

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Три бельчонка Петя, Захар и Дима играли в настольный футбол. В каждой партии играли двое, проигравший уступал своё место третьему игроку. Петя сыграл 6 раз, Захар 5 раз, Дима 3 раза. Кто проиграл во второй партии?

Ответ. Дима.

Решение. Сложим количества сыгранных партий: $5 + 3 + 6 = 14$. В каждой партии участвовало двое, значит, мы посчитали каждую партию 2 раза, и всего партий было 7. Любой игрок не может пропустить больше одной партии подряд, потому что иначе двое играли бы подряд два раза. Значит, самое малое, игрок может играть через раз. Дима играл 3 раза. Если он играл в первой партии, то он должен был играть ещё в третьей, пятой и седьмой, получается 4 раза – противоречие. Если он начал играть со второй партии, то играл ещё в четвёртой и шестой. Все свои партии он проиграл, поскольку выбывал, иначе у него были бы игры подряд, и получилось бы больше 3 игр. Поэтому Дима проиграл и вторую игру. Покажем, как могла складываться игра. Обозначим имена начальными буквами. Пример.

№ партии	1	2	3	4	5	6	7
Играли	З, П	П, Д	П, З	З, Д	З, П	П, Д	П, З
Выиграл	П	П	З	З	П	П	З

Во второй строке таблицы записано, кто с кем играл. Буква П встречается там 6 раз, буква З – 5 раз, буква Д – 3 раза.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При этом обязательно должно быть показано, кто с кем играл, для проверки, что выполнение условий возможно. Если такой проверки нет, но получен верный ответ – 16 баллов. Маленькие пробелы в обосновании –

18 баллов. Задача решена на основании нескольких (но не всех возможных) примеров – 15 баллов; на основании одного примера – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Федя записал дробь $\frac{4}{11}$, Лена записала дробь $\frac{7}{19}$, а Даня записал дробь $\frac{a}{b}$, которая находится в интервале $(\frac{4}{11}; \frac{7}{19})$. Каково наименьшее возможное значение b ?

Ответ. 30.

Решение. Запишем условие в виде $\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}$. Отсюда $11a - 4b > 0$, $7b - 19a > 0$. Но это целые числа, поэтому $11a - 4b \geq 1$, $7b - 19a \geq 1$. Найдём разность $\frac{7}{19} - \frac{4}{11} = \frac{1}{209}$. Но $\frac{7}{19} - \frac{4}{11} = (\frac{7}{19} - \frac{a}{b}) + (\frac{a}{b} - \frac{4}{11}) = \frac{7b-19a}{19b} + (\frac{11a-4b}{11b}) \geq \frac{1}{19b} + \frac{1}{11b} = \frac{30}{209b}$. Таким образом, $\frac{1}{209} \geq \frac{30}{209b}$, откуда $b \geq 30$. Покажем, что для $b = 30$ существует подходящее a . При $a = 11$: $\frac{4}{11} < \frac{11}{30} < \frac{7}{19}$.

Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Найдена дробь $\frac{11}{30}$, но не доказана минимальность знаменателя – 15 баллов. Найдён неоптимальный пример дроби, находящейся в данном интервале – 5 баллов. Получена оценка $b \geq 30$ – 13 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.

3. На окружности случайным образом поставлены 8 точек. Каждая пара этих точек соединена отрезком. Из всех этих отрезков равновероятно выбирают 4 отрезка, и красят их в красный цвет. Какова вероятность, что найдётся красный треугольник, вершины которого лежат на окружности?

Ответ. $\frac{8}{117}$.

Решение 1. Отрезков всего $C_8^2 = 28$. Найдём вероятность того, что первые 3 красных отрезка образуют треугольник. По теореме умножения $P(A) = \frac{28}{28} \cdot \frac{12}{27} \cdot \frac{1}{26}$ (так как к первому отрезку примыкают 12 отрезков, а третий отрезок определяется однозначно). Но в качестве трёх первых отрезков могли быть выбраны из четырёх отрезков четыре разные тройки, для каждой вероятность такая же, поэтому по теореме сложения $P = 4 \cdot \frac{28}{28} \cdot \frac{12}{27} \cdot \frac{1}{26} = \frac{8}{117} (\approx 0,068376)$.

