

Информатика. 10 класс

Вариант 1

Задание 1. Натуральные числа x и y удовлетворяют двум следующим уравнениям

$$x \wedge y = 2594$$

$$x \text{ xor } y = 1420$$

Здесь $\wedge$ поразрядная конъюнкция, xor поразрядное исключающее или (например, для чисел $12 \wedge 5 = 1100_2 \wedge 0101_2 = 0100_2 = 4$, $12 \text{ xor } 5 = 1100_2 \text{ xor } 0101_2 = 1001_2 = 9$). Ответы на вопросы должны быть аналитически обоснованы, однако все вычисления и переводы в другие системы счисления можно выполнять программой, не упоминая это в решении.

А) Разрешено узнать за один запрос, какая цифра стоит на конкретном месте в двоичной записи в числе x или y . Какое минимальное количество таких запросов нужно, чтобы однозначно узнать числа x и y ?

Б) Стало известно, что $x - y = 1148$. Чему равны x и y в таком случае?

Ответ:

Под А правильный ответ 5. Действительно, в двоичном виде числа имеют вид 101000100010 и 101100011100. Там, где в первом числе (то есть поразрядной конъюнкции) 1, и в том, и в другом числе будет стоять единица в этом разряде. Если во втором числе стоит ноль в каком-то разряде, то это возможно, только если две единицы или два нуля, по цифре в первом числе это можно определить однозначно. Во втором числе 5 единиц, на этих 5 местах и нужно определить, что за цифры (очевидно, что если мы определим цифру на определённом разряде в x , то мы сможем однозначно определить цифру на этом же разряде в y). Под Б правильный ответ 2730 и 3878. Для этого надо заметить, что в исключающем или у нас собраны все степени двойки, которые входят ровно в одно число, а в конъюнкции те, которые входят в оба числа. Значит, если мы сложим исключающее или с удвоенной конъюнкцией, то получим сумму x и y , это будет 6608. Осталось решить систему из двух уравнений.

Критерии:

За полное без ошибок решение части А 7 баллов, части Б 10 баллов. За незначительные ошибки, такие как лишний учёт одного из запросов, снимается два балла.

Задание 2. Для передачи сообщений по каналу связи используются последовательности из 0, 1 и 2. Так как при передаче сообщений по этому каналу связи возможны помехи, было решено отправлять последовательности длиной, кратной 4, где цифры объединены в блоки по 4 цифры, где в каждом блоке сумма цифр равна 6 (тогда, если сумма цифр не равна 6, значит, в блоке были помехи и его надо переслать). Пример такой последовательности 2202 1221. Какой длины должны быть последовательности, чтобы можно было передать как минимум 10^9 различных последовательностей именно этой длины?

Пример: если передаются 0 и 1 блоками по две цифры, где каждый блок имеет сумму 1, то последовательностей длины 4 будет 4 (10 10, 10 01, 01 10, 01 01).

Ответ:

Чтобы сумма равнялась 6, среди цифр должно быть либо 3 двойки и 1 ноль, либо две двойки и две единицы. Различных блоков первого типа 4, второго типа $4 \cdot 3/2$. Итого 10 вариантов. Так как все блоки не зависят друг от друга, то работает правило умножения и если блоков k , то последовательностей будет 10 в степени k , осталось лишь подобрать его так, чтобы это число было больше или равно 10^9 . Легко понять, что нужно как минимум 9 блоков по 4 цифры в k .

Критерии:

За полностью правильный подсчёт количества различных блоков без правильного перемножения количества вариантов ставится максимум 10 баллов. От двух до пяти баллов снимается за различные ошибки с подсчётом вариантов.

Задание 3. Два игрока играют в следующую игру. На доске написано одно или несколько натуральных чисел. В свой ход игрок может стереть одно число на доске и написать вместо него два натуральных числа, которые в сумме дают стёртое. Например, можно стереть 5 и написать 4 и 1, или 3 и 2. 1 стереть уже не получится. Также запрещено стирать число 20, если оно появится на доске. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какой игрок, первый или второй, победит при правильной игре и какая у него должна быть стратегия в трёх следующих случаях: когда на доске изначально написано число 17, когда на доске написано число 43, когда на доске написано в самом начале два числа, 34 и 47.

Ответ:

1) Заметим, что для всех чисел k , меньших 20, игра не зависит от стратегий игроков, так как каждый ход увеличивает количество чисел на доске на 1, а в конце будет ровно k единиц, и следовательно, будет сделано $k-1$ ход. Потому если изначально написано 17, будет сделано 16 ходов, чётное число, следовательно, выиграет второй игрок.

