

## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

### 8 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения                                                                                                                                  |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 20    | Полное (верное) решение.                                                                                                                                            |
| 16-20 | Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.                                                                                         |
| 12-16 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 8-12  | Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.                                                                                                                 |
| 6-8   | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.                                                                                                  |
| 2-6   | Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).                                                                                      |
| 0-2   | Решение начато, но продвижение незначительное.                                                                                                                      |
| 0     | Решение неверное, продвижения отсутствуют.                                                                                                                          |
| 0     | Решение отсутствует.                                                                                                                                                |

### Вариант 1

1. На одну и ту же сумму денег можно купить или 20 зелёных груш, или 12 жёлтых. Сколько в среднем груш можно купить на эту сумму денег?

**Ответ.** 15.

**Решение.** Обозначим данную сумму денег  $S$ . На 20 зелёных груш потребуется потратить  $3S$ , а на 12 жёлтых груш –  $5S$ . Итак, за  $8S$  можно купить 120 груш, а за  $S - \frac{120}{8} = 15$ .

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть неточность – 18 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Известно, что  $xy = 9$  и  $11x - 7y + 3xy^2 + x^2y = 160$ . Найдите  $x^3 + y^3$ .

**Ответ.** 296.

**Решение.** Подставим  $xy = 9$ :  $11x - 7y + 27y + 9x = 20(x + y) = 160$ . Отсюда  $x + y = 8$ .

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 64 - 18 = 46.$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = 8 \cdot (46 - 9) = 296.$$

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 18 баллов. Ошибка в формуле – 10 баллов. Найдено только  $x + y$  – 5 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. Белке надо было перенести двух бельчат в соседний лес, находящийся на расстоянии 2,8 км. Белка понесла одного бельчонка, а второй пошёл следом. Когда соседний лес показался, белка ссадила первого бельчонка, который пошёл дальше пешком, а сама вернулась за вторым, и когда встретила, понесла его. Все трое попали в соседний лес в одно и то же время. Белка скачет со скоростью 4 км/час (с бельчонком или без). Бельчата идут со скоростью 1 км/час. Сколько времени им понадобилось, чтобы одновременно попасть в соседний лес?

**Ответ.** 78 минут.

**Решение.** Обозначим время до высадки первого бельчонка  $x$  (ч). За это время белка с ним пробежала  $4x$ , а второй бельчонок прошёл  $x$  (км). Между ними расстояние  $3x$ , и поскольку белка бежала навстречу второму бельчонку, они сближались со скоростью  $1 + 4 = 5$  км/час. Они встретились через время  $\frac{3x}{5}$  часов. Это время второй бельчонок шёл пешком, то есть всего он прошёл пешком  $x + \frac{3x}{5}$ . Заметим, что оба бельчонка должны были идти пешком одинаковое время, и одинаковое время их несла белка, иначе один добрался бы до леса быстрее. Значит, с момента высадки первый бельчонок прошёл пешком также  $x + \frac{3x}{5}$ , и попал в соседний лес. Но до момента высадки он преодолел расстояние  $4x$ . Значит,  $4x + x + \frac{3x}{5} = 2,8$  (км). Находим  $x = 0,5$  (ч) = 30 (мин). После этих 30 минут первый бельчонок пошёл пешком и добрался до леса за  $30 + \frac{3 \cdot 30}{5} = 48$  (мин). Всего потребовалось  $30 + 48 = 78$  (мин).

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Задача решена подбором – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 4-5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. У Матвея есть  $N$  квадратных плиток размером  $1 \times 1$ . Он может выложить из всех плиток прямоугольник, у которого короткая сторона больше 1, а длинная сторона на 11 длиннее короткой стороны. Матвей попробовал выложить из всех плиток квадрат, но у него осталось 8 плиток. Чему может равняться число плиток  $N$ ?