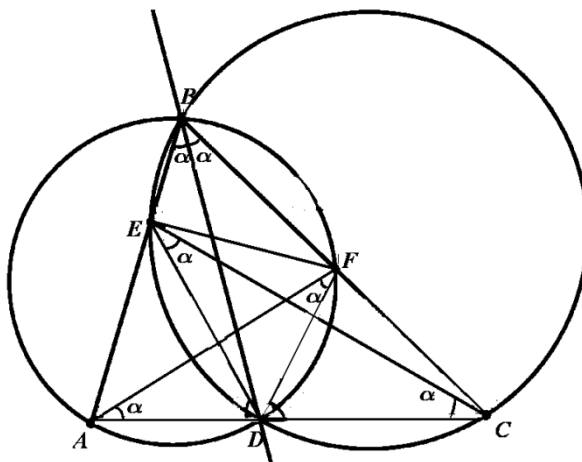
Решение 2. Отрезков всего $C_8^2 = 28$. Число способов выбора 4 отрезков из 28 равно $C_{28}^4 = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{4!}$. Число благоприятных наборов трёх красных отрезков равно $\frac{28 \cdot 12 \cdot 1}{3!}$, четвёртым отрезком может быть выбран любой из 25 оставшихся. Всего благоприятных наборов четырёх красных отрезков $\frac{28 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 25}{3!}$. Вероятность равна $\frac{28 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 25 \cdot 24}{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 6} = \frac{8}{117}$.

Решение 3. Отрезков всего $C_8^2 = 28$. Число способов выбора 4 отрезков из 28 равно $C_{28}^4 = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{4!}$. Число возможных треугольников равно $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$. Заметим, что 4 отрезка могут образовать только 1 треугольник. Значит, число благоприятных способов покрасить 4 отрезка в красный цвет, равно $56 \cdot 25$. Вероятность равна $\frac{56 \cdot 25 \cdot 24}{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 13} = \frac{8}{117}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка D . Около треугольников BDC и ABD описаны окружности соответственно w_1 и w_2 . Окружность w_1 пересекает сторону AB в точке E , а окружность w_2 пересекает сторону BC в точке F . Известно, что $\angle ABD = \angle DBC$. Докажите, что $AE = CF$.

Решение. Пусть $\angle ABD = \angle DBC = \alpha$.



Тогда $\angle AFD = \alpha$, так как этот угол опирается на ту же дугу AD окружности w_2 , что и $\angle ABD$. $\angle ECD = \angle EBD$, как опирающиеся на одну дугу ED окружности w_1 . Но $\angle ABD = \angle EBD$, поэтому $\angle ECD = \alpha$. $\angle CED = \angle CBD = \alpha$, как опирающиеся на одну дугу CD окружности w_1 . В треугольнике AFD углы при основании AF равны α, α . $\angle FDC = 2\alpha$, как внешний угол треугольника AFD . В треугольнике EDC углы при основании EC равны α, α . $\angle EDA = 2\alpha$, как внешний угол треугольника EDC . Таким образом, $\angle FDC = \angle EDA$. Поскольку треугольники EDC и AFD равнобедренные, $ED = DC$, $AD = DF$. Следовательно, $\triangle EDA = \triangle DFC$. Отсюда равны и третьи стороны треугольников: $AE = CF$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Решите в целых числах уравнение $x^4 - xy + y^3 = 0$.

Ответ. $(x, y) = (0, 0)$.

Решение. Если $x = 0$, то $y = 0$ и наоборот. Пусть x и y имеют наибольший общий делитель d : $x = d \cdot x_1$, $y = d \cdot y_1$. Тогда $d^4 x_1^4 - d^2 x_1 y_1 + d^3 y_1^3 = 0$, или $d^2 x_1^4 - x_1 y_1 + d y_1^3 = 0$. Отсюда $d y_1^3$ делится на x_1 . Поскольку x_1 и y_1 взаимно просты, d должно делиться на x_1 . Пусть $d = u x_1$. Подставим в полученное уравнение: $(u x_1)^2 x_1^4 - x_1 y_1 + (u x_1) y_1^3 = 0$, или $u^2 x_1^5 - y_1 + u y_1^3 = 0$. Отсюда y_1 делится на u^2 . Пусть $y_1 = v u^2$. Подставляя, получаем $u^2 x_1^5 - v u^2 + u^7 v^3 = 0$, или $x_1^5 - v + u^5 v^3 = 0$. Из этого равенства следует, что x_1^5 делится на v . Но x_1 и v взаимно просты, поэтому $v \in \{-1, 1\}$. Тогда последнее равенство превращается в $x_1^5 \mp 1 \pm u^5 = 0$. Очевидно, двух ненулевых пятых степеней, отличающихся на единицу, не существует.

Комментарий. Найден только ответ $(0, 0)$ – 1 балл, доказано, что других ответов нет – 19 баллов, баллы суммируются. Решение начато, есть некоторые разумные рассуждения, но доказательства нет – 2 балла (из 19). В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 2

1. Бельчата Миша, Лена и Света играли в настольный теннис. В каждой партии играли двое, проигравший уступал своё место третьему игроку. Миша сыграл 6 раз, Лена 4 раза, Света 8 раз. Кто проиграл в шестой партии?

Ответ. Лена.

