

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается Жюри из **20** баллов в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Однажды за круглым столом собралась компания из 1001 жителя. Оказалось, что рядом с каждым купцом сидит ровно один разбойник, а рядом с каждым разбойником найдётся купец. Какое наименьшее количество купцов могло сидеть за столом?

Ответ. 502.

Решение. Из условия следует, что купец не может сидеть между двумя купцами или двумя разбойниками, а разбойник не может сидеть между двумя разбойниками. Таким образом, при обходе вокруг стола купцы будут встречаться нам по двое подряд, а разбойники – по одному или по двое подряд. Из этого следует, что каждому разбойнику можно найти в пару по купцу (и после этого ещё останутся купцы, не вошедшие ни в одну пару). Значит, купцов за столом больше половины от общего числа сидящих и к тому же чётное число, то есть хотя бы 502.

Пример рассадки 502 купцов и 499 разбойников, удовлетворяющий условию: сначала посадим 248 групп вида «купец, купец, разбойник, разбойник», затем – ещё три группы вида «купец, купец, разбойник».

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение с незначительными недочётами – 18 баллов. Допущены незначительные ошибки или рассмотрены не все случаи при доказательстве минимальности 502 купцов – 16 баллов. Доказано, что меньше 502 купцов нельзя, но нет примера – 15 баллов. Пример расстановки с 502 купцами без обоснования минимальности – 10 баллов. Показано, что купцов не меньше, чем разбойников – 6 баллов. Показано, что купцы и разбойники должны чередоваться по определённым правилам – 4 балла. Только ответ – 2 балла.

2. Внутри угла KLM отмечена точка Q . Известно, что $KL = 2$, $MQ = 3$, $LM = 4$, $\angle KLM = \angle LMQ = 60^\circ$. Точка P – середина отрезка LQ . Найдите KP .

Ответ. $KP = \frac{1}{2}$.

Решение. Продолжим отрезки LK и MQ до пересечения в точке T . В треугольнике LMT два угла равны по 60° , поэтому он равносторонний. Значит, $LT = MT = LM = 4$, откуда следует, что $QT = MT - MQ = 1$. Кроме того, $KT = LT - LK = 4 - 2 = 2 = LK$, т.е. KP – средняя линия треугольника LQT . Таким образом, $KP = \frac{1}{2}QT = \frac{1}{2}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ – 0 баллов.

3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2-2}{n^2-n+2}$, где $n = 1, 2, \dots, 100$?

Ответ. 98.

Решение. Предположим, что для некоторых различных натуральных чисел k и m выполнено $a_k = a_m$. Тогда

$$\frac{k^2 - 2}{k^2 - k + 2} = \frac{m^2 - 2}{m^2 - m + 2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

$$km^2 - mk^2 + 4k^2 - 4m^2 - 2k + 2m = 0 \Leftrightarrow (m - k)(km - 4(k + m) + 2) = 0.$$

Так как $k \neq m$, то

$$km - 4(k + m) + 2 = 0 \Leftrightarrow (k - 4)(m - 4) = 14 = 2 \cdot 7.$$

У данного уравнения 4 решения в натуральных числах (k, m) , удовлетворяющих условию задачи: $(5, 18)$, $(18, 5)$, $(6, 11)$, $(11, 6)$. Поэтому из всех чисел a_k равны между собой только $a_5 = a_{18}$ и $a_6 = a_{11}$. Значит, у нас будет $100 - 2 = 98$ различных чисел.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В целом верное решение, но найдена только одна пара равных чисел – 10 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Любые попытки доказать, что все числа различны – 0 баллов.

4. На доске изначально написано 11 чисел:

$$-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.$$

За одну операцию разрешается выбрать два числа n и $n + 1$ с разницей 1, стереть их и записать на доску числа $n - 1$ и $n + 2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма квадратов чисел на доске после 16 операций.

Ответ. 174.

Решение. Посмотрим, насколько сумма квадратов чисел на доске после операции отличается от суммы квадратов до операции. Операция заменяет числа k и $k + 1$ на числа $k - 1$ и $k + 2$, а остальные девять чисел остаются неизменными. Тогда сумма квадратов всех одиннадцати чисел изменяется на

$$\Delta S = (k + 2)^2 + (k - 1)^2 - k^2 - (k + 1)^2 = 4.$$

Выходит, что сумма квадратов за каждую операцию увеличивается на 4. Изначально сумма квадратов равна

$$(-5)^2 + \dots + 5^2 = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 2 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 2 \cdot 55 = 110.$$

Тогда через 16 операций сумма квадратов будет равна $110 + 16 \cdot 4 = 174$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ без обоснования – 2 балла.

5. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 3×10 в три данных цвета так, чтобы его можно было разрезать на трёхцветные трёхклеточные уголки?

Ответ. 60^5 способов.

Решение. Пусть короткая сторона горизонтальна. При разрезании два уголка, примыкающие к короткой стороне, образуют прямоугольную часть 3×2 (две строки, три столбца). Соответственно, исходный прямоугольник разбивается на такие части, а каждая часть – на два уголка.

Посчитаем число способов раскрыть часть. Если разбиение части известно, то каждый уголок красится $3! = 6$ способами, а разбитая часть – $6^2 = 36$ способами. Каждая часть разбивается на уголки двумя способами, поэтому есть $2 \cdot 36 = 72$ раскраски. Но некоторые из них особые: они подходят при обоих разбиениях, поэтому посчитаны дважды. Посчитаем число особых раскрасок. Левый столбец входит в уголки целиком, поэтому его клетки разного цвета; аналогично для правого столбца. Раскрасим левый столбец. Каждая

клетка среднего столбца при каком-то из разрезов попадает в уголок с левым столбцом, поэтому её цвет определён однозначно; значит, обе средние клетки одинакового цвета. И наоборот: если в раскраске части средние клетки одинакового цвета, а в левом и правом столбцах – двух других цветов, то это особая раскраска. Выбирая тремя способами средний цвет и раскрашивая левую и правую пару двумя способами, получим 12 особых раскрасок. Значит, всего существует $36 + 36 - 12 = 60$ раскрасок части. Исходный прямоугольник разбивается на 5 частей, каждую раскрашиваем независимо, откуда и следует ответ.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение, но не доказано, что «особых» случаев именно 12 – 18 баллов. Верное решение, но не учтены «особые» случаи – 10 баллов. Незначительные продвижения (частные случаи раскрасок) – 2 балла. Только ответ – 2 балла.

Вариант 2

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Однажды за круглым столом собралась компания из 2001 жителя. Оказалось, что рядом с каждым купцом сидит ровно один разбойник, а рядом с каждым разбойником найдётся купец. Какое наибольшее количество разбойников могло сидеть за столом?

Ответ. 999.

Решение. Из условия следует, что купец не может сидеть между двумя купцами или двумя разбойниками, а разбойник не может сидеть между двумя разбойниками. Таким образом, при обходе вокруг стола купцы будут встречаться нам по двое подряд, а разбойники – по одному или по двое подряд. Из этого следует, что каждому разбойнику можно найти в пару по купцу (и после этого еще останутся купцы, не вошедшие ни в одну пару). Значит, разбойников за столом меньше половины от общего числа сидящих и к тому же нечётное число, то есть не более 999.

Пример рассадки 1002 купцов и 999 разбойников, удовлетворяющий условию: сначала посадим 498 групп вида «купец, купец, разбойник, разбойник», затем – ещё три группы вида «купец, купец, разбойник».

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение с незначительными недочётами – 18 баллов. Допущены незначительные ошибки или рассмотрены не все случаи при доказательстве максимальной 999 разбойников – 16 баллов. Доказано, что больше 999 разбойников нельзя, но нет примера – 15 баллов. Пример расстановки с 999 разбойниками без обоснования максимальной – 10 баллов. Показано, что купцов не меньше, чем разбойников – 6 баллов. Показано, что купцы и разбойники должны чередоваться по определённым правилам – 4 балла. Только ответ – 2 балла.

2. Внутри угла KLM отмечена точка Q . Известно, что $KL = 4$, $KQ = 1$, $LM = 8$, $\angle QKL = \angle KLM = 60^\circ$. Точка P на луче LQ такова, что $LQ = QP$. Найдите PM .

Ответ. 6.

Решение. Продолжим отрезок KQ до пересечения с отрезком LM в точке T . В треугольнике LTK два угла равны по 60° , поэтому он равносторонний. Значит, $LT = KT = KL = 4$, откуда следует, что $QT = KT - KQ = 3$. Кроме того, $MT = LM - LT = 8 - 4 = 4 = LT$, т.е. TQ – средняя линия треугольника LMP . Таким образом, $PM = 2QT = 6$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ – 0 баллов.