**Ответ.** 1452 и 152.

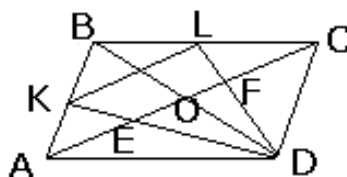
**Решение.** Обозначим сторону квадрата  $n$ , меньшую сторону прямоугольника  $m$ . Тогда  $n^2 + 8 = m(m + 11)$ ,  $n^2 = m^2 + 11m + \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 8 - \left(\frac{11}{2}\right)^2$ ,  $n^2 = \left(m + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{153}{4}$ . Таким образом,  $\left(m + \frac{11}{2}\right)^2 - n^2 = \frac{153}{4}$ . Разложим на множители:  $\left(m + \frac{11}{2} - n\right) \left(m + \frac{11}{2} + n\right) = \frac{153}{4}$ . Домножив на 4, получим  $(2m + 11 - 2n)(2m + 11 + 2n) = 153$ . Поскольку множители – целые числа, рассмотрим разложение числа 153 на два множителя:  $153 = 1 \cdot 153 = 3 \cdot 51 = 9 \cdot 17$ . Если  $2m + 11 + 2n = 153$ ,  $2m + 11 - 2n = 1$ , то, складывая эти равенства, найдём  $4m + 22 = 154$ ,  $m = 33$ , всего плиток  $33 \cdot 44 = 1452$ . Если  $2m + 11 + 2n = 51$ ,  $2m + 11 - 2n = 3$ , то, складывая эти равенства, найдём  $4m + 22 = 54$ ,  $m = 8$ , всего плиток  $8 \cdot 19 = 152$ . Если  $2m + 11 + 2n = 17$ ,  $2m + 11 - 2n = 9$ , то, складывая эти равенства, найдём  $4m + 22 = 26$ ,  $m = 1$ , но по условию короткая сторона больше 1.

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Найден ответ 152 – 5 баллов, найден ответ 1452 – 10 баллов, доказано, что других ответов нет – 5 баллов; баллы суммируются. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Диагональ  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  равна 12 и разделена точками  $E$  и  $F$  на три равные части. Прямые  $DE$  и  $DF$  пересекают стороны  $AB$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ . Найдите длину  $KL$ .

Ответ. 6.

**Решение.** Проведем диагональ  $BD$ .



Точка пересечения диагоналей  $O$  делит обе диагонали пополам:  $AO = AE + EO = OF + FC$ . Но  $AE = FC = \frac{AC}{3}$ , следовательно,  $EO = OF = \frac{AC}{6}$ . Отрезок  $CO$  – медиана треугольника  $BCD$ , а  $CF : FO = 2 : 1$ , то есть  $F$  – точка пересечения медиан треугольника  $BCD$ . Поэтому отрезок  $DL$ , проходящий через точку  $F$ , также является медианой этого треугольника, а потому точка  $L$  – середина стороны  $BC$ . Аналогично, точка  $K$  – середина стороны  $AB$ . Поэтому  $KL$  – средняя линия треугольника  $ABC$ , следовательно,  $KL = \frac{12}{2} = 6$ .

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1-2 балла. Только верный ответ без решения – 0 баллов.

## Вариант 2

1. У одного продавца можно купить 6 кг картофеля за 300 рублей, а у другого на ту же сумму денег можно купить 4 кг картофеля. Сколько в среднем картофеля можно купить на 300 рублей?

Ответ. 4,8 кг.

**Решение.** На 12 кг картофеля у первого продавца потребуется потратить 600 рублей, а у второго – 900 рублей. Итак, за 1500 рублей можно купить 24 кг картофеля. Поскольку  $1500 = 300 \cdot 5$ , на 300 рублей можно купить  $\frac{24}{5} = 4,8$  (кг).

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть неточность – 18 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Известно, что  $xy = 8$  и  $9x - 7y + 3xy^2 + x^2y = 340$ . Найдите  $x^2 + y^2$ .

Ответ. 384.

**Решение.** Подставим  $xy = 8$ :  $9x - 7y + 24y + 8x = 17(x + y) = 340$ . Отсюда  $x + y = 20$ .  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 400 - 16 = 384$ .

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 18 баллов. Ошибка в формуле – 10 баллов. Найдено только  $x + y$  – 5 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. У бельчонка есть  $N$  квадратных плиток размером  $1 \times 1$ . Он может выложить из всех плиток прямоугольник, у которого короткая сторона больше 2, а длинная сторона на 7 длиннее короткой стороны. Бельчонок попробовал выложить из всех плиток квадрат, но у него осталось 17 плиток. Чему может равняться число плиток  $N$ ?