Решение. Сложим количества сыгранных партий: $6 + 4 + 8 = 18$. В каждой партии участвовало двое, значит, мы посчитали каждую партию 2 раза, и всего партий было 9. Любой игрок не может пропустить больше одной партии подряд, так как иначе двое играли бы подряд два раза. Значит, самое малое, игрок может играть через раз. Лена играла 4 раза. Если она играла в первой партии, то она должна была играть в третьей, пятой, седьмой, девятой, получается 5 раз – противоречие. Если она начала играть со второй партии, то играла ещё в четвёртой, шестой, восьмой. Все свои партии она проиграла, поскольку выбывала, иначе у неё были игры подряд, и получилось бы больше 4 игр. Поэтому Лена проиграла и шестую игру. Покажем, как могла складываться игра. Обозначим имена начальными буквами. Пример.

№ партии	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Играли	М, С	С, Л	С, М	М, Л	М, С	С, Л	С, М	С, Л	М, С
Выиграл	С	С	М	М	С	С	С	М	С

Во второй строке таблицы записано, кто играл. Буква М встречается там 6 раз, буква Л – 4 раза, буква С – 8 раз.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При этом обязательно должно быть показано, кто с кем играл, для проверки, что выполнение условий возможно. Если такой проверки нет, но получен верный ответ – 16 баллов. Маленькие пробелы в обосновании – 18 баллов. Задача решена на основании нескольких (но не всех возможных) примеров – 15 баллов. на основании одного примера – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Федя записал дробь $\frac{7}{17}$, Катя записала дробь $\frac{5}{12}$, а Лиза записала дробь $\frac{a}{b}$, которая находится в интервале $(\frac{7}{17}; \frac{5}{12})$. Каково наименьшее возможное значение b ?

Ответ. 29.

Решение. Запишем условие в виде $\frac{7}{17} < \frac{a}{b} < \frac{5}{12}$. Отсюда $17a - 7b > 0$, $5b - 12a > 0$. Но это целые числа, поэтому $17a - 7b \geq 1$, $5b - 12a \geq 1$. Найдём разность $\frac{5}{12} - \frac{7}{17} = \frac{1}{204}$. Но $\frac{5}{12} - \frac{7}{17} = (\frac{5}{12} - \frac{a}{b}) + (\frac{a}{b} - \frac{7}{17}) = \frac{5b-12a}{12b} + \frac{17a-7b}{17b} \geq \frac{1}{12b} + \frac{1}{17b} = \frac{29}{204b}$. Таким образом, $\frac{1}{204} \geq \frac{29}{204b}$, откуда $b \geq 29$. Покажем, что для $b = 29$ существует подходящее a . При $a = 12$: $\frac{7}{17} < \frac{12}{29} < \frac{5}{12}$.

Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Найдена дробь $\frac{12}{29}$, но не доказана минимальность знаменателя – 15 баллов. Найден неоптимальный пример дроби, находящейся в данном интервале – 5 баллов. Получена оценка $b \geq 29$ – 13 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.

3. На окружности случайным образом поставлены 9 точек. Каждая пара этих точек соединена отрезком. Из всех полученных отрезков (оба конца которых лежат на

окружности) равновероятно выбирают 4 отрезка, и красят их в красный цвет. Какова вероятность, что найдётся красный треугольник, вершины которого лежат на окружности?

Ответ. $\frac{4}{85}$.

Решение 1. Отрезков всего $C_9^2 = 36$. Найдём вероятность того, что первые 3 красных отрезка образуют треугольник. По теореме умножения $P(A) = \frac{36}{36} \cdot \frac{14}{35} \cdot \frac{1}{34}$ (так как к первому отрезку примыкают 14 отрезков, а третий отрезок определяется однозначно). Но в качестве трёх первых отрезков могли быть выбраны из четырёх отрезков четыре разные тройки, для каждой вероятность такая же, поэтому по теореме сложения $P = 4 \cdot \frac{36}{36} \cdot \frac{14}{35} \cdot \frac{1}{34} = \frac{4}{85}$.

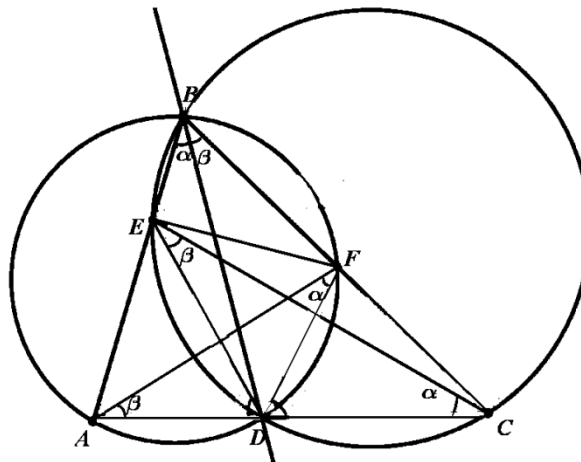
Решение 2. Отрезков всего $C_9^2 = 36$. Число способов выбора 4 отрезков из 36 равно $C_{36}^4 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{4!}$. Число благоприятных наборов трёх красных отрезков равно $\frac{36 \cdot 14 \cdot 1}{3!}$, четвёртым отрезком может быть выбран любой из 33 оставшихся. Всего благоприятных наборов четырёх красных отрезков $\frac{36 \cdot 14 \cdot 1 \cdot 33}{3!}$. Вероятность равна $\frac{36 \cdot 14 \cdot 1 \cdot 33 \cdot 24}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 6} = \frac{14 \cdot 4}{35 \cdot 34} = \frac{4}{85} \approx 0,0470588$.

