 месту (19 промежутков и 2 края). Это можно сделать C_{21}^{10} способами. Ответ равен произведению: $C_{20}^{10} \cdot C_{21}^{10}$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что по вертикали и горизонтали можно сделать* C_{20}^{10} *путей – 12 баллов. Получено, что в каждом направлении было сделано по 10 ходов – 5 баллов. Замечено, что всего движений было 40 – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла.*

5. Натуральные числа k, m и n таковы, что $(k - m)$ – простое число и $3n^2 = n(k + m) + km$. Докажите, что число $8n + 1$ является точным квадратом.

Решение. Обозначим $p = k - m$, $q = k + m$. Тогда имеем $12n^2 = 4nq + q^2 - p^2$. Откуда

$$p^2 = q^2 + 4nq - 12n^2 = (q - 2n)(q + 6n).$$

Поскольку p – простое число, то $q + 6n = p^2$, $q - 2n = 1$, откуда получаем, что $8n + 1 = p^2$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Замечено, что одно из чисел* $(q - 2n), (q + 6n)$ *равно* 1, *а другое* p^2*- 14 баллов. Доказано, что* $(k - m)^2 = (q - 2n)(q + 6n)$ *– 8 баллов. Введена замена* $p = k - m,\ q = k + m$ *без дальнейших продвижений – 4 балла.*