

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

5 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри** из **20** баллов в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. На листочке написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в записи. Сумма этих чисел оказалась равной 100. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 23 заменили на число 32). Могла ли сумма получившихся чисел оказаться больше 400?

Ответ. Да, может.

Решение. Поскольку при перестановке цифр мы ставим вторую цифру на первое место, кажется разумным подбирать слагаемые, у которых вторая цифра большая. Например:

$$19 + 19 + 19 + 19 + 24 = 100, \quad 91 + 91 + 91 + 91 + 42 = 406.$$

Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 2 балла. Используются однозначные числа или числа, в записи которых есть цифра «0», при, в целом, верном примере – снимается 5 баллов.

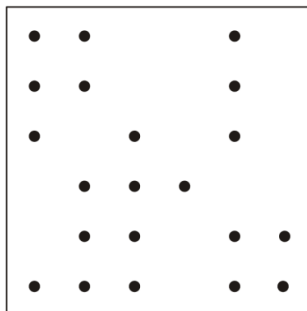
2. Бельчата выстроились в очередь в пункт сдачи орехов. У стоящих перед Вилли в сумме 25 орехов, а у стоящих за ним – 15. У стоящих перед Дилли в сумме 17 орехов, а у стоящих за ним – 19. У Вилли и Дилли вместе 12 орехов. Сколько орехов у бельчонка, стоящего перед Вилли? (В очереди нет бельчат без орехов.)

Ответ: 8.

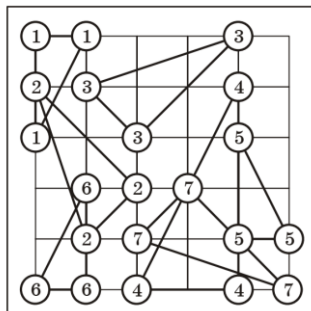
Решение. Пусть количество орехов: у Вилли – В, а у Дилли – Д. Из условия задачи следует, что $25 + В + 15 = 17 + Д + 19$, то есть $Д - В = 4$. Так как $Д + В = 12$, то $Д = 8$, $В = 4$. Заметим, что количество орехов у тех, кто стоит перед Вилли вместе с орехами Дилли в точности равно количеству орехов у тех, кто стоит перед Вилли. Следовательно, перед Вилли стоит как раз Дилли.

Комментарий. Только верный ответ – 3 балла. Используется, но не доказан, факт, что всего орехов 44 – добавляется 2 балла. Не доказано, что между Вилли и Дилли нет других бельчат, но при этом сказано, что у Вилли – 4 ореха, а у Дилли – 8 орехов – не более 5 баллов. Обоснованно получено и доказано, что у Вилли 4 ореха, а у Дилли – 8 орехов – 14 баллов. Обоснованно получен верный ответ – 20 баллов.

3. Нарисуйте как можно больше треугольников, один из углов которых равен 90° , а вершины расположены в отмеченных точках. При этом каждая из отмеченных точек должна быть вершиной ровно одного треугольника. Треугольники могут пересекаться. Не забудьте перенести рисунок в бланк ответов.



Ответ.



Комментарий. Любой верный пример на 7 треугольников – 20 баллов. Любой пример на 6 треугольников – 15 баллов. Любой пример на 5 треугольников – 10 баллов. Любой пример на 4 треугольника – 5 баллов. Примеры на 3, 2, 1 и 0 треугольников – 0 баллов. В примере одна или более точек используются в нескольких треугольниках – 0 баллов.

4. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 15 жителей, среди которых был хотя бы один купец и хотя бы один разбойник. Каждому сидящему за столом задали вопрос: «Сколько среди твоих соседей купцов?» Все жители ответили одинаково. Какое число разбойников может сидеть за столом? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

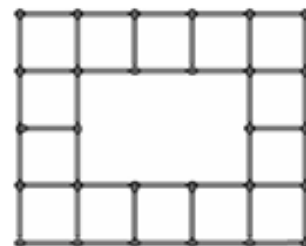
Ответ. 5, 8, 9 или 10.