Решение 3. Отрезков всего $C_9^2 = 36$. Число способов выбора 4 отрезков из 36 равно $C_{36}^4 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{4!} = 58905$. Число возможных треугольников равно $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$. Заметим, что 4 отрезка могут образовать только 1 треугольник. Значит, число благоприятных способов покрасить 4 отрезка в красный цвет, равно $84 \cdot 33$. Вероятность равна $\frac{C_9^3 \cdot 33}{C_{36}^4} = \frac{84 \cdot 33 \cdot 24}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{4}{85}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка D . Около треугольников BDC и ABD описаны окружности, соответственно w_1 и w_2 . Окружность w_1 пересекает сторону AB в точке E , а окружность w_2 пересекает сторону BC в точке F . Известно, что $AE = CF$. Докажите, что $\angle ABD = \angle DBC$.

Решение. Пусть $\angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$.



Тогда $\angle AFD = \angle ABD = \alpha$, так как этот угол опирается на ту же дугу AD окружности w_2 , что и $\angle ABD$. $\angle ABD = \angle EBD = \angle ECD = \alpha$, как опирающиеся на одну дугу ED окружности w_1 . Аналогично, $\angle FAD = \angle FBD = \angle DBC = \beta$, как опирающиеся на одну дугу FD окружности w_2 . Но в окружности w_1 $\angle DBC$ опирается на дугу CD , как и $\angle DEC$, поэтому $\angle DEC = \angle DBC = \beta$. В треугольнике DEC известны два угла: α, β . Поэтому внешний угол

этого треугольника $\angle EDA = \alpha + \beta$. Аналогично $\angle FDC = \alpha + \beta$. Четырёхугольник $ABFD$ – вписанный, поэтому $\angle BAD + \angle BFD = 180^\circ$ и $\angle EAD = \angle BAD = 180^\circ - \angle BFD = \angle CFD$. В треугольниках ADE и CDF есть две пары равных углов: $\angle EDA = \angle FDC$, $\angle EAD = \angle CFD$. Значит, и третьи углы равны. Поскольку $AE = CF$, $\triangle EDA = \triangle CDF$. Следовательно, $ED = DC$, треугольник EDC равнобедренный, $\angle DEC = \angle ECD$. Но $\angle DEC = \beta$, $\angle ECD = \alpha$. Отсюда $\alpha = \beta$, и $\angle ABD = \angle DBC$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Докажите, что уравнение $x^4 + xy + y^3 = 0$ не имеет решений в целых числах, кроме $(x, y) = (0, 0)$.

Решение. Если $x = 0$, то $y = 0$ и наоборот. Пусть x и y имеют наибольший общий делитель d : $x = d \cdot x_1$, $y = d \cdot y_1$. Тогда $d^4 x_1^4 + d^2 x_1 y_1 + d^3 y_1^3 = 0$, или $d^2 x_1^4 + x_1 y_1 + d y_1^3 = 0$. Отсюда $d y_1^3$ делится на x_1 . Поскольку x_1 и y_1 взаимно просты, d должно делиться на x_1 . Пусть $d = u x_1$. Подставим в полученное уравнение: $(u x_1)^2 x_1^4 + x_1 y_1 + (u x_1) y_1^3 = 0$, или $u^2 x_1^5 + y_1 + u y_1^3 = 0$. Отсюда y_1 делится на u^2 . Пусть $y_1 = v u^2$. Подставляя, получаем $u^2 x_1^5 + v u^2 + u^7 v^3 = 0$, или $x_1^5 + v + u^5 v^3 = 0$. Из этого равенства следует, что x_1^5 делится на v . Но x_1 и v взаимно просты, поэтому $v \in \{-1, 1\}$. Тогда последнее равенство превращается в $x_1^5 \pm 1 \pm u^5 = 0$. Очевидно, двух ненулевых пятых степеней, отличающихся на единицу, не существует.

Комментарий. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторые разумные рассуждения, но доказательства нет – 2-5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 3

1. Бельчата Арина, Коля и Тимур играли в настольный хоккей. В каждой партии играли двое, проигравший уступал своё место третьему игроку. Арина сыграла 5 раз, Коля 3, Тимур 6. Кто проиграл в четвёртой партии?

Ответ. Коля.

