ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Для $x = \sqrt{7} + 1$ найдите значение выражения $x^5 - 5x^4 + 36x$.

Ответ. -108.

Решение. $x = \sqrt{7} + 1, (x-1)^2 = 7, x^2 - 2x = 6$.

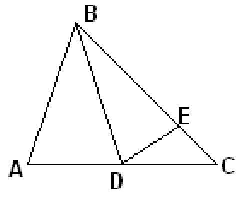
$x^5 - 5x^4 + 36x = x^3(x^2 - 2x) - 3x^4 + 36x = 6x^3 - 3x^4 + 36x = 3x^2(2x - x^2) + 36x = -18x^2 + 36x = -18(x^2 - 2x) = -108$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне $AC, \angle ABD = \angle CBD, AB = BD = 5, BC = 9$. Найдите CD.

Ответ. 6.

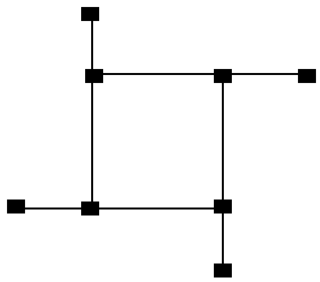
Решение. Отложим на стороне BC отрезок BE, равный BD. Тогда $EC = 9 - 5 = 4$. Треугольники ABD и DBE равны, следовательно, $\angle ADB = \angle DEB$, и $\angle BDC = \angle CED$. в треугольниках BDC и DEC угол C общий, $\angle BDC = \angle CED$ (как смежные с равными углами), следовательно, треугольники BDC и DEC подобны. Тогда $\frac{CD}{BC} = \frac{EC}{CD}$, откуда $CD^2 = BC \cdot EC = 9 \cdot 4 = 36. CD = 6$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верное решение не закончено – 10 баллов. Без доказательства использовано утверждение «$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot CD$» или формула длины биссектрисы – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

3. На ровной площадке сидят 8 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 6 бельчат. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).

Ответ. Например, так.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Предложенная схема размещения правдоподобна, но не имеет описания, и изображена неточно – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. На плоскости поставили 70 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 500 неравнобедренных треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета. *Замечание. Равносторонний треугольник является равнобедренным.*

Решение. Обозначим максимальное число точек одного цвета a. Найдется не менее 18 точек одного цвета, так как $17 \cdot 4 = 68 < 70$, то есть $a \geq 18$.Соединяя точки данного цвета, получаем $\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}$ треугольников. Каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам. Действительно, предположим, что какой-то отрезок служит основанием трём равнобедренным треугольникам. Тогда третьи вершины этих трёх треугольников лежат на серединном перпендикуляре отрезка, то есть на одной прямой, что противоречит условию. Итак, равнобедренных треугольников с вершинами в точках данного цвета не больше, чем $2 \cdot \frac{a\cdot(a-1)}{2} = a \cdot (a-1)$. Тогда неравнобедренных треугольников с вершинами данного цвета не менее A= $\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6} - a \cdot (a-1) = a \cdot (a-1)\left(\frac{a-2}{6} - 1\right) = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-8)}{6}$. При $a = 18$ число $A = 510 > 500$. При $a > 18$ число $A > 510 > 500$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Замечен факт, что каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам, но строгого доказательства нет – 10 баллов. Вместо этого факта используются оценки, полученные из примеров – не больше 10 баллов. Рассмотрен частный случай размещения точек – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Целое число n делится на 7 и может быть представлено в виде $n = 3a^2 + b^2$, где a, b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа m и k, что $\frac{n}{7} = 3m^2 + k^2$.

