

10 КЛАСС

Вариант 1

1. Три бельчонка Петя, Захар и Дима играли в настольный футбол. В каждой партии играли двое, проигравший уступал своё место третьему игроку. Петя сыграл 6 раз, Захар 5 раз, Дима 3 раза. Кто проиграл во второй партии?
2. Федя записал дробь $\frac{4}{11}$, Лена записала дробь $\frac{7}{19}$, а Даня записал дробь $\frac{a}{b}$, которая находится в интервале $\left(\frac{4}{11}; \frac{7}{19}\right)$. Каково наименьшее возможное значение b ?
3. На окружности случайным образом поставлены 8 точек. Каждая пара этих точек соединена отрезком. Из всех этих отрезков равновероятно выбирают 4 отрезка, и красят их в красный цвет. Какова вероятность, что найдётся красный треугольник, вершины которого лежат на окружности?
4. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка D . Около треугольников BDC и ABD описаны окружности соответственно w_1 и w_2 . Окружность w_1 пересекает сторону AB в точке E , а окружность w_2 пересекает сторону BC в точке F . Известно, что $\angle ABD = \angle DBC$. Докажите, что $AE = CF$.
5. Решите в целых числах уравнение $x^4 - xy + y^3 = 0$.

Вариант 2

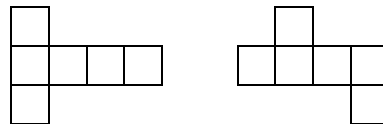
1. Бельчата Миша, Лена и Света играли в настольный теннис. В каждой партии играли двое, проигравший уступал своё место третьему игроку. Миша сыграл 6 раз, Лена 4 раза, Света 8 раз. Кто проиграл в шестой партии?
2. Федя записал дробь $\frac{7}{17}$, Катя записала дробь $\frac{5}{12}$, а Лиза записала дробь $\frac{a}{b}$, которая находится в интервале $\left(\frac{7}{17}; \frac{5}{12}\right)$. Каково наименьшее возможное значение b ?
3. На окружности случайным образом поставлены 9 точек. Каждая пара этих точек соединена отрезком. Из всех полученных отрезков (оба конца которых лежат на окружности) равновероятно выбирают 4 отрезка, и красят их в красный цвет. Какова вероятность, что найдётся красный треугольник, вершины которого лежат на окружности?
4. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка D . Около треугольников BDC и ABD описаны окружности, соответственно w_1 и w_2 . Окружность w_1 пересекает сторону AB в точке E , а окружность w_2 пересекает сторону BC в точке F . Известно, что $AE = CF$. Докажите, что $\angle ABD = \angle DBC$.
5. Докажите, что уравнение $x^4 + xy + y^3 = 0$ не имеет решений в целых числах, кроме $(x, y) = (0, 0)$.

Вариант 3

1. Бельчата Арина, Коля и Тимур играли в настольный хоккей. В каждой партии играли двое, проигравший уступал своё место третьему игроку. Арина сыграла 5 раз, Коля 3, Тимур 6. Кто проиграл в четвёртой партии?
2. Федя записал дробь $\frac{9}{16}$, Лена записала дробь $\frac{4}{7}$, а Миша записал дробь $\frac{a}{b}$, которая находится в интервале $(\frac{9}{16}; \frac{4}{7})$. Каково наименьшее возможное значение b ?
3. На окружности случайным образом поставлены 10 точек. Каждая пара этих точек соединена отрезком. Из всех этих отрезков равновероятно выбирают 4 отрезка, и красят их в красный цвет. Какова вероятность, что найдётся красный треугольник, вершины которого лежат на окружности?
4. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$. Точка M – середина стороны DC . Через точку M проведена прямая, перпендикулярная DC , и пересекающая сторону AD в точке N . Описанная окружность треугольника CMN вторично пересекает сторону AD в точке H , а прямую CB в точке G , $G \neq B$. Прямая MG пересекает прямую AB в точке K , а прямую CH в точке L . Докажите, что четырехугольник $KLHA$ является вписанным.
5. Решите в целых числах уравнение $x^4 - xy - y^3 = 0$.

Вариант 4

1. Маша и Петя сыграли по несколько партий в шашки, и между собой, и с другими ребятами. Петя играл 6 раз, в одной игре была ничья, в двух выигрыш, в трех проигрыш. Маша сыграла 5 раз, у неё было три ничьих и два раза она выиграла. Какое наименьшее число игр с другими ребятами могли сыграть Маша и Петя?
2. Четыре бельчонка изучали арифметику. Каждому из них назвали одинаковую пару ненулевых чисел (a, b) . Первый бельчонок поделил ana , второй перемножил свою пару чисел, третий вычел b из a , четвёртый сложил свои числа. Оказалось, что полученные ими результаты образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке). Найдите все возможные пары чисел (a, b) .
3. У двух школьников есть по развёртке куба. Обе развёртки состоят из 6 единичных квадратов (см. рисунок).



Каждый школьник равновероятно красит каждый единичный квадрат своей развёртки в зелёный или красный цвет. Потом они сворачивают развёртки в кубы покрашенными гранями наружу. Какова вероятность, что у них получатся кубы с одинаковой раскраской? Раскраски, совпадающие при повороте кубов, считаются одинаковыми.

4. В остроугольном треугольнике ABC точка пересечения высот обозначена H . Точка N – середина AC . Через точки A, H, N проведена окружность w_1 , а через точки C, H, N проведена окружность w_2 . Прямая AB пересекает окружность w_1 в точке P , прямая BC пересекает окружность w_2 в точке Q . Прямые PH и QH пересекают окружности w_2 и w_1 в точках R и S соответственно. Докажите 1) точки R, S, N лежат на одной прямой; 2) треугольники ARS и CRS имеют одинаковую площадь.
5. Наибольший общий делитель натуральных чисел n, m равен d ($\text{НОД}(n, m) = d$). Известно, что $n + m^2 + d^2 = dnm$. Найдите n и m .