Решение. Сложим количества сыгранных партий: $5 + 3 + 6 = 14$. В каждой партии участвовало двое, значит, мы посчитали каждую партию 2 раза, и всего партий было 7. Любой игрок не может пропустить больше одной партии подряд, потому что иначе двое играли бы подряд два раза. Значит, самое малое, игрок может играть через раз. Коля играл 3 раза. Если он играл в первой партии, то он должен был играть в третьей, пятой и седьмой, получается 4 раза – противоречие. Если он начал играть со второй партии, то играл ещё в четвёртой и шестой. Все свои партии он проиграл, поскольку выбывал, иначе у него были игры подряд, и получилось бы больше 3 игр. Поэтому Коля проиграл и четвёртую игру. Покажем, как могла складываться игра. Обозначим имена начальными буквами. Пример.

№ партии	1	2	3	4	5	6	7
Играли	А, Т	Т, К	Т, А	А, К	А, Т	Т, К	Т, А
Выиграл	Т	Т	А	А	Т	Т	А

Во второй строке таблицы записано, кто играл. Буква Т встречается там 6 раз, буква А – 5 раз, буква К – 3 раза.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При этом обязательно должно быть показано, кто с кем играл, для проверки, что выполнение условий возможно. Если такой проверки нет, но получен верный ответ – 16 баллов. Маленькие пробелы в обосновании – 18 баллов. Задача решена на основании примера, но не показано, что других ответов быть не может – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Федя записал дробь $\frac{9}{16}$, Лена записала дробь $\frac{4}{7}$, а Миша записал дробь $\frac{a}{b}$, которая находится в интервале $(\frac{9}{16}; \frac{4}{7})$. Каково наименьшее возможное значение b ?

Ответ. 23.

Решение. Запишем условие в виде $\frac{9}{16} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7}$. Отсюда $16a - 9b > 0$, $4b - 7a > 0$. Но это целые числа, поэтому $16a - 9b \geq 1$, $4b - 7a \geq 1$. Найдём разность $\frac{4}{7} - \frac{9}{16} = \frac{1}{112}$. Но $\frac{4}{7} - \frac{9}{16} = (\frac{4}{7} - \frac{a}{b}) + (\frac{a}{b} - \frac{9}{16}) = \frac{4b-7a}{7b} + \frac{16a-9b}{16b} \geq \frac{1}{7b} + \frac{1}{16b} = \frac{23}{112b}$. Таким образом, $\frac{1}{112} \geq \frac{23}{112b}$, откуда $b \geq 23$. Покажем, что для $b = 23$ существует подходящее a . При $a = 13$: $\frac{9}{16} < \frac{13}{23} < \frac{4}{7}$.

Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Найдена дробь $\frac{13}{23}$, но не доказана минимальность знаменателя – 15 баллов. Найден неоптимальный пример дроби, находящейся в данном интервале – 5 баллов. Получена оценка $b \geq 23$ – 13 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.

3. На окружности случайным образом поставлены 10 точек. Каждая пара этих точек соединена отрезком. Из всех этих отрезков равновероятно выбирают 4 отрезка, и красят их в красный цвет. Какова вероятность, что найдётся красный треугольник, вершины которого лежат на окружности?

Ответ. $\frac{16}{473}$.

Решение 1. Отрезков всего $C_{10}^2 = 45$. Найдём вероятность того, что первые 3 красных отрезка образуют треугольник. По теореме умножения $P(A) = \frac{45}{45} \cdot \frac{16}{44} \cdot \frac{1}{43}$ (так как к первому отрезку примыкают 16 отрезков, а третий отрезок определяется однозначно). Но в качестве трёх первых отрезков могли быть выбраны из четырёх отрезков четыре разные тройки, для каждой вероятность такая же, поэтому по теореме сложения $P = 4 \cdot \frac{45}{45} \cdot \frac{16}{44} \cdot \frac{1}{43} = \frac{16}{473}$.

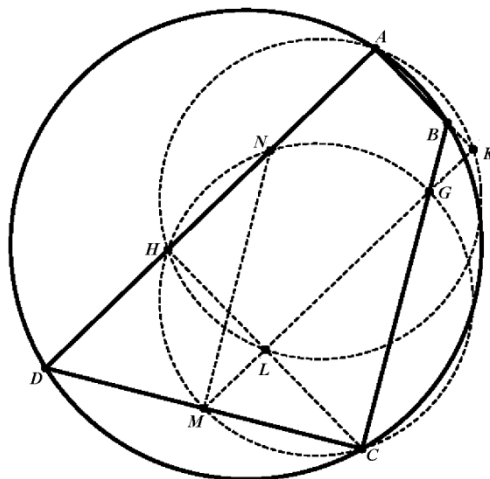
Решение 2. Отрезков всего $C_{10}^2 = 45$. Число способов выбора 4 отрезков из 45 равно $C_{45}^4 = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{4!}$. Число благоприятных наборов трёх красных отрезков равно $\frac{45 \cdot 16 \cdot 1}{3!}$, четвёртым отрезком может быть выбран любой из 42 оставшихся. Всего благоприятных наборов четырёх красных отрезков $\frac{45 \cdot 16 \cdot 1 \cdot 42}{3!}$. Вероятность равна $\frac{45 \cdot 16 \cdot 1 \cdot 42 \cdot 24}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 6} = \frac{16}{473}$.