3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2 - 22}{n^2 - n - 16}$, где $n = 2, 3, \dots, 100$?

Ответ. 97.

Решение. Предположим, что для некоторых различных натуральных чисел k и m выполнено $a_k = a_m$. Тогда

$$\frac{k^2 - 22}{k^2 - k - 16} = \frac{m^2 - 22}{m^2 - m - 16}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

$$km^2 - mk^2 + 6k^2 - 6m^2 - 22k + 22m = 0 \Leftrightarrow (m - k)(km - 6(k + m) + 22) = 0.$$

Так как $k \neq m$, то

$$km - 6(k + m) + 22 = 0 \Leftrightarrow (k - 6)(m - 6) = 14 = 2 \cdot 7.$$

У данного уравнения 4 решения в натуральных числах (k, m) , удовлетворяющих условию задачи: $(7, 20)$, $(20, 7)$, $(8, 13)$, $(13, 8)$. Поэтому из всех чисел a_k равны между собой только $a_7 = a_{20}$ и $a_8 = a_{13}$. Значит, у нас будет $99 - 2 = 97$ различных чисел.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В целом верное решение, но найдена только одна пара равных чисел – 10 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Любые попытки доказать, что все числа различны – 0 баллов.

4. На доске изначально написано 11 чисел:

$$-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.$$

За одну операцию разрешается выбрать два числа n и $n + 1$ с разницей 1, стереть их и записать на доску числа $n - 1$ и $n + 2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма квадратов чисел на доске после 17 операций.

Ответ. 178.

Решение. Посмотрим, насколько сумма квадратов чисел на доске после операции отличается от суммы квадратов до операции. Операция заменяет числа k и $k + 1$ на числа $k - 1$ и $k + 2$, а остальные девять чисел остаются неизменными. Тогда сумма квадратов всех одиннадцати чисел изменяется на

$$\Delta S = (k + 2)^2 + (k - 1)^2 - k^2 - (k + 1)^2 = 4.$$

Выходит, что сумма квадратов за каждую операцию увеличивается на 4. Изначально сумма квадратов равна

$$(-5)^2 + \dots + 5^2 = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 2 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 2 \cdot 55 = 110.$$

Тогда через 17 операций сумма квадратов будет равна $110 + 17 \cdot 4 = 178$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ без обоснования – 2 балла.

5. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 3×12 в три данных цвета так, чтобы его можно было разрезать на трёхцветные трёхклеточные уголки?

Ответ. 60^6 способов.

Решение. Пусть короткая сторона горизонтальна. При разрезании два уголка, примыкающие к короткой стороне, образуют прямоугольную часть 3×2 (две строки, три столбца). Соответственно, исходный прямоугольник разбивается на такие части, а каждая часть – на два уголка.

Посчитаем число способов раскрыть часть. Если разбиение части известно, то каждый уголок красится $3! = 6$ способами, а разбитая часть – $6^2 = 36$ способами. Каждая часть разбивается на уголки двумя способами, поэтому есть $2 \cdot 36 = 72$ раскраски. Но некоторые из них *особые*: они подходят при обоих разбиениях, поэтому посчитаны дважды. Посчитаем число особых раскрасок. Левый столбец входит в уголки целиком, поэтому его клетки разного цвета; аналогично для правого столбца. Раскрасим левый столбец. Каждая клетка среднего столбца при каком-то из разрезаний попадает в уголок с левым столбцом, поэтому её цвет определён однозначно; значит, обе средние клетки одинакового цвета. И наоборот: если в раскраске части средние клетки одинакового цвета, а в левом и правом столбцах – двух других цветов, то это особая раскраска. Выбирая тремя способами средний цвет и раскрашивая левую и правую пару двумя способами, получим 12 особых раскрасок. Значит, всего существует $36 + 36 - 12 = 60$ раскрасок части. Исходный прямоугольник разбивается на 6 частей, каждую раскрашиваем независимо, откуда и следует ответ.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение, но не доказано, что «особых» случаев именно 12 – 18 баллов. Верное решение, но не учтены «особые» случаи – 10 баллов. Незначительные продвижения (частные случаи раскрасок) – 2 балла. Только ответ – 2 балла.