Решение. Пусть $n = 7c$, тогда $7c = 3a^2 + b^2 = 7a^2 + (b - 2a)(b + 2a)$. Следовательно, $(b - 2a)(b + 2a)$ делится на 7. Пусть $b - 2a = 7d$, тогда $\frac{n}{7} = a^2 + d(b + 2a) = a^2 + d(7d + 4a) = 7d^2 + a^2 + 4ad = (a + 2d)^2 + 3d^2$. Таким образом, $m = d, k = a + 2d$, где $d = \frac{b-2a}{7}$. Если $b + 2a = 7d$, то $\frac{n}{7} = a^2 + d(7d - 4a) = 7d^2 + a^2 - 4ad = (a - 2d)^2 + 3d^2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За пробелы в доказательстве снимается от 1 до 5 баллов. Есть некоторое продвижение – до 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

Вариант 2

1. Для $x = \sqrt{11} - 1$ найдите значение выражения $x^5 + 7x^4 + 100x$.

Ответ. 500.

Решение. $x = \sqrt{11} - 1, (x + 1)^2 = 11, x^2 + 2x = 10.$

$x^5 + 7x^4 + 100x = x^3(x^2 + 2x) + 5x^4 + 100x = 10x^3 + 5x^4 + 100x = 5x^2(2x + x^2) + 100x = 50x^2 + 100x = 50(x^2 + 2x) = 500.$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. Внутри равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB < CD = 10$ см, $BC = AD$) выбрана точка E, отстоящая от вершин A, B, C, D соответственно на 3, 4, 6, 5 см. Найдите длину AB.

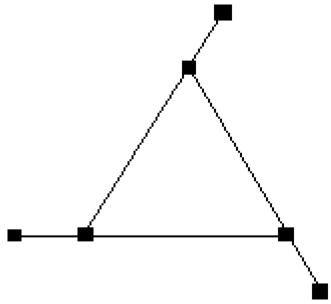
Ответ. $\frac{70}{11}$

Решение. Проведём ось симметрии трапеции, и опустим из точки E перпендикуляр EF на ось симметрии. Обозначим a длину EF, а расстояния от точки F до AB и CD обозначим соответственно b и c. Пусть длина AB равна $2x$. Тогда $(x - a)^2 + b^2 = 9, (x + a)^2 + b^2 = 16$. Вычитая, получаем $4ax = 7$. Аналогично, $(5 - a)^2 + c^2 = 25, (5 + a)^2 + c^2 = 36$. Вычитая, получаем $20a = 11$. Отсюда $a = \frac{11}{20}$ и $x = \frac{35}{11}, AB = \frac{70}{11}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов. Без доказательства использовано утверждение «$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot CD$» или формула длины биссектрисы – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

3. На ровной площадке сидят 6 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 4 бельчонка. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).

Ответ. Например, так.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Предложенная схема размещения правдоподобна, но не имеет описания, и изображена неточно – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. На листе бумаги поставили 75 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 620 неравнобедренных треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета. *Замечание. Равносторонний треугольник является равнобедренным.*

Решение.Обозначим максимальное число точек одного цвета a. Найдется не менее 19 точек одного цвета, так как $18 \cdot 4 = 72 < 75,$ то есть $a \geq 19$.Соединяя точки данного цвета, получаем $\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}$ треугольников. Каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам. Действительно, предположим, что какой-то отрезок служит основанием трём равнобедренным треугольникам. Тогда третьи вершины этих трёх треугольников лежат на серединном перпендикуляре отрезка, то есть на одной прямой, что противоречит условию. Итак, равнобедренных треугольников с вершинами в точках данного цвета не больше, чем $2 \cdot \frac{a\cdot(a-1)}{2} = a \cdot (a-1)$. Тогда неравнобедренных треугольников с вершинами данного цвета не менее A= $\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6} - a \cdot (a-1) = a \cdot (a-1)\left(\frac{a-2}{6} - 1\right) = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-8)}{6}$. При $a = 19$ число $A = 627 > 620$. При $a > 19$ число $A > 627 > 620$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Замечен факт, что каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам, но строгого доказательства нет – 10 баллов. Рассмотрен частный случай размещения точек – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Целое число nделится на19и может быть представлено в виде $n = 3a^2 + b^2$, где a, b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа mи k, что $\frac{n}{19} = 3m^2 + k^2$.