Решение 3. Отрезков всего $C_{10}^2 = 45$. Число способов выбора 4 отрезков из 45 равно $C_{45}^4 = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{4!}$. Число возможных треугольников равно $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$. Заметим, что 4 отрезка могут образовать только 1 треугольник. Значит, число благоприятных способов покрасить 4 отрезка в красный цвет, равно $120 \cdot 42$. Вероятность равна $\frac{120 \cdot 42 \cdot 24}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42} = \frac{120 \cdot 24}{45 \cdot 44 \cdot 43} = \frac{8 \cdot 2}{11 \cdot 43} = \frac{16}{473} (\approx 0,0338266)$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$. Точка M – середина стороны DC . Через точку M проведена прямая, перпендикулярная DC , и пересекающая сторону AD в точке N . Описанная окружность треугольника CMN вторично пересекает сторону AD в точке H , а прямую CB в точке G , $G \neq B$. Прямая MG пересекает прямую AB в точке K , а прямую CH в точке L . Докажите, что четырехугольник $KLHA$ является вписанным.

Решение. Докажем, что $\angle HAK + \angle HLK = 180^\circ$.



$\angle HLK = \angle MLC$. $\angle MLC = \angle MHL + \angle HML$ (как внешний угол). Обозначим $\angle MHL = \alpha$, $\angle HML = \beta$. Тогда $\angle MLC = \alpha + \beta$.

Четырехугольник $NHMC$ вписанный, поэтому $\angle NHC = \angle NMC$, но по условию $\angle NMC = 90^\circ$. $\angle MHL = \angle MHC = \angle MNC = \alpha$ (как вписанные, опирающиеся на дугу MC). Но треугольник DNC равнобедренный, так как MN – медиана и высота. Следовательно, $\angle HNM = \angle DNM = \angle CNM = \alpha$, и $\angle HCM = \alpha$ (как вписанные, опирающиеся на дугу HM). $\angle HMG = \angle HCG = \beta$ (как вписанные, опирающиеся на дугу HG).

В четырехугольнике $ABCD$ имеем: $\angle DCB = \angle HCM + \angle HCG = \alpha + \beta$. Но $ABCD$ – вписанный четырехугольник, поэтому $\alpha + \beta + \angle DAB = 180^\circ$. Поскольку $\angle HLK = \alpha + \beta$, $\angle DAB = \angle DAK$, получаем равенство $\angle HLK + \angle DAK = 180^\circ$, что означает вписанность четырехугольника $KLHA$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Решите в целых числах уравнение $x^4 - xy - y^3 = 0$.

Ответ. $(x, y) = (0, 0)$.

Решение. Если $x = 0$, то $y = 0$ и наоборот. Пусть x и y имеют наибольший общий делитель d : $x = d \cdot x_1$, $y = d \cdot y_1$. Тогда $d^4 x_1^4 - d^2 x_1 y_1 - d^3 y_1^3 = 0$, или $d^2 x_1^4 - x_1 y_1 - d y_1^3 = 0$. Отсюда $d y_1^3$ делится на x_1 . Поскольку x_1 и y_1 взаимно просты, d должно делиться на x_1 . Пусть $d = u x_1$. Подставим в полученное уравнение: $(u x_1)^2 x_1^4 - x_1 y_1 - (u x_1) y_1^3 = 0$, или $u^2 x_1^5 - y_1 - u y_1^3 = 0$. Отсюда y_1 делится на u^2 . Пусть $y_1 = v u^2$. Подставляя, получаем $u^2 x_1^5 - v u^2 - u^7 v^3 = 0$, или $x_1^5 - v - u^5 v^3 = 0$. Из этого равенства следует, что x_1^5 делится на v . Но x_1 и v взаимно просты, поэтому $v \in \{-1, 1\}$. Тогда последнее равенство

превращается в $x_1^5 \pm 1 \pm u^5 = 0$. Очевидно, двух ненулевых пятых степеней, отличающихся на единицу, не существует.

Комментарий. Найден только ответ $(0,0)$ – 1 балл, доказано, что других ответов нет – 19 баллов, баллы суммируются. Решение начато, есть некоторые разумные рассуждения, но доказательства нет – 2 балла (из 19). В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 4

1. Маша и Петя сыграли по несколько партий в шашки, и между собой, и с другими ребятами. Петя играл 6 раз, в одной игре была ничья, в двух выигрыш, в трех проигрыш. Маша сыграла 5 раз, у неё было три ничьих и два раза она выиграла. Какое наименьшее число игр с другими ребятами могли сыграть Маша и Петя?

Ответ. 5.

