

11 КЛАСС

Вариант 1

1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 2x - 1$, а x_3, x_4 – корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 3x - 1$. Найдите все возможные значения выражения $(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$.
2. Петя выписал на доску два числа: сначала 4, затем 6. Позже пришёл Толя и стал дальше записывать числа по следующему правилу: очередное число x_n – это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$, где x_{n-1}, x_{n-2} – это предыдущее и предпредыдущее записанные на доске числа соответственно. Какое число появится на доске 100-м?
3. У скольких наборов из 4 натуральных чисел с суммой 1001 среди чисел есть равные?
4. Точка I – центр окружности, вписанной в неравнобедренный треугольник ABC . Луч AI пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке D . Окружность, проходящая через точки C, D и I , вторично пересекает луч BI в точке K . Докажите, что $BK = CK$.
5. Найдите все тройки (a, b, c) натуральных чисел, для которых
$$a^3 + b^3 = (abc - 1)^2.$$

Вариант 2

1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 3x - 1$, а x_3, x_4 – корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 4x - 1$. Найдите все возможные значения выражения $(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$.
2. Петя выписал на доску два числа: сначала 2, затем 3. Позже пришёл Толя и стал дальше записывать числа по следующему правилу: очередное число x_n – это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$, где x_{n-1}, x_{n-2} – это предыдущее и предпредыдущее записанные на доске числа соответственно. Какое число появится на доске 99-м?
3. У скольких наборов из 4 натуральных чисел с суммой 1003 среди чисел есть равные?
4. Точка I – центр окружности, вписанной в неравнобедренный треугольник XYZ . Луч XI пересекает окружность, описанную около треугольника XYZ , в точке S . Окружность, проходящая через точки Z, S и I , вторично пересекает луч YI в точке T . Докажите, что $YT = ZT$.
5. Найдите все тройки (a, b, c) натуральных чисел, для которых
$$a^3 + b^3 = (abc + 1)^2.$$

Вариант 3

1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 4x - 1$, а x_3, x_4 – корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 5x - 1$. Найдите все возможные значения выражения $(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$.
2. Петя выписал на доску два числа: сначала 5, затем 7. Позже пришёл Толя и стал дальше записывать числа по следующему правилу: очередное число x_n – это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$, где x_{n-1}, x_{n-2} – это предыдущее и предпредыдущее записанные на доске числа соответственно. Какое число появится на доске 98-м?
3. У скольких наборов из 4 натуральных чисел с суммой 1005 среди чисел есть равные?
4. Точка I – центр окружности, вписанной в неравносторонний треугольник KLM . Луч KI пересекает окружность, описанную около треугольника KLM , в точке P . Окружность, проходящая через точки M, P и I , вторично пересекает луч LI в точке Q . Докажите, что $LQ = MQ$.
5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^3 - b^3 = (abc - 1)^2$. Докажите, что $a = b = c = 1$.

Вариант 4

1. Точка C с абсциссой -2 принадлежит гиперболе $y = \frac{1}{x}$. Через C проведены две прямые с угловыми коэффициентами 2 и $\frac{1}{2}$, пересекающие гиперболу в точках A и B (отличных от точки C) соответственно. Найдите координаты центра описанной окружности треугольника ABC .
2. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ возьмём $x_n = n^2 + 300$ и $y_n = \text{НОД}(x_n, x_{n+1})$. Чему равно максимально возможное значение y_n ?
3. Собрав 1001 орех, бельчата Боря, Вася и Петя решили разделить их. Каждый должен что-то получить, все – разное число орехов, Боря – больше всех. Сколькими способами можно так поделить орехи?
4. Дана окружность с центром O и точка A вне её. Секущая, проходящая через точку A , пересекает окружность в точках X и Y . Пусть X' – точка окружности, симметричная точке X относительно прямой OA . Докажите, что точка пересечения прямых OA и $X'Y$ не зависит от выбора секущей.
5. Натуральные числа $m > n$ таковы, что дробь $\frac{3^{m+2}}{3^{n+2}}$ есть целое число. Докажите, что $m > n^2$.