Решение. Пусть $n = 19c$, тогда $19c$ =$3a^2 + b^2$ =$19a^2 + (b-4a)(b+4a)$. Следовательно, $(b-4a)(b+4a)$ делится на 19. Пусть $b - 4a = 19d$, тогда $\frac{n}{19} = a^2 + d(b+4a) = a^2 + d(19d + 8a) = 19d^2 + a^2 + 8ad = (a+4d)^2 + 3d^2$. Таким образом, $m = d, k = a + 4d$, где $d = \frac{b-4a}{19}$.

Если $b + 4a = 19d$, то $\frac{n}{19} = a^2 + d(b-4a) = a^2 + d(19d - 8a) = 19d^2 + a^2 - 8ad = (a-4d)^2 + 3d^2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За пробелы в доказательстве снимается от 1 до 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

Вариант 3

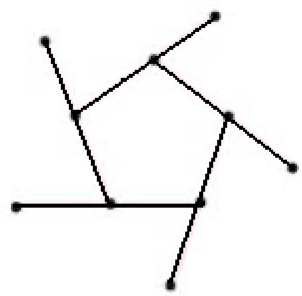
1. Для $x=\sqrt{6}+1$ найдите значение выражения $2x^5-9x^4+50x$.
Ответ. -125.
Решение. $x=\sqrt{6}+1, (x-1)^2=6, x^2-2x=5$.

$$2x^5+x^4+50x=2x^3(x^2-2x)-5x^4+50x=10x^3-5x^4+50x=5x^2(2x-x^2)+50x=-25x^2+50x=-25(x^2-2x)=-125.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне $AC, \angle ABD=\angle CBD$, $AB=5$, $BC=16$. Докажите, что $BD<9$.
Решение. Проведём через точку D прямую под углом к прямой BD, равным углу BAC. Точку, в которой прямая пересекает BC, обозначим E. Заметим, что E внутренняя точка стороны BC, так как $\angle BDC>\angle BAC$ ($\angle BDC$ – внешний смежный угол и равен $\angle BAC$ $+\angle DBA$). Треугольники BDE и BAD подобны, так как $\angle ABD=\angle EBD$ по условию, $\angle BAD=\angle BDE$ по построению. Следовательно, $\frac{BE}{BD}=\frac{BD}{AB}$, то есть $BD^2=AB\cdot BE<AB\cdot BC=5\cdot16=80$. Тогда $BD<\sqrt{80}<9$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов. Без доказательства использовано утверждение «$BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot CD$» или формула длины биссектрисы – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

3. На ровной площадке сидят 10 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 8 бельчат. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).
Ответ. Например, так.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Предложенная схема размещения правдоподобна, но не имеет описания, и изображена неточно – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. На листе бумаги поставили 82 точки так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 900 неравнобедренных треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета. *Замечание. Равносторонний треугольник является равнобедренным.*
Решение. Обозначим максимальное число точек одного цвета a. Найдется не менее 21 точек одного цвета, так как $20\cdot4=80<82$, то есть $a\geq21$. Соединяя точки данного цвета,

получаем $\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}$ треугольников. Каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам. Действительно, предположим, что какой-то отрезок служит основанием трём равнобедренным треугольникам. Тогда третьи вершины этих трёх треугольников лежат на серединном перпендикуляре отрезка, то есть на одной прямой, что противоречит условию. Итак, равнобедренных треугольников с вершинами в точках данного цвета не больше, чем $2\cdot\frac{a\cdot(a-1)}{2}=a\cdot(a-1)$. Тогда неравнобедренных треугольников с вершинами данного цвета не менее $A=\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}-a\cdot(a-1)=a\cdot(a-1)\left(\frac{a-2}{6}-1\right)=\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-8)}{6}$. При $a=21$ число $A=910>900$. При $a>21$ число $A>910>900$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Замечен факт, что каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам, но строгого доказательства нет – 10 баллов. Рассмотрен частный случай размещения точек – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Целое число n делится на 67 и может быть представлено в виде $n=3a^2+b^2$, где a,b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа m и k, что $\frac{n}{67}=3m^2+k^2$.