**Ответ.** 98 и 858.

**Решение.** Обозначим сторону квадрата  $n$ , меньшую сторону прямоугольника  $m$ . Тогда  $n^2 + 17 = m(m + 7)$ ,  $n^2 = m^2 + 7m + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 17 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$ ,  $n^2 = \left(m + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{117}{4}$ .

Таким образом,  $\left(m + \frac{7}{2}\right)^2 - n^2 = \frac{117}{4}$ . Разложим на множители:  $\left(m + \frac{7}{2} - n\right) \left(m + \frac{7}{2} + n\right) = \frac{117}{4}$ . Домножив на 4, получим  $(2m + 7 - 2n)(2m + 7 + 2n) = 117$ . Поскольку множители – целые числа, рассмотрим разложение числа 117 на множители:  $117 = 1 \cdot 117 = 3 \cdot 39 = 9 \cdot 13$ . Если  $2m + 7 + 2n = 39$ ,  $2m + 7 - 2n = 3$ , то, складывая эти равенства, найдём  $4m + 14 = 42$ ,  $m = 7$ , всего плиток  $7 \cdot 14 = 98$ . Если  $2m + 7 + 2n = 13$ ,  $2m + 7 - 2n = 9$ , то, складывая эти равенства, найдём  $4m + 14 = 22$ ,  $m = 2$ , но по условию короткая сторона больше 2. Если  $2m + 7 + 2n = 117$ ,  $2m + 7 - 2n = 1$ , то, складывая эти равенства, найдём  $4m + 14 = 118$ ,  $m = 26$ , всего плиток  $26 \cdot 33 = 858$ .

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Найден ответ 98 – 5 баллов, найден ответ 858 – 10 баллов, доказано, что других ответов нет – 5 баллов; баллы суммируются. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. Принцессам Эльзе и Жасмин надо было одновременно попасть из Тридевятого королевства в Тридешатое, расстояние между королевствами составляет 80 км. Волк решил им помочь, но везти сразу двух принцесс он не мог. Волк повёз на себе Эльзу, а Жасмин пошла пешком. Через некоторое время волк ссадил Эльзу, которая пошла дальше пешком, а сам вернулся за Жасмин, и когда встретил её, повёз на себе. Все трое попали в Тридешатое королевство в одно и то же время. Волк скакал со скоростью 20 км/час (с принцессой или без). Принцессы пешком шли со скоростью 4 км/час. Сколько времени им понадобилось, чтобы одновременно попасть в Тридешатое королевство?

**Ответ.** 8 часов.

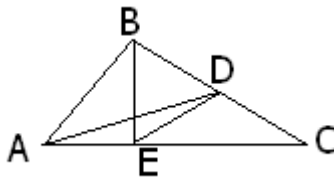
**Решение.** Обозначим время до высадки Эльзы  $x$ . За это время волк с Эльзой пробежал  $20x$ , а Жасмин прошла пешком  $4x$ . Между ними расстояние  $16x$ , и поскольку волк бежал навстречу Жасмин, они сближались со скоростью  $4 + 20 = 24$  км/час. Они встретились через время  $\frac{16x}{24} = \frac{2x}{3}$  часов. Это время Жасмин шла пешком, то есть всего она прошла пешком  $4x + \frac{2x}{3} \cdot 4 = 4x + \frac{8x}{3}$ . Заметим, что обе принцессы должны были идти пешком одинаковое время, и одинаковое время ехать на волке, иначе одна добралась бы быстрее. Значит, с момента высадки Эльза прошла пешком также  $4x + \frac{8x}{3}$ , и добралась до цели. Но до момента высадки Эльза на волке преодолела расстояние  $20x$ . Таким образом,  $20x + 4x + \frac{8x}{3} = 80$  (км). Находим  $x = 3$  (ч). После этих 3 часов Эльза пошла пешком и добралась в королевство за  $\frac{1}{4} \left(4 \cdot 3 + \frac{8 \cdot 3}{3}\right) = 5$  (ч). Всего потребовалось  $5 + 3 = 8$  (ч).

