

Математика. 9 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Для $x = \sqrt{7} + 1$ найдите значение выражения $x^5 - 5x^4 + 36x$.
2. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC , $\angle ABD = \angle CBD$, $AB = BD = 5$, $BC = 9$. Найдите CD .
3. На ровной площадке сидят 8 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 6 бельчат. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).
4. На плоскости поставили 70 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 500 неравносторонних треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета.
Замечание. Равносторонний треугольник является равносторонним.
5. Целое число n делится на 7 и может быть представлено в виде $n = 3a^2 + b^2$, где a, b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа m и k , что $\frac{n}{7} = 3m^2 + k^2$.

Математика. 9 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Для $x = \sqrt{11} - 1$ найдите значение выражения $x^5 + 7x^4 + 100x$.
2. Внутри равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB < CD = 10$ см, $BC = AD$) выбрана точка E , отстоящая от вершин A, B, C, D соответственно на 3, 4, 6, 5 см. Найдите длину AB .
3. На ровной площадке сидят 6 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 4 бельчонка. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).
4. На листе бумаги поставили 75 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 620 неравнобедренных треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета.
Замечание. Равносторонний треугольник является равнобедренным.
5. Целое число n делится на 19 и может быть представлено в виде $n = 3a^2 + b^2$, где a, b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа m и k , что $\frac{n}{19} = 3m^2 + k^2$.

Математика. 9 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Для $x = \sqrt{6} + 1$ найдите значение выражения $2x^5 - 9x^4 + 50x$.
2. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC , $\angle ABD = \angle CBD$, $AB = 5$, $BC = 16$. Докажите, что $BD < 9$.
3. На ровной площадке сидят 10 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 8 бельчат. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).
4. На листе бумаги поставили 82 точки так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 900 неравносторонних треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета.
Замечание. Равносторонний треугольник является равносторонним.
5. Целое число n делится на 67 и может быть представлено в виде $n = 3a^2 + b^2$, где a, b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа m и k , что $\frac{n}{67} = 3m^2 + k^2$.

Математика. 9 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.

Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Найдите значение выражения $S = (x^2 - 3x + 1)(2y^2 - 6y + 5)$, если известно, что $x^2 + y^2 = 8$, $x + y = 3$.
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle B = \angle C$, $\angle D = 90^\circ$, $AB = 2CD$. Найдите угол между биссектрисой $\angle ACB$ и CD .
3. Можно ли посадить на ровной площадке 8 бельчат так, что на каждом серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему двух бельчат, сидят не менее двух бельчат?
4. Записано 60 натуральных чисел, каждое из которых не больше 60. Сумма записанных чисел равна 120. Всегда ли можно разделить записанные числа на две группы с равной суммой?
5. Решите уравнение $(xy + 1)^2 = x^3 + y$ в натуральных числах.