Вариант 3

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Однажды за круглым столом собралась компания из 4001 жителя. Оказалось, что рядом с каждым купцом сидит ровно один разбойник, а рядом с каждым разбойником найдётся купец. Какое наименьшее количество купцов могло сидеть за столом?

Ответ. 2002.

Решение. Из условия следует, что купец не может сидеть между двумя купцами или двумя разбойниками, а разбойник не может сидеть между двумя разбойниками. Таким образом, при обходе вокруг стола купцы будут встречаться нам по двое подряд, а разбойники – по одному или по двое подряд. Из этого следует, что каждому разбойнику можно найти в пару по купцу (и после этого еще останутся купцы, не вошедшие ни в одну пару). Значит, купцов за столом больше половины от общего числа сидящих и к тому же чётное число, то есть хотя бы 2002.

Пример раскладки 2002 купцов и 1999 разбойников, удовлетворяющий условию: сначала посадим 998 групп вида «купец, купец, разбойник, разбойник», затем – ещё три группы вида «купец, купец, разбойник».

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение с незначительными недочётами – 18 баллов. Допущены незначительные ошибки или рассмотрены не все случаи при доказательстве минимальности 2002 купцов – 16 баллов. Доказано, что меньше 2002 купцов нельзя, но нет примера – 15 баллов. Пример расстановки с 2002 купцами без обоснования минимальности – 10 баллов. Показано, что купцов не меньше, чем разбойников – 6 баллов. Показано, что купцы и разбойники должны чередоваться по определённым правилам – 4 балла. Только ответ – 2 балла.

2. Внутри угла XYZ отмечена точка S . Известно, что $XY = 2$, $ZS = 3$, $YZ = 4$, $\angle XYZ = \angle YZS = 60^\circ$. Точка T – середина отрезка YS . Найдите XT .

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Решение. Продолжим отрезки ZS и YX до пересечения в точке F . В треугольнике FYZ два угла равны по 60° , поэтому он равносторонний. Значит, $FY = YZ = FZ = 4$, откуда следует, что $FS = FZ - SZ = 1$. Кроме того, $FX = FY - XY = 4 - 2 = 2 = XY$, т.е. XT – средняя линия треугольника FYS . Таким образом, $XT = \frac{1}{2}SF = \frac{1}{2}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ – 0 баллов.

3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2 - 6}{n^2 - n - 2}$, где $n = 3, 4, \dots, 100$?

Ответ. 96.

Решение. Предположим, что для некоторых различных натуральных чисел k и m выполнено $a_k = a_m$. Тогда

$$\frac{k^2 - 6}{k^2 - k - 2} = \frac{m^2 - 6}{m^2 - m - 2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

$$km^2 - mk^2 + 4k^2 - 4m^2 - 6k + 6m = 0 \Leftrightarrow (m - k)(km - 4(k + m) + 6) = 0.$$

Так как $k \neq m$, то

$$km - 4(k + m) + 6 = 0 \Leftrightarrow (k - 4)(m - 4) = 10 = 2 \cdot 5.$$

У данного уравнения 4 решения в натуральных числах (k, m) , удовлетворяющих условию задачи: $(5, 14)$, $(14, 5)$, $(6, 9)$, $(9, 6)$. Поэтому из всех чисел a_k равны между собой только $a_5 = a_{14}$ и $a_6 = a_9$. Значит, у нас будет $98 - 2 = 96$ различных чисел.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В целом верное решение, но найдена только одна пара равных чисел – 10 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Любые попытки доказать, что все числа различны – 0 баллов.

4. На доске изначально написано 11 чисел:

−5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.

За одну операцию разрешается выбрать два числа n и $n + 1$ с разницей 1, стереть их и записать на доску числа $n - 1$ и $n + 2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма квадратов чисел на доске после 18 операций.

Ответ. 182.

Решение. Посмотрим, насколько сумма квадратов чисел на доске после операции отличается от суммы квадратов до операции. Операция заменяет числа k и $k + 1$ на числа $k - 1$ и $k + 2$, а остальные девять чисел остаются неизменными. Тогда сумма квадратов всех одиннадцати чисел изменяется на

$$\Delta S = (k + 2)^2 + (k - 1)^2 - k^2 - (k + 1)^2 = 4.$$

Выходит, что сумма квадратов за каждую операцию увеличивается на 4. Изначально сумма квадратов равна

$$(-5)^2 + \dots + 5^2 = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 2 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 2 \cdot 55 = 110.$$

Тогда через 18 операций сумма квадратов будет равна $110 + 18 \cdot 4 = 182$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ без обоснования – 2 балла.

5. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 3×14 в три данных цвета так, чтобы его можно было разрезать на трёхцветные трёхклеточные уголки?

Ответ. 60^7 способов.

Решение. Пусть короткая сторона горизонтальна. При разрезании два уголка, примыкающие к короткой стороне, образуют прямоугольную часть 3×2 (две строки, три столбца). Соответственно, исходный прямоугольник разбивается на такие части, а каждая часть – на два уголка.

Посчитаем число способов раскрыть часть. Если разбиение части известно, то каждый уголок красится $3! = 6$ способами, а разбитая часть – $6^2 = 36$ способами. Каждая часть разбивается на уголки двумя способами, поэтому есть $2 \cdot 36 = 72$ раскраски. Но некоторые из них *особые*: они подходят при обоих разбиениях, поэтому посчитаны дважды. Посчитаем число особых раскрасок. Левый столбец входит в уголки целиком, поэтому его клетки разного цвета; аналогично для правого столбца. Раскрасим левый столбец. Каждая клетка среднего столбца при каком-то из разрезов попадает в уголок с левым столбцом, поэтому её цвет определён однозначно; значит, обе средние клетки одинакового цвета. И наоборот: если в раскраске части средние клетки одинакового цвета, а в левом и правом столбцах – двух других цветов, то это особая раскраска. Выбирая тремя способами средний цвет и раскрашивая левую и правую пару двумя способами, получим 12 особых раскрасок. Значит, всего существует $36 + 36 - 12 = 60$ раскрасок части. Исходный прямоугольник разбивается на 7 частей, каждую раскрашиваем независимо, откуда и следует ответ.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение, но не доказано, что «особых» случаев именно 12 – 18 баллов. Верное решение, но не учтены «особые» случаи – 10 баллов. Незначительные продвижения (частные случаи раскрасок) – 2 балла. Только ответ – 2 балла.

Вариант 4

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды в ряд встали 100 жителей уезда. Каждый заявил, что если он уйдёт, то в оставшемся ряду у каждого купца будет сосед разбойник. При каком наибольшем количестве купцов такое возможно?

Ответ. 66 купцов.

Решение. Оценка. Поскольку мы ищем наибольшее количество купцов, будем сразу считать, что их больше трёх. Далее можно рассуждать по-разному.

Способ 1. Разобьём ряд на 34 блока: крайние будут состоять из двух человек, остальные – из трёх. Заметим, что если бы какой-то блок состоял только из купцов, то любой купец из другого блока соврал бы. Действительно, при его уходе в крайнем блоке у крайнего купца

не было бы соседа разбойника, а любом другом блоке – у среднего. Следовательно, разбойников в ряду не меньше 34, а купцов не больше $100 - 34 = 66$.

Способ 2. Рядом с каждым купцом должен стоять хотя бы один разбойник, иначе любой купец, не являющийся соседом этого купца, соврал бы. Разбойник может стоять рядом максимум с двумя купцами, поэтому если бы разбойников было не больше 33, то купцов было бы не больше 66, а всего в ряду стояло бы не более 99 человек. Следовательно, разбойников в ряду не меньше 34, а купцов не больше $100 - 34 = 66$.

Пример. Пусть жители острова стоят в порядке РККРКК...РККР. Тогда у каждого купца есть сосед разбойник, и при уходе любого купца это сохранится. А если уйдёт разбойник, то у купца, стоящего рядом с ним, больше не будет соседа разбойника.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение с незначительными недочётами – 18 баллов. Пример только правильный пример расстановки – 10 баллов. Допущены ошибки, приведшие к ответу 67 – 4 балла. Получен правильный ответ, но в доказательстве грубые ошибки – 4 балла. Только ответ – 0 баллов.

2. Точка P – середина основания KN трапеции $KLMN$. Отрезки LN и MP пересекаются в точке Q . Известно, что $KQ \perp LN$ и $LM = 5$. Найдите QM .

Ответ. 5.

Решение. По свойству медианы прямоугольного треугольника $PQ = PN$, следовательно, $\angle PNQ = \angle PQN$. Заметим, что $\angle PNQ = \angle QLM$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых KN и LM , $\angle PQN = \angle LQM$ как вертикальные. Таким образом, в треугольнике KQM углы L и Q равны, значит, $QM = LM = 5$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ – 0 баллов.

