

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

6 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

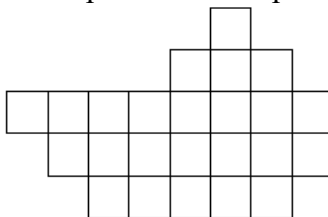
1. В наборе было 28 фигурок: треугольников, квадратов, прямоугольников. У всех фигурок вместе было 100 сторон. Сколько было треугольников?

Ответ. 12.

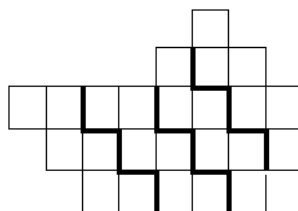
Решение. Если бы все фигуры были квадратами или прямоугольниками, у них было бы $28 \cdot 4 = 112$ сторон. 12 сторон не хватает, значит, у 12 фигур было по 3 стороны.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении есть пробелы в обосновании – 18 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Фигура составлена из одинаковых квадратных клеток. Разделите её по границам клеток на четыре равные части. Части считаются равными, если при наложении они совпадают. При этом части можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. Например, так.



Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. Показан только вид частей, но не показано разбиение – 10 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

3. У бельчонка было 4 шишки высотой 6, 9, 12 и 15 сантиметров. Потом он нашёл ещё одну шишку (обозначим её высоту a), и расположил все пять шишек в ряд в порядке возрастания высоты. При каких значениях a среднее арифметическое высоты пяти шишек совпадает с высотой шишки, стоящей в середине ряда? Найдите все значения и покажите, что других нет.

Ответ. 3; 10,5; 18.

Решение. $6 + 9 + 12 + 15 = 42$. В середине ряда могут стоять числа 9, 12, a , но не 6 или 15. Надо рассмотреть 3 случая.

1) $42 + a = 5 \cdot 9 = 45, a = 3$. Среднее арифметическое 9, в середине ряда 3, 6, 9, 12, 15 также стоит число 9. Этот случай подходит.

2) $42 + a = 5 \cdot 12 = 60, a = 18$. Среднее арифметическое 12, в середине ряда 6, 9, 12, 15, 18 стоит число 12. Этот случай тоже подходит.

3) $42 + a = 5a, a = \frac{42}{4} = 10,5$. Среднее арифметическое 10,5, в середине ряда 6, 9, 10,5, 12, 15 стоит число 10,5. И этот случай подходит.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Число $a = 10,5$ найдено, но отброшено – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Задача решена перебором целых значений, не показано, что других вариантов нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

4. У Лизы есть свободное время, и она хочет погулять с подружками, но до этого ей надо вывести собаку и купить хлеб. Если она сначала выведет собаку, это займёт 10% оставшегося после этого свободного времени. Если она сначала купит хлеб, это займёт 21% оставшегося после этого свободного времени. Какую часть свободного времени Лиза сможет погулять с подружками?

Ответ. $\frac{89}{121}$.

Решение. Обозначим всё свободное время a , время, нужное, чтобы вывести собаку – x , время, нужное, чтобы купить хлеб – y . По условию $x = 0,1(a - x), y = 0,21(a - y)$.

Отсюда $1,1x = 0,1a, 1,21y = 0,21a$, то есть $x = \frac{a}{11}, y = \frac{21a}{121}$. $x + y = \frac{32a}{121}$. После этого останется $a - \frac{32a}{121} = \frac{89a}{121}$. Это составляет $\frac{89}{121}$ от a ($\sim 73,56\%$).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 18 баллов. Найдена часть времени от вывода собаки и покупки хлеба, а не от всего свободного времени – 18 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Условия записаны в виде верной системы – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Артём записал числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Потом он разбил все числа на пары, и вместо каждой пары записал одно неотрицательное число, равное разности чисел в этой паре. После этого получилось 4 числа. Артём повторил эту операцию ещё 2 раза, и осталось

одно число. Каким могло быть это число? Укажите все возможные значения и докажете, что других нет.

Ответ. 0, 2, 4, 6.