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Задача решена подбором – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 4-5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. В треугольнике  $ABC$  угол  $C = 30^\circ$ , точка  $D$  – середина стороны  $BC$ ,  $\angle BDA = 45^\circ$ . Найдите  $\angle BAD$ .

**Ответ.**  $30^\circ$ .

**Решение.** Найдём на прямой  $AC$  такую точку  $E$ , что  $ED = DB$ .



По условию  $ED = DB = DC$ . Тогда треугольник  $DCE$  равнобедренный,  $ED = DC$ , и  $\angle DEC = \angle ECD = 30^\circ$ , а  $\angle EDC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ . Из условия следует, что  $\angle ADC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ . Найдём угол  $ADE$ :  $\angle ADE = \angle ADC - \angle EDC = 135^\circ - 120^\circ = 15^\circ$ . Найдём угол  $EAD$ :  $\angle EAD = \angle CAD = 180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ . Тогда  $\angle BDE = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ . В треугольнике  $EBD$  есть по построению две равных стороны,  $ED = DB$ . Значит, это равнобедренный треугольник с углом  $60^\circ$ , то есть равносторонний треугольник,  $ED = DB = BE$ . Тогда  $\angle BEC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ = \angle BEA$ . Заметим, что треугольник  $ADE$  равнобедренный (так как углы при основании  $AD$  равны  $15^\circ$ ). Поэтому  $AE = ED$ , и так как  $ED = EB$ ,  $AE = EB$ . Таким образом, треугольник  $ABE$  – прямоугольный равнобедренный, и  $\angle BAE = 45^\circ$ . Тогда  $\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ .

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.

### Вариант 3

1. Федя покупал корм для собаки. В одном магазине он купил 3 кг корма за 400 рублей, а в другом на ту же сумму денег купил 5 кг корма. Сколько в среднем корма можно купить на 400 рублей?

**Ответ.** 3,75 кг.

**Решение.** На 15 кг корма в первом магазине потребуется потратить 2000 рублей, а во втором – 1200 рублей. Итак, за 3200 рублей можно купить 30 кг корма. Поскольку  $3200 = 400 \cdot 8$ , за 400 рублей можно купить  $\frac{30}{8} = 3,75$  (кг).

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть неточность – 18 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2 Известно, что  $xy = 12$  и  $6x + 6y - 3xy^2 + 2x^2y = 150$ . Найдите  $x^2 + y^2$ .

**Ответ.** 49.

**Решение.** Подставим  $xy = 8$ :  $6x + 6y - 36y + 24x = 30(x - y) = 150$ . Отсюда  $x - y = 5$ .  $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = 25 + 24 = 49$ .

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 18 баллов. Ошибка в формуле – 10 баллов. Найдено только  $x + y$  – 5 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. У бельчонка есть  $N$  квадратных плиток размером  $1 \times 1$ . Он может выложить из всех плиток прямоугольник, у которого короткая сторона больше 2, а длинная сторона на 19 длиннее короткой стороны. Бельчонок попробовал выложить из всех плиток квадрат, но ему не хватило 7 плиток. Чему может равняться число плиток  $N$ ?

**Ответ.** 722 и 6882.

**Решение.** Обозначим сторону квадрата  $n$ , меньшую сторону прямоугольника  $m$ . Тогда  $n^2 - 7 = m(m + 19)$ ,  $n^2 = m^2 + 19m + \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 7 - \left(\frac{19}{2}\right)^2$ ,  $n^2 = \left(m + \frac{19}{2}\right)^2 - \frac{333}{4}$ .

Таким образом,  $\left(m + \frac{19}{2}\right)^2 - n^2 = \frac{333}{4}$ . Разложим на множители:  $\left(m + \frac{19}{2} - n\right)\left(m + \frac{19}{2} + n\right) = \frac{333}{4}$ . Домножив на 4, получим  $(2m + 19 - 2n)(2m + 19 + 2n) = 333$ . Поскольку множители – целые числа, рассмотрим разложение числа 333 на множители:  $333 = 1 \cdot 333 = 3 \cdot 111 = 9 \cdot 37$ . Если  $2m + 19 + 2n = 333$ ,  $2m + 19 - 2n = 1$ , то, складывая эти равенства, найдём  $4m + 38 = 334$ ,  $m = 74$ , всего плиток  $74 \cdot 93 = 6882$ . Если  $2m + 19 + 2n = 111$ ,  $2m + 19 - 2n = 3$ , то, складывая эти равенства, найдём  $4m + 38 = 114$ ,  $m = 19$ , всего плиток  $19 \cdot 38 = 722$ . Если  $2m + 19 + 2n = 37$ ,  $2m + 19 - 2n = 9$ , то, складывая эти равенства, найдём  $4m + 38 = 46$ ,  $m = 2$ , но по условию короткая сторона больше 2.