Решение. Наименьшее число игр с другими ребятами будет, когда число игр между Машей и Петей наибольшее. Всего в условии говорится про 11 игр: $5 + 6 = 11$. Но игры, в которых Маша и Петя играли между собой, посчитаны два раза, и как игры Маши, и как игры Пети. Если Маша и Петя играли между собой, то Маша выиграла, а Петя проиграл, или они сделали ничью. Маша выиграла 2 партии, а Петя проиграл 3. Значит, они могли 2 партии сыграть между собой, а одну игру Петя проиграл кому-то еще. Кроме того, у каждого из них была ничья, эта игра тоже могла быть между ними. Итак, самое большое число игр между Машей и Петей равно 3. Тогда общее число игр, сыгранных Машей и Петей, равно $11 - 3 = 8$. Из этих 8 игр 3 игры между Машей и Петей, а остальные $8 - 3 = 5$ игр – с другими ребятами.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При верном решении записан неверный ответ – 19 баллов. Маленькие пробелы в обосновании – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Четыре бельчонка изучали арифметику. Каждому из них назвали одинаковую пару ненулевых чисел (a, b) . Первый бельчонок поделил a на b , второй перемножил свою пару чисел, третий вычел b из a , четвёртый сложил свои числа. Оказалось, что полученные ими результаты образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке). Найдите все возможные пары чисел (a, b) .

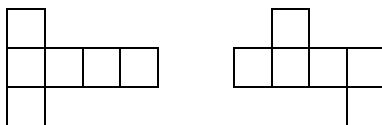
Ответ. $(a, b) = \left(-\frac{9}{8}, -\frac{3}{5}\right)$.

Решение. Запишем полученные числа: $\frac{a}{b}, ab, a - b, a + b$. Разность прогрессии равна $a + b - (a - b) = 2b$. Тогда второй член равен $ab = a - b - 2b = a - 3b$, первый член равен $\frac{a}{b} = a - b - 4b = a - 5b$. Заметим, что $b \neq 1$, так как при $b = 1$ среди членов прогрессии были бы одинаковые ($\frac{a}{b} = ab$). Выразим из первого соотношения a : $a = \frac{3b}{1-b}$, и подставим во второе: $\frac{3b}{b(1-b)} = \frac{3b}{1-b} - 5b$. Получаем квадратное уравнение $5b^2 - 2b - 3 = 0$. Находим его корни $b_1 = 1, b_2 = -\frac{3}{5}$. Отбрасываем первый корень, а второй подставляем в выражение для a : $a = \frac{3b}{1-b} = -\frac{9}{8}$. Члены последовательности: $\frac{15}{8}, \frac{27}{40}, -\frac{21}{40}, -\frac{69}{40}$.

Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Задача верно решена, но в неверных условиях ($b - a$ вместо $a - b$) – 15 баллов. Допущена одна арифметическая ошибка – 10 баллов, но если в самом конце верного решения – 15 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 10 баллов. При подборе проверяется единственная пара значений, дающая верный ответ – 5 баллов.

Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.

3. У двух школьников есть по развёртке куба. Обе развёртки состоят из 6 единичных квадратов (см. рисунок).



Каждый школьник равновероятно красит каждый единичный квадрат своей развёртки в зелёный или красный цвет. Потом они сворачивают развёртки в кубы покрашенными гранями наружу. Какова вероятность, что у них получатся кубы с одинаковой раскраской? Раскраски, совпадающие при повороте кубов, считаются одинаковыми.

Ответ. $\frac{147}{1024}$.

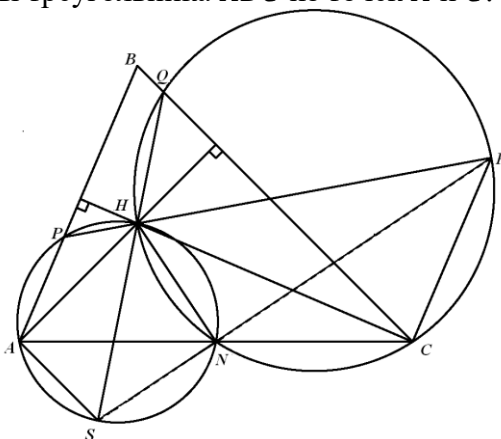
Решение. Пусть все грани у обоих кубов красные, это возможно в $1 \cdot 1 = 1$ случае. Пусть одна грань красная, таких возможностей 6^2 . Пусть в красный цвет покрашены две грани с общим ребром, таких возможностей 12^2 (так как каждая грань соприкасается с 4 другими, $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$). Пусть в красный покрашены две противоположные грани, это даёт ещё 3^2 возможностей. Если три грани красные, и они сходятся в вершине, таких случаев может быть 8 на каждом кубе, всего 8^2 . Три грани могут также образовывать цепочку, средняя грань в ней выбирается 6 способами, крайние – 2 способами, всего 12 способов. Если красных граней 4, 5, или 6, то зелёных 2, 1, или 0, поэтому соответствующее число способов удваивается. Всего вариантов раскраски одного куба $2^6 = 64$, двух – 64^2 . Окончательно получаем

$$P = 2 \cdot \frac{1^2 + 6^2 + 12^2 + 3^2}{64^2} + \frac{8^2 + 12^2}{64^2} = \frac{147}{1024}.$$