Решение. Пусть $n=67c$, тогда $67c=3a^2+b^2=67a^2+(b-8a)(b+8a)$. Следовательно, $(b-8a)(b+8a)$ делится на 67. Пусть $b-8a=67d$, тогда $\frac{n}{67}=a^2+d(b+8a)=a^2+d(67d+16a)=67d^2+a^2+16ad=(a+8d)^2+3d^2$. Таким образом, $m=d, k=a+8d$, где $d=\frac{b-2a}{7}$. Если $b+8a=67d$, то $\frac{n}{67}=a^2+d(b-8a)=a^2+d(67d-16a)=67d^2+a^2-16ad=(a-8d)^2+3d^2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За пробелы в доказательстве снимается от 1 до 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $S=(x^2-3x+1)(2y^2-6y+5)$, если известно, что $x^2+y^2=8,\ x+y=3$.

Ответ. 2.

Решение. Поскольку $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy,\ xy=\frac{9-8}{2}=\frac{1}{2}$. По теореме Виета числа x,y являются корнями квадратного уравнения $z^2-3z+\frac{1}{2}=0$. Поэтому $x^2-3x+1=\left(x^2-3x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ 2y^2-6y+5=2\left(y^2-3y+\frac{1}{2}\right)+4=4,\ \frac{1}{2}\cdot 4=2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle B=\angle C,\ \angle D=90°,\ AB=2CD$. Найдите угол между биссектрисой $\angle ACB$ и CD.

Ответ. 90°.

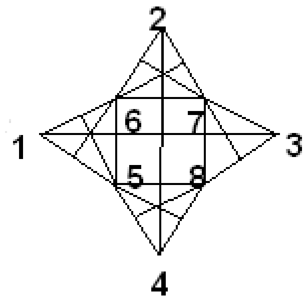
Решение. Пусть биссектриса $\angle ACB$ пересекает сторону AB в точке K, и пусть L – середина стороны AB. Продолжим стороны BC и AD до пересечения в точке M. $LBCD$ – равнобедренная трапеция (равные боковые стороны и углы при основании). Значит, LD параллельно BM и LD является средней линией треугольника ABM. $AD=DM$, то есть CD– медиана треугольника ACM, но CDи высота этого треугольника. Следовательно, треугольник ACM равнобедренный иCD является также биссектрисой. Получаем равенства: $\angle DCK = \angle DCA + \angle ACK = \frac{\angle \mathrm{ACM}}{2} + \frac{\angle \mathrm{ACB}}{2} = \frac{180^{\circ}}{2} = 90°$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

3. Можно ли посадить на ровной площадке 8 бельчат так, что на каждом серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему двух бельчат, сидят не менее двух бельчат?

Ответ.Да.