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Найден ответ 722 – 5 баллов, найден ответ 6882 – 10 баллов, доказано, что других ответов нет – 5 баллов; баллы суммируются. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. Атосу, Арамису и Портосу надо было добраться до крепости Ля Рошель, которая находилась на расстоянии 63 км, но только у Портоса был конь. Портос с Атосом поехали на коне, а Арамис пошёл следом. Через некоторое время Портос ссадил Атоса, который пошёл дальше пешком, а сам на коне поехал назад, и когда встретил Арамиса, посадил его к себе на коня, и они поскакали в крепость. Все трое попали в крепость в одно и то же время. Портос скакал на коне со скоростью 18 км/час (с пассажиром или без). Мушкетёры шли пешком со скоростью 6 км/час. Сколько времени им понадобилось, чтобы одновременно попасть в крепость?

**Ответ.** 5 часов 50 минут.

**Решение.** Обозначим время до высадки Атоса  $x$  часов. За это время Портос с Атосом проехали  $18x$ , а Арамис прошёл  $6x$ . Между ними в этот момент расстояние  $12x$ , и поскольку Портос поехал навстречу Арамису, они сближались со скоростью  $6 + 18 = 24$  км/час. Они встретились через время  $\frac{12x}{24} = 0,5x$  часов. Это время Арамис всё ещё шёл пешком, то есть всего он прошёл пешком  $6x + 0,5x \cdot 6 = 9x$ . Заметим, что Атос и Арамис должны были идти пешком одинаковое время, и одинаковое время они ехали на коне, иначе один добрался бы до крепости быстрее. Значит, Атос после момента высадки прошёл пешком также  $9x$ , и попал в крепость. Но до момента высадки он преодолел расстояние  $18x$ . Таким образом,  $18x + 9x = 63$  (км). Находим  $x = \frac{7}{3}$  (ч). После этого Атос пошёл пешком и добрался до крепости за  $\frac{1}{6}\left(9 \cdot \frac{7}{3}\right) = \frac{7}{2}$  (ч). Всего потребовалось  $\frac{7}{3} + \frac{7}{2} = 5 \frac{5}{6}$  (ч), то есть 5 часов 50 минут.

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Задача решена подбором – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 4-5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. В трапеции  $ABCD$  основание  $AD$  параллельно  $BC$ ,  $AD > BC$ . Середины оснований  $AD$  и  $BC$  обозначены соответственно  $K$  и  $M$ , середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  обозначены соответственно  $L$  и  $N$ . Оказалось, что  $KM = LN$ . Докажите, что угол  $ABD > 90^\circ$ .

**Решение.** Соединим точки  $K, L, M, N$ . Отрезок  $LM$  – средняя линия треугольника  $ABC$ , поэтому  $LM \parallel AB$ ,  $LM = \frac{AB}{2}$ .  $KN$  – средняя линия треугольника  $ABD$ , поэтому  $KN \parallel AB$ ,  $KN = \frac{AB}{2}$ . Следовательно,  $KLMN$  – параллелограмм. Его диагонали  $KM = LN$ , значит,  $KLMN$  – прямоугольник.  $\angle ABD = \angle KND$ . Если  $\angle KND \leq 90^\circ$ , то  $\angle KND + \angle MNK \leq 180^\circ$  (так как  $\angle MNK = 90^\circ$ , как угол прямоугольника). Тогда дополняющий до  $360^\circ$   $\angle MND \geq 180^\circ$ . Это невозможно, так как  $\angle MND$  – угол между средней линией и стороной треугольника.

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.