Решение. Число 8 не может остаться, так как оно уменьшается на первом шаге. Докажем, что нечётное число не может остаться. Изначально сумма чисел чётная. Её можно представить, как сумму двух чисел: всех уменьшаемых и всех вычитаемых чисел. Но если сумма двух чисел чётная, то и разность этих чисел чётная. Следовательно, на каждом шаге получаются числа с чётной суммой, поэтому и последнее число должно быть чётным. Покажем, что числа 0, 2, 4, 6 могут остаться.

1) Пусть бельчонок в первый раз объединил пары так: (1; 8), (2; 3), (4; 5), (6; 7). Тогда он получил число 7 и три единицы. Далее: $7, 1, 1, 1 \rightarrow 6, 0, 0, 0 \rightarrow 6, 0 \rightarrow 6$.

2) (1; 6), (2; 3), (4; 5), (7; 8) $\rightarrow 5, 1, 1, 1 \rightarrow 4, 0 \rightarrow 4$.

3) (1; 4), (2; 3), (5; 6), (7; 8) $\rightarrow 3, 1, 1, 1 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 2$.

4) (1; 2), (3; 4), (5; 6), (7; 8) $\rightarrow 1, 1, 1, 1 \rightarrow 0, 0, 0, 0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 0$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. За каждый найденный ответ – 2 балла, если показано, как получить этот ответ; если не показано – 1 балл. Доказано, что не может быть нечётных чисел – 12 баллов, баллы суммируются. В верном доказательстве есть пробел – 8 баллов (из 12). Есть идея чётности числа нечётных чисел, но доказательства нет – 2 балла (из 12). Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Вариант 2

1. В наборе было 30 фигурок: треугольников, квадратов, прямоугольников. У всех фигурок вместе было 112 сторон. Сколько было треугольников?

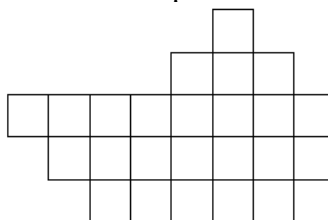
Ответ. 8.

Решение. Если бы все фигуры были квадратами или прямоугольниками, у них было бы $30 \cdot 4 = 120$ сторон. 8 сторон не хватает, значит, у 8 фигур было по 3 стороны.

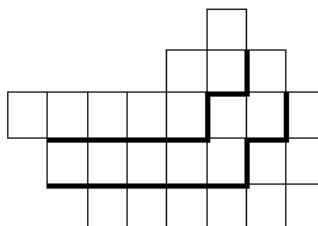
Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Фигура составлена из одинаковых квадратных клеток. Разделите её по границам клеток на три равные части. Части считаются равными, если при наложении они совпадают.

При этом части можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. Например, так.



Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. Показан только вид частей, но не показано разбиение – 10 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

3. Бельчонок нашёл 4 гриба высотой 5, 9, 12 и 18 сантиметров. Потом он нашёл ещё один гриб (обозначим его высоту a), и расположил все пять грибов в ряд в порядке возрастания высоты. При каких значениях a среднее арифметическое высоты пяти грибов совпадает с высотой гриба, стоящего в середине ряда? Найдите все значения и покажите, что других нет.

Ответ. 1; 11; 16.

Решение. $5 + 9 + 12 + 18 = 44$. В середине ряда могут стоять числа 9, 12, a , но не 5 или 18. Надо рассмотреть 3 случая. 1) $44 + a = 5 \cdot 9 = 45$, $a = 1$. Среднее арифметическое 9, в середине ряда 1, 5, 9, 12, 18 также стоит число 9. Этот случай подходит.

2) $44 + a = 5 \cdot 12 = 60$, $a = 16$. Среднее арифметическое 12, в середине ряда 5, 9, 12, 16, 18 стоит число 12. Этот случай также подходит.

3) $44 + a = 5 \cdot a = 5a$, $a = 11$. Среднее арифметическое 11, в середине ряда 5, 9, 11, 12, 18, стоит число 11. И этот случай также подходит.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Без обоснования рассматриваются только целые значения a – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

4. В роще растут деревья трёх видов: берёзы, осины, клёны. Берёзы составляют 20% от числа деревьев двух других видов. Осины составляют 80% от числа деревьев двух других видов. Какую часть от числа всех деревьев составляют клёны?

