

9 КЛАСС

Вариант 1

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Однажды за круглым столом собралась компания из 1001 жителя. Оказалось, что рядом с каждым купцом сидит ровно один разбойник, а рядом с каждым разбойником найдётся купец. Какое наименьшее количество купцов могло сидеть за столом?
2. Внутри угла KLM отмечена точка Q . Известно, что $KL = 2$, $MQ = 3$, $LM = 4$, $\angle KLM = \angle LMQ = 60^\circ$. Точка P – середина отрезка LQ . Найдите KP .
3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2-2}{n^2-n+2}$, где $n = 1, 2, \dots, 100$?
4. На доске изначально написано 11 чисел:
 $-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$.
За одну операцию разрешается выбрать два числа n и $n + 1$ с разницей 1, стереть их и записать на доску числа $n - 1$ и $n + 2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма квадратов чисел на доске после 16 операций.
5. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 3×10 в три данных цвета так, чтобы его можно было разрезать на трёхцветные трёхклеточные уголки?

Вариант 2

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Однажды за круглым столом собралась компания из 2001 жителя. Оказалось, что рядом с каждым купцом сидит ровно один разбойник, а рядом с каждым разбойником найдётся купец. Какое наибольшее количество разбойников могло сидеть за столом?
2. Внутри угла KLM отмечена точка Q . Известно, что $KL = 4$, $KQ = 1$, $LM = 8$, $\angle QKL = \angle KLM = 60^\circ$. Точка P на луче LQ такова, что $LQ = QP$. Найдите PM .
3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2-22}{n^2-n-16}$, где $n = 2, 3, \dots, 100$?
4. На доске изначально написано 11 чисел:
 $-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$.
За одну операцию разрешается выбрать два числа n и $n + 1$ с разницей 1, стереть их и записать на доску числа $n - 1$ и $n + 2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма квадратов чисел на доске после 17 операций.
5. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 3×12 в три данных цвета так, чтобы его можно было разрезать на трёхцветные трёхклеточные уголки?

Вариант 3

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Однажды за круглым столом собралась компания из 4001 жителя. Оказалось, что рядом с каждым купцом сидит ровно один разбойник, а рядом с каждым разбойником найдётся купец. Какое наименьшее количество купцов могло сидеть за столом?

2. Внутри угла XYZ отмечена точка S . Известно, что $XY = 2$, $ZS = 3$, $YZ = 4$, $\angle XYZ = \angle YZS = 60^\circ$. Точка T – середина отрезка YS . Найдите XT .

3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2-6}{n^2-n-2}$, где $n = 3, 4, \dots, 100$?

4. На доске изначально написано 11 чисел:

$-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$.

За одну операцию разрешается выбрать два числа n и $n + 1$ с разницей 1, стереть их и записать на доску числа $n - 1$ и $n + 2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма квадратов чисел на доске после 18 операций.

5. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 3×14 в три данных цвета так, чтобы его можно было разрезать на трёхцветные трёхклеточные уголки?

Вариант 4

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды в ряд встали 100 жителей уезда. Каждый заявил, что если он уйдёт, то в оставшемся ряду у каждого купца будет сосед разбойник. При каком наибольшем количестве купцов такое возможно?

2. Точка P – середина основания KN трапеции $KLMN$. Отрезки LN и MP пересекаются в точке Q . Известно, что $KQ \perp LN$ и $LM = 5$. Найдите QM .

3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2-21}{n^2-n-15}$, где $n = 5, 6, \dots, 100$?

4. На доске написаны числа: две «2», три «3», четыре «4», ..., девять «9». Разрешается стереть любые два числа m и n и записать вместо них на доску число $\frac{mn}{m+n}$ (оно может оказаться нецелым). После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно? *Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*

5. Сколькими способами можно клетчатый прямоугольник 3×20 разбить на 4 вертикальных и 26 горизонтальных домино?