#### Вариант 4

1. Квадратная таблица  $3 \times 3$  заполнена 9 целыми неотрицательными числами (среди которых могут быть равные) так, что все 6 чисел, равные суммам по строкам и столбцам, различны. Какова наименьшая возможная сумма 9 чисел в таблице?

**Ответ.** 8.

**Решение.** Если сложить 6 сумм по строкам и столбцам, получим удвоенную сумму всех чисел в таблице. Она будет наименьшей, когда наименьшими будут слагаемые. Наименьшие возможные различные 6 сумм по строкам и столбцам – это 0, 1, 2, 3, 4, 5. Их сумма равна 15, а сумма по строкам равна сумме по столбцам и не меньше  $15/2 = 7,5$ . Поскольку числа целые, сумма всех чисел в таблице не меньше 8.

Пример.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 1 |

Суммы по строкам и столбцам равны 0, 1, 2, 3, 4, 6.

**Комментарий.** Доказано, что сумма не может быть меньше 8 – 5 баллов; любой верный пример – 15 баллов. Эти баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Бельчонок Вася нашёл корни уравнения  $x^2 - 4x + a = 0$ , потом увеличил на 1 свободный член, и нашёл корни нового уравнения. Оказалось, что модуль разности между корнями увеличился на 0,5. Чему равняется  $a$ ?

**Ответ.** Таких  $a$  не существует.

**Решение.** Модуль разности между корнями первого уравнения равен  $\frac{2\sqrt{16-4a}}{2} = 2\sqrt{4-a}$ , а

для второго уравнения этот модуль равен  $\frac{2\sqrt{16-4(a+1)}}{2} = 2 \cdot \sqrt{4-a-1} = 2\sqrt{3-a}$ .

Получаем уравнение  $\sqrt{3-a} - \sqrt{4-a} = 0,25$ . Но  $\sqrt{3-a} < \sqrt{4-a}$ , поэтому таких  $a$  не существует.

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Решена задача с условием: «модуль разности между корнями уменьшился на 0,5», и получен ответ  $\left(-\frac{33}{64}\right)$  – 20 баллов. Есть

существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Вычислены дискриминанты – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. Числа  $a$  и  $b$  – натуральные, и  $a < b$ . От прямоугольника размером  $a \times b$  отрезали квадрат со стороной  $a$ . От оставшегося прямоугольника отрезали квадрат со стороной, равной меньшей стороне оставшегося прямоугольника. Эту операцию повторяли до тех пор, пока весь прямоугольник не был разрезан на квадраты с целыми сторонами. Известно, что при разрезании получились квадраты 10 разных размеров. Найдите наименьшие размеры исходного прямоугольника.

**Ответ.**  $89 \times 144$ .

**Решение.** Чтобы прямоугольник был наименьшим, квадраты также должны быть наименьшими и по возможности различными. Пусть самый последний квадрат будет иметь размеры  $(1 \times 1)$ . Наименьший прямоугольник, из которого его можно вырезать, –  $(1 \times 2)$ . При этом получаются два квадрата  $(1 \times 1)$ . Прямоугольник  $(1 \times 2)$  остался, когда вырезали квадрат нового размера, то есть  $(2 \times 2)$ , значит, наименьший предыдущий прямоугольник –  $(2 \times 3)$ . Он остался, когда вырезали квадрат  $(3 \times 3)$ , то есть наименьший предыдущий прямоугольник –  $(3 \times 5)$ . Он остался, когда вырезали квадрат нового размера, то есть  $(5 \times 5)$ . Таким образом, сторона каждого нового квадрата равна сумме сторон двух предыдущих квадратов. Запишем в таблицу.

| №       | 1            | 2            | 3            | 4            | 5             | 6              | 7              | 8              | 9              | 10              |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| Прям-к  | $1 \times 2$ | $2 \times 3$ | $3 \times 5$ | $5 \times 8$ | $8 \times 13$ | $13 \times 21$ | $21 \times 34$ | $34 \times 55$ | $55 \times 89$ | $89 \times 144$ |
| Квадрат | $1 \times 1$ | $2 \times 2$ | $3 \times 3$ | $5 \times 5$ | $8 \times 8$  | $13 \times 13$ | $21 \times 21$ | $34 \times 34$ | $55 \times 55$ | $89 \times 89$  |