Решение. Заметим, что нам не подходят варианты, когда на острове только разбойники или только купцы. Пусть на острове есть и купцы, и разбойники. Тогда был купец, сидящий рядом с разбойником, поэтому купцы не могли ответить 2. Тогда они сказали либо про 0, либо про 1 купца среди своих соседей. Если бы сказали про 0 купцов, значит, купцы сидят группами по одному, а разбойники группами не более, чем по два жителя. В таком случае разбойников не менее половины от общего числа ($7\frac{1}{2}$) и не более $\frac{2}{3}$ (10 жителей). В каждом случае от 8 до 10 разбойников в примере сначала чередуем купцов и разбойников, а потом к некоторым одиночным разбойникам подсаживаем второго разбойника. Если бы купцы сказали про 1, то за столом бы сидели циклически группы по 3 жителя (купец, купец, разбойник), т.е. было бы 5 разбойников.

Комментарий. За каждый обоснованно полученный верный ответ – 4 балла. Доказано, что других ответов нет – ещё 4 балла. Если найден один из верных ответов, но при этом не указана расстановка, то снимается по 2 балла. За каждое неверно указанное количество разбойников и неверный пример снимается 2 балла. Если вместо разбойников было указано количество купцов – снимается 2 балла.

5. У Васи есть 42 спички, из которых он может составить рамку толщиной в один квадратик, как показано на рисунке справа (внутри рамки спичек нет). Может ли Вася, используя ровно 1000 спичек, составить такую же рамку, но большего размера?

Ответ. Не сможет.



Решение. Покажем, что количество спичек в контуре всегда делится на 3. Отсюда будет следовать, что контура из 1000 спичек не существует. Действительно, начнем выкладывать клетки контура по часовой стрелке, начиная с угловой правой нижней клетки. При этом в ее контуре пока не положим верхнюю спичку: . Для каждой следующей клетки теперь потребуется ровно три новые спички, потому что одна из ее сторон уже будет выложена. Для последней клетки тоже потребуется три спички, потому что верхнюю спичку первой клетки мы не положили. Следовательно, общее количество спичек равно количеству клеток, умноженному на 3.

Комментарий. Обоснованное полное решение – 20 баллов. Присутствует идея рассмотреть делимость на 3 или на 6, но без дальнейших продвижений – до 5 баллов. Идея использовать рамку или аналогичную структуру +3 балла.

Примечание. Некоторые участники могут рассматривать увеличение исходной рамки по длине или ширине на 1 квадратик и писать, что общее количество клеток увеличивается на 6. Это решение может считаться верным, только в том случае, если доказано, что все возможные рамки толщиной в 1 квадратик получаются из исходной рамки увеличением длины или ширины.

Вариант 2

1. На листочке написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в записи. Сумма этих чисел оказалась равной 105. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 23 заменили на число 32). Могла ли сумма получившихся чисел оказаться больше 450?

Ответ. Да, может.

Решение. Поскольку при перестановке цифр мы ставим вторую цифру на первое место, кажется разумным подбирать слагаемые, у которых вторая цифра большая. Например:

$$19 + 19 + 19 + 19 + 29 = 105, \quad 91 + 91 + 91 + 91 + 92 = 456.$$

Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 2 балла. Используются однозначные числа или числа, в записи которых есть цифра «0», при, в целом, верном примере – снимается 5 баллов.

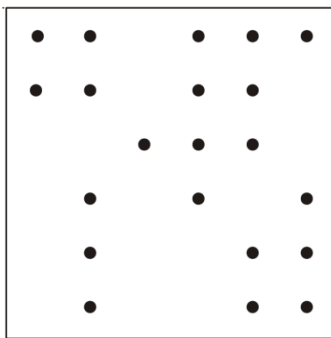
2. Бельчата выстроились в очередь в пункт сдачи орехов. У стоящих перед Вилли в сумме 33 ореха, а у стоящих за ним – 17. У стоящих перед Дилли в сумме 27 орехов, а у стоящих за ним – 20. У Вилли и Дилли вместе 9 орехов. Сколько орехов у бельчонка, стоящего перед Вилли? (В очереди нет бельчат без орехов.)