Решение. Построим квадрат, и на каждой стороне квадрата построим вовне равносторонний треугольник (см. рисунок). 8 вершин треугольников являются точками, в которые можно посадить бельчат. Далее запись$(a, b)- c, d$будет обозначать, что серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки a и b, проходит через точки c и d.
$(1,2)- 6,8$; $(1,3)- 2,4$; $(1,4)- 5,7$; $(1,5)- 6,2$. В последнем случае рассмотрим серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки 1 и 5. Он проходит через точку 6, и образует с отрезком, соединяющим точки 2 и 6, угол, равный $30° + 90° + 60° = 180°$. Отрезкиколлинеарны и имеют общую точку, то есть лежат на одной прямой. Аналогично $(1,6)- 5,4$. $(1,7)- 4,6$. В последнем случае рассмотрим серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки 1 и 7. Треугольник с вершинами 1, 6, 7 является равнобедренным, поэтому серединный перпендикуляр $(1,7)$проходит через точку 6. Докажем, что отрезок между точками 1 и 4 равен отрезку между точками 4 и 7. Треугольники с вершинами$1, 4, 5$ и $4, 7, 8$ равны, так как у каждого из них есть две стороны, равны 1, а угол между ними равен $360° - 60° - 90° - 60° = 150°$ для треугольника со сторонами $1, 4, 5$ и $60° + 90° = 150°$для треугольника со сторонами $4, 7, 8$. Значит, треугольник с вершинами 1,4, 7 является равнобедренным, поэтому серединный перпендикуляр $(1,7)$проходит через точку 4. Аналогично $(1,8)- 2,5$. Мы рассмотрели случаи, когда хотя бы одна из точек является вершиной треугольника. Остались очевидные случаи, когда обе точки – вершины квадрата. $(5,6)- 1,3$; $(5,7)- 6,8$; $(5,8)- 2,4$. Ввиду симметрии фигуры утверждение, что на каждом серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему две занумерованные точки, находятся две занумерованные точки, справедливо.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Записано 60 натуральных чисел, каждое из которых не больше 60. Сумма записанных чисел равна 120. Всегда ли можно разделить записанные числа на две группы с равной суммой?

Ответ.Да.

Решение.Если все числа равны между собой, то их можно разделить на 2 группы по 30 чисел с равной суммой. Пусть есть неравные числа, возьмём два из них и обозначим их b_1 и b_2 ($b_1 < b_2$). Остальные числа занумеруем в произвольном порядке. Составим последовательность $b_1, b_2, b_1 + b_2,\ b_1 + b_2 + b_3, \dots,\ b_1 + b_2 + b_3 + \dots +\ b_{60}$. В последовательности 61 число, и хотя бы у двух чисел должны совпадать остатки от деления на 60 (так как остатков всего 60: $0, 1, \dots 59$). Заметим, что последовательность частичных сумм возрастающая, и в ней нет равных членов. Значит, остатки от деления на 60 равны у двух чисел, отличающихся на $60: b_1 + \cdots + b_k = b_1 + \cdots + b_i + 60$. Тогда $b_{i+1} + \cdots + b_k = 60$, а остальные числа составляют вторую группу.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За пробелы в доказательстве снимается от 1 до 5 баллов. Есть рассуждения о возможных количествах единиц и двоек, чётных и нечётных чисел, и возможности их переноса, но нет строгого доказательства – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

5. Решите уравнение $(xy+1)^2 = x^3 + y$ в натуральных числах.

Ответ.$(x, y) = (2, 1)$.

Решение.Если $y \geq \sqrt{x}$, то $x^3 = (xy+1)^2 - y = x^2y^2 + (2x-1)y + 1 > x^2y^2 \geq x^3$, что невозможно. Значит, $y < \sqrt{x}$. В исходном уравнении все члены, кроме 1 слева и y справа, делятся на x. Значит, 1 и y имеют одинаковые остатки при делении наx,

$y \equiv 1\ (mod x)$, откуда $y = 1$ или $y \geq x + 1$. Однако неравенство $x + 1 < \sqrt{x}$ невозможно (так как неравенство $x^2 + x + 1 < 0$ не имеет решений). Следовательно, $y = 1$, и тогда $(x+1)^2 = x^3 + 1$, то есть $(x+1)^2 = (x+1)(x^2 - x + 1), (x+1)(x^2 - 2x) = 0$. Поскольку x натуральное число, $x = 2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть небольшие пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Обоснование только частичное – 10 баллов. Найден верный ответ, но не доказано, что нет других – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение верно начато – 2 балла. Только верный ответ без какого-либо решения – 1 балл.*