Ответ. $\frac{7}{18}$.

Решение. Обозначим число всех деревьев a , число берёз – x , число осин – y . По условию $x = 0,2(a - x)$, $y = 0,8(a - y)$.

Отсюда $1,2x = 0,2a$, $1,8y = 0,8a$, то есть $x = \frac{a}{6}$, $y = \frac{4a}{9}$. $x + y = \frac{11a}{18}$. После этого останется $a - \frac{11a}{18} = \frac{7a}{18}$. Это составляет $\frac{7}{18}$ от a ($\sim 39\%$).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Найдена часть от деревьев двух других видов, а не от всех – 18 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Миша записал числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24. Потом он разбил все числа на пары, и вместо каждой пары записал одно неотрицательное число, равное разности чисел в этой паре. После этого получилось 4 числа. Миша повторил эту операцию ещё 2 раза, и осталось одно число. Каким могло быть это число? Укажите все возможные значения и докажете, что других нет.

Ответ. 0, 6, 12, 18.

Решение. Очевидно, все получаемые числа кратны 3. Число 24 не может остаться, так как оно уменьшается на первом шаге. Докажем, что нечётное число не может остаться. Изначально сумма чисел чётная. Её можно представить, как сумму двух чисел: всех уменьшаемых и всех вычитаемых чисел. Но если сумма двух чисел чётная, то и разность этих чисел чётная. Следовательно, на каждом шаге получаются числа с чётной суммой,

поэтому и последнее число должно быть чётным. Покажем, что числа 0, 6, 12, 18 могут остаться.

1) Пусть Миша в первый раз объединил пары так: (3; 24), (6; 9), (12; 15), (18; 21). Тогда он получил число 21 и три тройки. Далее: $21, 3, 3, 3 \rightarrow 18, 0, 0, 0 \rightarrow 18, 0 \rightarrow 18$.

2) (3; 18), (6; 9), (12; 15), (21; 24) $\rightarrow 15, 3, 3, 3 \rightarrow 12, 0 \rightarrow 12$.

3) (3; 12), (6; 9), (15; 18), (21; 24) $\rightarrow 9, 3, 3, 3 \rightarrow 6, 0 \rightarrow 6$.

4) (3; 6), (9; 12), (15; 18), (21; 24) $\rightarrow 3, 3, 3, 3 \rightarrow 0, 0, 0, 0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 0$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. За каждый найденный ответ – 2 балла, если показано, как получить этот ответ; если не показано – 1 балл. Доказано, что не может быть нечётных чисел – 12 баллов, баллы суммируются. В верном доказательстве есть пробел – 8 баллов (из 12). Есть идея чётности числа нечётных чисел, но доказательства нет – 2 балла (из 12). Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Вариант 3

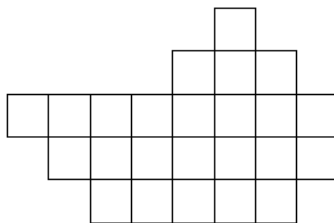
1. В наборе было 26 фигурок: треугольников, квадратов, прямоугольников. У всех фигурок вместе было 95 сторон. Сколько было треугольников?

Ответ. 9.

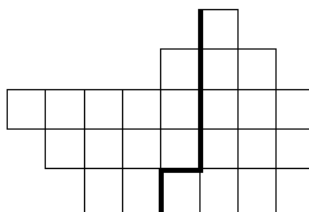
Решение. Если бы все фигуры были квадратами или прямоугольниками, у них было бы $26 \cdot 4 = 104$ стороны. 9 сторон не хватает, значит, у 9 фигур было по 3 стороны.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении есть пробелы в обосновании – 18 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Фигура составлена из одинаковых квадратных клеток. Разделите её по границам клеток на две равные части. Части считаются равными, если при наложении они совпадают. При этом части можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. Например, так.



Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. Показан только вид частей, но не показано разбиение – 10 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

3. На доске были написаны числа 7, 9, 5, 18. Миша написал ещё одно целое число (обозначим его a), и расположил все пять чисел в порядке возрастания. При каких значениях a среднее арифметическое пяти чисел совпадает с числом, стоящим в середине ряда пяти чисел? Найдите все значения и покажите, что других нет.