Ответ: 6.

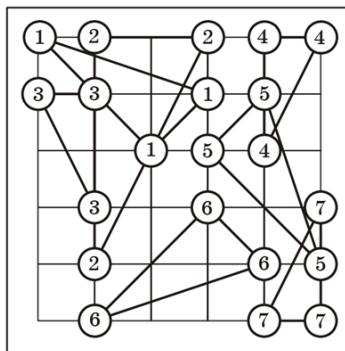
Решение. Пусть количество орехов: у Вилли – В, а у Дилли – Д. Из условия задачи следует, что $33 + В + 17 = 27 + Д + 20$, то есть $Д - В = 3$. Так как $Д + В = 9$, то $Д = 6$, $В = 3$. Заметим, что количество орехов у тех, кто стоит перед Вилли вместе с орехами Дилли в точности равно количеству орехов у тех, кто стоит перед Вилли. Следовательно, перед Вилли стоит как раз Дилли.

Комментарий. Только верный ответ – 3 балла. Используется, но не доказан, факт, что всего орехов 53 – добавляется 2 балла. Не доказано, что между Вилли и Дилли нет других бельчат, но при этом сказано, что у Вилли – 3 ореха, а у Дилли – 6 орехов – не более 5 баллов. Обоснованно получено и доказано, что у Вилли 3 ореха, а у Дилли – 6 орехов – 14 баллов. Обоснованно получен верный ответ – 20 баллов.

3. Нарисуйте как можно больше треугольников, один из углов которых равен 90° , а вершины расположены в отмеченных точках. При этом каждая из отмеченных точек должна быть вершиной ровно одного треугольника. Треугольники могут пересекаться. Не забудьте перенести рисунок в бланк ответов.



Ответ.



Комментарий. Любой верный пример на 7 треугольников – 20 баллов. Любой пример на 6 треугольников – 15 баллов. Любой пример на 5 треугольников – 10 баллов. Любой пример на 4 треугольника – 5 баллов. Примеры на 3, 2, 1 и 0 треугольников – 0 баллов. В примере одна или более точек используются в нескольких треугольниках – 0 баллов.

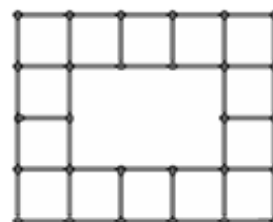
4. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 14 жителей, среди которых был хотя бы один купец и хотя бы один разбойник. Каждому сидящему за столом задали вопрос: «Сколько среди твоих соседей купцов?» Все жители ответили одинаково. Какое число разбойников может сидеть за столом? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

Ответ. 7, 8 или 9.

Решение. Заметим, что нам не подходят варианты, когда на острове только разбойники или только купцы. Пусть на острове есть и купцы, и разбойники. Тогда был купец, сидящий рядом с разбойником, поэтому купцы не могли ответить 2. Тогда они сказали либо про 0, либо про 1 купца среди своих соседей. Если бы сказали про 0 купцов, значит, купцы сидят группами по одному, а разбойники группами не более чем по два жителя. В таком случае разбойников не более половины от общего числа (7) и не менее $\frac{2}{3}$ ($9\frac{1}{3}$ жителей). В каждом случае от 7 до 9 разбойников в примере сначала чередуем купцов и разбойников, а потом к некоторым одиночным купцам подсаживаем второго разбойника. Если бы купцы сказали про 1, то за столом бы сидели циклически группы по 3 жителя (купец, купец, разбойник), т.е. число жителей делилось бы на 3.

Комментарий. За каждый обоснованно полученный верный ответ – 5 баллов. Доказано, что других ответов нет – ещё 5 балла. Если найден один из верных ответов, но при этом не указана расстановка, то снимается по 2 балла. За каждое неверно указанное количество разбойников и неверный пример снимается 2 балла. Если вместо разбойников было указано количество купцов – снимается 2 балла.