3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2 - 21}{n^2 - n - 15}$, где $n = 5, 6, \dots, 100$?

Ответ. 94.

Решение. Предположим, что для некоторых различных натуральных чисел k и m выполнено $a_k = a_m$. Тогда

$$\frac{k^2 - 21}{k^2 - k - 15} = \frac{m^2 - 21}{m^2 - m - 15}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

$$km^2 - mk^2 + 6k^2 - 6m^2 - 21k + 21m = 0 \Leftrightarrow (m - k)(km - 6(k + m) + 21) = 0.$$

Так как $k \neq m$, то

$$km - 6(k + m) + 21 = 0 \Leftrightarrow (k - 6)(m - 6) = 15 = 3 \cdot 5.$$

У данного уравнения 4 решения в натуральных числах (k, m) , удовлетворяющих условию задачи: $(7, 21)$, $(21, 7)$, $(9, 11)$, $(11, 9)$. Поэтому из всех чисел a_k равны между собой только $a_7 = a_{21}$ и $a_9 = a_{11}$. Значит, у нас будет $96 - 2 = 94$ различных чисел.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В целом верное решение, но найдена только одна пара равных чисел – 10 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Любые попытки доказать, что все числа различны – 0 баллов.

4. На доске написаны числа: две «2», три «3», четыре «4», ..., девять «9». Разрешается стереть любые два числа m и n и записать вместо них на доску число $\frac{mn}{m+n}$ (оно может оказаться нецелым). После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ. Последнее число всегда будет равно $\frac{1}{8}$.

Решение. Рассмотрим сумму обратных величин всех чисел. Для исходного набора чисел она равна

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + \dots + 9 \cdot \frac{1}{9} = 8.$$

Когда мы стираем числа m и n и записываем вместо них число $\frac{mn}{m+n}$, рассматриваемая сумма не меняется: при стирании она уменьшается на $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$, а при дописывании увеличи-

вається на $\frac{1}{\frac{mn}{m+n}} = \frac{m+n}{mn} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$, то єсть на ту же саму величину. В концє, когдa останеться єдинственне число x , сума обратных величин будєт равна $\frac{1}{x}$. Значит, $x = \frac{1}{8}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ без доказательства – 0 баллов.

5. Сколькими способами можно клетчатый прямоугольник 3×20 разбить на 4 вертикальных и 26 горизонтальных домино?

Ответ. $4C_{12}^4 = 1980$ способов.

Решение. Рассмотрим сначала разбиение средней горизонтали (полосы). Каждое вертикальное домино пересекается с ней по одной клетке. Поэтому полоса разбита на 4 отдельные клетки и 8 домино, т.е. на 12 частей. Пронумеровав части слева направо, видим, что разбиение полосы однозначно задаётся выбором номеров одиноких клеток. Значит, есть C_{12}^4 разбиение полосы.

Посчитаем число разбиений прямоугольника, дающих данное разбиение полосы. Если вторая половинка вертикального домино лежит ниже или выше полосы, обозначим такое положение соответственно Н или В. Идя по полосе слева направо и выписывая эти буквы, получим слово из 4 букв. Разбиение прямоугольника однозначно определяется этим словом и разбиением полосы. Докажем, что всегда возможны слова НННН, ВВВВ, ВВНН, ННВВ и только они. Действительно, в этих случаях каждая буква Н разбивает полосу на части чётной длины: каждая часть состоит из целых домино и из 0 или 2 одиноких клеток; то же верно и для В. Положив в прямоугольнике вертикальные Н-домино, мы и нижнюю горизонталь разобьём на части чётной длины, а они однозначно разбиваются на горизонтальные домино; аналогично для В-домино и верхней горизонтали.

При любом другом слове найдется пара разных букв с краю. Пусть, например, слово имеет вид ВН **. Тогда слева от этой буквы Н находится нечётное число клеток и на нижней горизонтали слева от этого Н-домино будет нечётное число клеток. Значит, эту часть на горизонтальные домино не разбить.

Мы доказали, что для каждого разбиения полосы есть 4 разбиения прямоугольника, откуда и следует ответ.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение, но допущены незначительные ошибки – 18 баллов. Только ответ без доказательства – 2 балла.