Ответ. -4 .

Решение. $5 + 7 + 9 + 18 = 39$. В середине ряда могут стоять числа $7, 9, a$, но не 5 или 18 . Надо рассмотреть 3 случая. 1) $39 + a = 5 \cdot 7 = 35, a = -4$. Среднее арифметическое 7 , в середине ряда $-4, 5, 7, 9, 18$ также стоит число 7 . Этот случай подходит.

2) $39 + a = 5 \cdot 9 = 45, a = 6$. Среднее арифметическое 9 , но в середине ряда $5, 6, 7, 9, 18$ стоит число 7 . Этот случай не подходит.

3) $39 + a = 5 \cdot a = 5a, a = \frac{39}{4}$. Среднее арифметическое $\frac{39}{4}$, но в середине ряда $5, 7, 9, \frac{39}{4}, 18$ стоит число 9 . Этот случай не подходит.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

4. Бельчонок набрал кучу шишек – сосновых, еловых и кедровых. Сосновые шишки составляли 40% от числа шишек двух других видов. Еловые шишки составляли 60% от числа шишек двух других видов. Какую часть от числа всех шишек составляли кедровые шишки?

Ответ. $\frac{19}{56}$.

Решение. Обозначим число всех шишек a , число сосновых шишек – x , число еловых шишек – y . По условию $x = 0,4(a - x)$, $y = 0,6(a - y)$.

Отсюда $1,4x = 0,4a$, $1,6y = 0,6a$, то есть $x = \frac{4a}{14}$, $y = \frac{6a}{16}$. $x + y = \frac{32a + 42a}{112} = \frac{74a}{112} = \frac{37a}{56}$.

После этого останется $a - \frac{37a}{56} = \frac{19a}{56}$. Это составляет $\frac{19}{56}$ от a ($\sim 34\%$).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 18 баллов. Найдена часть от шишек двух других видов, а не от всех – 18 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца, или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Условия записаны в виде верной системы – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Костя записал числа $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$. Потом он разбил все числа на пары, и вместо каждой пары записал одно неотрицательное число, равное разности чисел в этой паре. После этого получилось 4 числа. Костя повторил эту операцию ещё 2 раза, и осталось одно число. Каким могло быть это число? Укажите все возможные значения и докажете, что других нет.

Ответ. $0, 10, 20, 30$.

Решение. Очевидно, все получаемые числа кратны 5. Число 40 не может остаться, так как оно уменьшается на первом шаге. Докажем, что нечётное число не может остаться. Изначально сумма чисел чётная. Её можно представить, как сумму двух чисел: всех уменьшаемых и всех вычитаемых чисел. Но если сумма двух чисел чётная, то и разность этих чисел чётная. Следовательно, на каждом шаге получаются числа с чётной суммой, поэтому и последнее число должно быть чётным. Покажем, что числа $0, 10, 20, 30$ могут остаться.

1) Пусть Костя в первый раз объединил пары так: $(5; 40), (10; 15), (20; 25), (30; 35)$. Тогда он получил число 35 и три пятёрки. Далее: $35, 5, 5, 5 \rightarrow 30, 0, 0, 0 \rightarrow 30, 0 \rightarrow 30$.

2) $(5; 30), (10; 15), (20; 25), (35; 40) \rightarrow 25, 5, 5, 5 \rightarrow 20, 0 \rightarrow 20$.

3) $(5; 20), (10; 15), (25; 30), (35; 40) \rightarrow 15, 5, 5, 5 \rightarrow 10, 0 \rightarrow 10$.

4) $(5; 10), (15; 20), (25; 30), (35; 40) \rightarrow 5, 5, 5, 5 \rightarrow 0, 0, 0, 0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 0$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. За каждый найденный ответ – 2 балла, если показано, как получить этот ответ; если не показано – 1 балл. Доказано, что не может быть чисел, оканчивающихся на 5 – 12 баллов, баллы суммируются. В верном доказательстве есть пробел – 8 баллов (из 12). Есть идея чётности числа нечётных чисел, но доказательства нет – 2 балла (из 12). Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.