Математика. 10 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 20, \ \ a_2 = 24, \ \ a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 1$$

при всех $n \geq 1$. Найдите a_{2024}.

2. На конкурсе сладкоежек 7 участников были награждены 20 одинаковыми пирожными и 2 одинаковыми тортами. Каждому досталась хотя бы одна сладость. Сколькими способами могли распределиться награды?

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 5xyz$. Найдите наименьшее значение выражения $x + y + z$.

4. Дан равносторонний треугольник ABC, на сторонах AB и BC которого выбраны точки P и Q так, что $AP:PB = BQ:QC = 2:1$, K – точка пересечения отрезков AQ и CP. Найдите градусную меру угла AKB.

5. Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $4f(x + y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.

Математика. 10 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 20, \quad a_2 = 25, \quad a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 1$$

при всех $n \geq 1$. Найдите a_{2025}.

2. На конкурсе сладкоежек 8 участников были награждены 20 одинаковыми пирожными и 2 одинаковыми тортами. Каждому досталась хотя бы одна сладость. Сколькими способами могли распределиться награды?

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 6xyz$. Найдите наименьшее значение выражения $(x+y)(y+z)(x+z)$.

4. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, на гипотенузе AB которого отмечены точки K и L, что $AK{:}KL{:}LB = 1{:}2{:}\sqrt{3}$. Найдите градусную меру угла KCL.

5. Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $3f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.

Математика. 10 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 20, \quad a_2 = 26, \quad a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 1$$

при всех $n \geq 1$. Найдите a_{2024}.

2. На конкурсе сладкоежек 9 участников были награждены 20 одинаковыми пирожными и 2 одинаковыми тортами. Каждому досталась хотя бы одна сладость. Сколькими способами могли распределиться награды?

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = 27xyz$. Найдите наименьшее значение выражения $(x + y)(y + z)(x + z)$.

4. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 2\angle B$. Внутри этого треугольника выбрана точка P так, что $PA = PB$, $PC = AC$.

Найдите градусную меру угла CBP.

5. Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $5f(x + y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 10$.

Математика. 10 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ такова, что:

$$a_1 = a_{2024} \text{ и } a_n + a_{n+1} - 1 = a_{n+1}^2 \text{ при всех целых } n \text{ от } 1 \text{ до } 2023.$$

Найдите a_{2000}.

2. Найдите количество строк из 6 натуральных чисел, произведение которых равно 6!

3. Для положительных чисел x, y, z и t найдите минимальное значение выражения

$$N = \left(x + \frac{1}{y}\right)^3 + \left(y + \frac{1}{z}\right)^3 + \left(z + \frac{1}{t}\right)^3 + \left(t + \frac{1}{x}\right)^3.$$

4. Пусть BC – наибольшая сторона в треугольнике ABC, в котором проведены высоты AA_1 и BB_1. Биссектриса $\angle C$ пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке L, высоту AA_1 в точке P, BB_1 – в точке Q. Найдите градусную меру угла ACB, если известно, что $AP = LQ$.

5. Существует ли функция f, заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, и действительное число α, такие, что $f(\alpha) = -2$ и $f(f(x)) = xf(x) + 2x$ для любого действительного x?