**Замечание.** Сторона квадрата с номером  $n$  является числом Фибоначчи  $F_{n-1}$ .

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Найден ответ 722 – 5 баллов, найден ответ 6882 – 10 баллов, доказано, что других ответов нет – 5 баллов; баллы суммируются. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. Жители города участвовали в лыжном забеге. На трассе стояли наблюдатели. Мимо первого наблюдателя пробежал лыжник № 1, через время  $T$  – № 2, ещё через время  $T$  – № 3. Мимо второго наблюдателя эти лыжники пробежали также через одинаковые промежутки времени  $T$ , но в другом порядке: № 1, № 3, № 2. Известно, что у лыжника № 3 скорость 18 км/ч, а у лыжника № 2 скорость 9 км/ч. Найдите скорость лыжника № 1.

**Ответ.** 12 км/ч.

**Решение 1.** Пусть в тот момент, когда № 1 пробежал мимо первого наблюдателя, № 2 оставалось  $x$  км до первого наблюдателя. Это означает, что за время  $T$  № 2 пробегает  $x$  км. № 3 движется вдвое быстрее № 2 и пробегает за это же время  $2x$  км. Столько же он пробежал и за следующее время  $T$ . Значит, в тот момент, когда мимо первого наблюдателя пробежал № 1, № 3 был от наблюдателя на расстоянии  $4x$ . Когда же № 1 пробежал мимо второго наблюдателя, и № 3, и № 2 были позади него рядом на расстоянии  $2x$  м. Стало быть, пока № 1 ехал от первого до второго наблюдателя, № 3 догнал № 2, ликвидировав отставание в  $4x - x = 3x$  км. За это же время № 3 сократил отставание от № 1 на  $4x - 2x = 2x$  км. Это значит, что скорость, с которой № 3 догоняет № 1, составляет  $\frac{2}{3}$  от скорости, с которой он догоняет № 2. Но скорость, с которой № 3 догоняет № 2, равна разности их скоростей, то есть  $18 - 9 = 9$  км/ч. Значит, № 3 догоняет № 1 со скоростью  $9 \cdot \frac{2}{3} = 6$  км/ч, значит, скорость № 1 равна  $18 - 6 = 12$  км/ч.



**Решение 2.** Пусть  $S$  – расстояние между наблюдателями,  $t$  – время, за которое № 1 прошёл этот путь,  $v$  – скорость № 1,  $x$  определено как в решении 1.

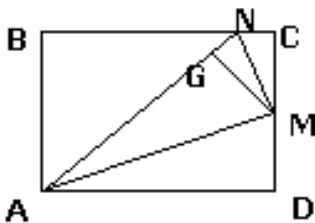
Очевидно,  $S = vt$ . Из первой части решения 1 следует, что  $S + 2x = 18t$ ,  $S - x = 9t$ . Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым:  $3S = 36t$ , то есть  $S = 12t$ . Подставим в уравнение  $S = vt$ :  $12t = vt$ , откуда  $v = 12$  (км/ч).

**Комментарий.** Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Задача решена подбором – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 4-5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $M$  – середина стороны  $CD$ . На стороне  $BC$  выбрана точка  $N$  так, что  $AM$  является биссектрисой угла  $NAD$ . Найдите угол  $AMN$ .

**Ответ.**  $90^\circ$ .

**Решение.** Опустим из точки  $M$  перпендикуляр  $MG$  на  $AN$ .



$\triangle AMG = \triangle AMD$ , так как эти треугольники прямоугольные, имеют равные острые углы ( $\angle GAM = \angle MAD$ ), и общую сторону  $AM$ . Следовательно,  $\angle GMA = \angle DMA$ ,  $MG = MD$ . Прямоугольные треугольники  $GNM$  и  $CNM$  равны по катету и гипотенузе (так как  $MG = MD = MC$ ). Следовательно,  $\angle GMN = \angle CMN$ .  $\angle AMN = \angle AMG + \angle GMN = \angle DMA + \angle CMN$ . Но в сумме эти 4 угла составляют развёрнутый угол:  $\angle AMG + \angle GMN + \angle DMA + \angle CMN = 2 \cdot (\angle AMG + \angle GMN) = 180^\circ$ . Отсюда  $\angle AMN = 90^\circ$ .