5. У Васи есть 42 спички, из которых он может составить рамку толщиной в один квадратик, как показано на рисунке справа (внутри рамки спичек нет). Может ли Вася, используя ровно 1100 спичек, составить такую же рамку, но большего размера?



Ответ. Не сможет.

Решение. Покажем, что количество спичек в контуре всегда делится на 3. Отсюда будет следовать, что контура из 1100 спичек не существует. Действительно, начнем выкладывать клетки контура по часовой стрелке, начиная с угловой правой ниж-

ней клетки. При этом в ее контуре пока не положим верхнюю спичку: . Для каждой следующей клетки теперь потребуется ровно три новые спички, потому что одна из ее сторон уже будет выложена. Для последней клетки тоже потребуется три спички, потому что верхнюю спичку первой клетки мы не положили. Следовательно, общее количество спичек равно количеству клеток, умноженному на 3.

Комментарий. Обоснованное полное решение – 20 баллов. Присутствует идея рассмотреть делимость на 3 или на 6, но без дальнейших продвижений – до 5 баллов. Идея использовать рамку или аналогичную структуру +3 балла.

Примечание. Некоторые участники могут рассматривать увеличение исходной рамки по длине или ширине на 1 квадратик и писать, что общее количество клеток увеличивается на 6. Это решение может считаться верным, только в том случае, если доказано, что все возможные рамки толщиной в 1 квадратик получаются из исходной рамки увеличением длины или ширины.

Вариант 3

1. На листочке написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в записи. Сумма этих чисел оказалась равной 115. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 23 заменили на число 32). Могла ли сумма получившихся чисел оказаться больше 450?

Ответ. Да, может.

Решение. Поскольку при перестановке цифр мы ставим вторую цифру на первое место, кажется разумным подбирать слагаемые, у которых вторая цифра большая. Например:

$$19 + 19 + 19 + 19 + 39 = 115, \quad 91 + 91 + 91 + 91 + 93 = 457.$$

Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 2 балла. Используются однозначные числа или числа, в записи которых есть цифра «0», при, в целом, верном примере – снимается 5 баллов.

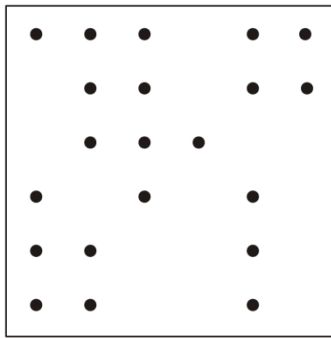
2. Бельчата выстроились в очередь в пункт сдачи орехов. У стоящих перед Вилли в сумме 23 ореха, а у стоящих за ним – 19. У стоящих перед Дилли в сумме 13 орехов, а у стоящих за ним – 24. У Вилли и Дилли вместе 15 орехов. Сколько орехов у бельчонка, стоящего перед Вилли? (В очереди нет бельчат без орехов.)

Ответ: 10.

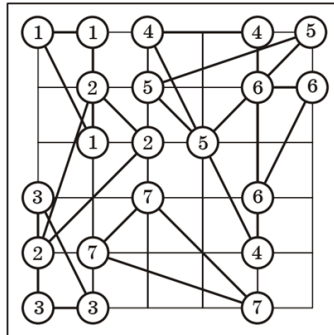
Решение. Пусть количество орехов: у Вилли – В, а у Дилли – Д. Из условия задачи следует, что $23 + В + 19 = 13 + Д + 24$, то есть $Д - В = 5$. Так как $Д + В = 15$, то $Д = 10$, $В = 5$. Заметим, что количество орехов у тех, кто стоит перед Вилли вместе с орехами Дилли в точности равно количеству орехов у тех, кто стоит перед Вилли. Следовательно, перед Вилли стоит как раз Дилли.

Комментарий. Только верный ответ – 3 балла. Используется, но не доказан, факт, что всего орехов 47 – добавляется 2 балла. Не доказано, что между Вилли и Дилли нет других бельчат, но при этом сказано, что у Вилли – 5 орехов, а у Дилли – 10 орехов – не более 5 баллов. Обоснованно получено и доказано, что у Вилли 5 орехов, а у Дилли – 10 орехов – 14 баллов. Обоснованно получен верный ответ – 20 баллов.