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 19 баллов. Решение в основном верное, но не всё учтено – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. В остроугольном треугольнике ABC точка пересечения высот обозначена H . Точка N – середина AC . Через точки A, H, N проведена окружность w_1 , а через точки C, H, N проведена окружность w_2 . Прямая AB пересекает окружность w_1 в точке P , прямая BC пересекает окружность w_2 в точке Q . Прямые PH и QH пересекают окружности w_2 и w_1 в точках R и S соответственно. Докажите 1) точки R, S, N лежат на одной прямой; 2) треугольники ARS и CRS имеют одинаковую площадь.

Решение. Проведём высоты треугольника ABC из точек A и C .



1) Найдём $\angle HNS$. $\angle HNS = 180^\circ - \angle HSN - \angle SHN$. $\angle HSN = \angle HAN$, как опирающиеся на одну дугу HN окружности w_1 . $\angle SHN = 180^\circ - \angle QHN$, как смежные углы. Итак, $\angle HNS = 180^\circ - \angle HAN - (180^\circ - \angle QHN)$. $\angle HAN$ можно записать как $\angle CAH$, а $180^\circ - \angle QHN = \angle QCN$, поскольку по условию H, Q, C, N лежат на окружности w_2 . Получаем $\angle HNS = 180^\circ - \angle CAH - \angle QCN$. $\angle CAH$ – острый угол прямоугольного треугольника, поэтому он равен $90^\circ - \angle BCA$. Но $\angle QCN = \angle BCA$. Следовательно, $\angle HNS = 180^\circ - (90^\circ - \angle BCA) - \angle BCA = 90^\circ$. Аналогично найдём $\angle HNR$. $\angle HNR = 180^\circ - \angle HRN - \angle RHN = 180^\circ - \angle HCN - (180^\circ - \angle PHN) = 180^\circ - \angle HCA - (180^\circ - \angle BAC) = 180^\circ - (90^\circ - \angle BAC) - \angle BCA = 90^\circ$. Итак, $\angle SNR = \angle HNS + \angle HNR = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Таким образом, точка $N \in RS$.

2) $\Delta ARS = \Delta ARN + \Delta ANS$, $\Delta CRS = \Delta CRN + \Delta CNS$. Очевидно, что $S_{ARN} = S_{CRN}$, $S_{ANS} = S_{CNS}$, так как в обоих случаях пары треугольников имеют равные высоты и основания.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Наибольший общий делитель натуральных чисел n, m равен d ($\text{НОД}(n, m) = d$). Известно, что $n + m^2 + d^2 = dnm$. Найдите n и m .

Ответ. $(n, m) = (5, 2), (5, 3)$.

Решение. По условию $n = d \cdot x$, $m = d \cdot y$, где x, y – натуральные взаимно простые числа. Тогда $dx + d^2y^2 + d^2 = d^3xy$, или $x + dy^2 + d = d^2xy$. Отсюда x делится на d . Пусть $x = kd$. Подставим в полученное уравнение: $kd + dy^2 + d = d^3ky$, или $k + y^2 + 1 = d^2ky$. Отсюда $k + 1$ делится на y . Пусть $k + 1 = ay$, то есть $k = ay - 1$. Подставляя, получаем $ay + y^2 = d^2y(ay - 1)$, или $a + y = d^2(ay - 1)$. Если $d \geq 2$, то $a + y \geq 4(ay - 1)$, следовательно, $y + 4 \geq a(4y - 1) \geq (4y - 1)$. Отсюда получаем $5 \geq 3y$. Тогда $y = 1$, $5 \geq 3a$, $a = 1$. Подставляя эти значения в равенство $k = ay - 1$, находим $k = 0$ и $x = 0$. Но x – натуральное число. Противоречие. Следовательно, $d < 2$, то есть $d = 1$. Уравнение $n + m^2 + 1 = nmt$ равносильно уравнению $m^2 + 1 = n(m - 1)$, значит, $m^2 + 1$ делится на $m - 1$. Тогда на $m - 1$ делится и $m^2 + 1 - (m^2 - m) = m + 1$. Но это означает, что и $m + 1 - (m - 1) = 2$ кратно $m - 1$, то есть $m - 1 = 1$ или 2 , $m = 2$ или 3 . При $m = 2$ исходное уравнение превращается в $n + 4 + 1 = 2n$, откуда $n = 5$. При $m = 3$ имеем $n + 9 + 1 = 3n$, откуда $n = 5$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Ответы найдены подбором – по 3 балла за каждый ответ, доказано, что других ответов нет – 14 баллов, баллы суммируются. Есть некоторые разумные рассуждения, но доказательства нет – 2 балла (из 14). Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.