3. Нарисуйте как можно больше треугольников, один из углов которых равен 90° , а вершины расположены в отмеченных точках. При этом каждая из отмеченных точек должна быть вершиной ровно одного треугольника. Треугольники могут пересекаться. Не забудьте перенести рисунок в бланк ответов.



Ответ.



Комментарий. Любой верный пример на 7 треугольников – 20 баллов. Любой пример на 6 треугольников – 15 баллов. Любой пример на 5 треугольников – 10 баллов. Любой пример на 4 треугольника – 5 баллов. Примеры на 3, 2, 1 и 0 треугольников – 0 баллов. В примере одна или более точек используются в нескольких треугольниках – 0 баллов.

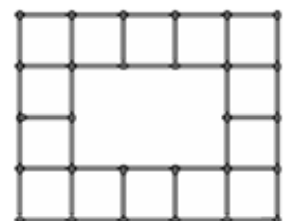
4. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 14 жителей, среди которых был хотя бы один купец и хотя бы один разбойник. Каждому сидящему за столом задали вопрос: «Сколько среди твоих соседей купцов?» Все жители ответили одинаково. Какое число купцов может сидеть за столом? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

Ответ. 5, 6 или 7.

Решение. Заметим, что нам не подходят варианты, когда на острове только разбойники или только купцы. Пусть на острове есть и купцы, и разбойники. Тогда был купец, сидящий рядом с разбойником, поэтому купцы не могли ответить 2. Тогда они сказали либо про 0, либо про 1 купца среди своих соседей. Если бы сказали про 0 купцов, значит, купцы сидят группами по одному, а разбойники группами не более чем по два жителя. В таком случае купцов не более половины от общего числа (7) и не менее $\frac{1}{3}$ ($4\frac{2}{3}$ жителей). В каждом случае от 5 до 7 купцов в примере сначала чередуем купцов и разбойников, а потом к некоторым одиночным купцам подсаживаем второго разбойника. Если бы купцы сказали про 1, то за столом бы сидели циклически группы по 3 жителя (купец, купец, разбойник), т.е. число жителей делилось бы на 3.

Комментарий. За каждый обоснованно полученный верный ответ – 5 баллов. Доказано, что других ответов нет – ещё 5 балла. Если найден один из верных ответов, но при этом не указана расстановка, то снимается по 2 балла. За каждое неверно указанное количество разбойников и неверный пример снимается 2 балла. Если вместо купцов было указано количество разбойников – снимается 2 балла.

5. У Васи есть 42 спички, из которых он может составить рамку толщиной в один квадратик, как показано на рисунке справа (внутри рамки спичек нет). Может ли Вася, используя ровно 1300 спичек, составить такую же рамку, но большего размера?



Ответ. Не сможет.

Решение. Покажем, что количество спичек в контуре всегда делится на 3. Отсюда будет следовать, что контура из 1300 спичек не существует. Действительно, начнем выкладывать клетки контура по часовой стрелке, начиная с угловой правой нижней клетки. При этом в ее контуре пока не положим верхнюю спичку: . Для каждой сле-

дующей клетки теперь потребуется ровно три новые спички, потому что одна из ее сторон уже будет выложена. Для последней клетки тоже потребуется три спички, потому что верхнюю спичку первой клетки мы не положили. Следовательно, общее количество спичек равно количеству клеток, умноженному на 3.

Комментарий. Обоснованное полное решение – 20 баллов. Присутствует идея рассмотреть делимость на 3 или на 6, но без дальнейших продвижений – до 5 баллов. Идея использовать рамку или аналогичную структуру - +3 балла.

Примечание. Некоторые участники могут рассматривать увеличение исходной рамки по длине или ширине на 1 квадратик и писать, что общее количество клеток увеличивается на 6. Это решение может считаться верным, только в том случае, если доказано, что все возможные рамки толщиной в 1 квадратик получаются из исходной рамки увеличением длины или ширины.