2) До числа 20 выигрышные и проигрышные позиции чередуются в зависимости от чётности. Нечётные проигрышные, чётные выигрышные. Само по себе число 20 проигрышное, так как с ним нельзя сделать никакого хода. После числа 20 и до 40 если число само по себе чётное и выигрышное, то его надо разбить пополам и выиграть, если же нечётное, то надо разбить его на число 20 плюс нечётное. Так как 43 нечётное, первому игроку надо получить одно число 20, но не дать второму игроку сделать ещё одно 20 (потому ход 20 23 не подойдёт). Выигрышным ходом будет 39 4. Второй игрок тогда, как бы не разбивал 39, обязательно получит либо число 20, либо большее, и первый игрок может тогда получить число 20 на доске. При этом вторую 20 получить уже не получится.

3) Первому игроку надо походить в 34 34 13. 13 проигрышная позиция, так как там чётное число ходов, а в числах 34 можно просто ходить симметрично.

Критерии:

Каждый полностью правильно рассмотренный случай даёт 7 баллов. 2 балла снимается за правильно рассмотренный случай, в котором при этом не учтён какой-то ход противника, не совсем корректно описана стратегия победы. 4 балла за один случай ставится в случае, если приведена важная идея для стратегии, но не полностью описана сама стратегия.

Задание 4. В текстовом файле записана последовательность, состоящая из n натуральных чисел. Вася собирает самую большую подпоследовательность чисел из последовательности натуральных чисел. При этом ему нужно, чтобы все числа в этой подпоследовательности были одной чётности и при этом шли по убыванию в изначальной последовательности. Например, в последовательности 10 19 22 12 6 3 1 он может выбрать 22 12 6 или 19 3 1, обе подпоследовательности максимально возможной длины 3. Напишите программу, которая находит эту максимальную длину. На вход программе подаётся в первой строке число n , затем во второй строке n чисел через пробел. В ответ выведите длину самой большой такой подпоследовательности.

Входные данные: подается число n от 1 до 20000, затем n чисел.

Пример:

Входные данные	Выходные данные
7 10 19 22 12 6 3 1	3
8 1 2 3 4 5 6 7 8	1

Ответ:

```

for nom_test in (1, 2, 3):
    with open(f'test10_1_4_{nom_test}.txt') as f:
        n = int(f.readline())
        ans = []
        arr = list(map(int, f.readline().split()))
        arr_nech = [i for i in arr if i % 2 == 1]
        arr_ch = [i for i in arr if i % 2 == 0]
        dp = [1] * len(arr_nech)
        for i in range(len(arr_nech)):
            mx = 1
            for j in range(i):
                if arr_nech[i] < arr_nech[j]:
                    mx = max(mx, dp[j] + 1)
            dp[i] = mx
        ans.append(max(dp) if len(dp) else 0)
        dp = [1] * len(arr_ch)
        for i in range(len(arr_ch)):
            mx = 1
            for j in range(i):
                if arr_ch[i] < arr_ch[j]:
                    mx = max(mx, dp[j] + 1)
            dp[i] = mx
        ans.append(max(dp) if len(dp) else 0)
    print(max(ans))

```

Идея алгоритма: разбить числа на чётные и нечётные и отдельно для чётных и нечётных чисел с помощью динамического программирования найти наибольшую последовательность.

Ответы на тесты.

Test10_1_4_1.txt: 8

Test10_1_4_2.txt: 50

Test10_1_4_3.txt: 247

Критерии:

За правильный ответ на один тест 7 баллов, на два теста 15 баллов, на три теста 23 балла. 22 балла ставится, если на все тесты ответ отличается на 1 балл.

Задание 5. Игорь хочет купить одноэтажный дом на одной приглянувшейся ему улице. Эта улица имеет длину n , то есть состоит из n одинаковых идущих подряд участков. Игорь не только не любит жить в многоэтажных домах, он даже не любит жить рядом с ними, так как, по его мнению, они загораживают ему свет. Для Игоря многоэтажным домом считается любой дом, где 5 этажей или больше. Необходимо найти ему такой одноэтажный дом, у которого расстояние до ближайшего многоэтажного дома максимально. Для этого необходимо написать программу. Программа должна выдавать номер места, на котором стоит дом и расстояние до ближайшей многоэтажки. Например, если этажи у домов будут 2 1 1 1 3 8 1, то самый подходящий будет второй дом, его расстояние до ближайшей многоэтажки с 8 этажами будет 4. Если таких домов несколько, то надо выбирать дом с наименьшим номером. Гарантируется, что есть хотя бы один дом с 5 этажами или выше.

Учтите, что программа должна выдавать ответы на все тесты за время, не превышающее время олимпиады. Решения за $O(n^2)$ будут оцениваться неполным количеством баллов.

Входные данные: подается натуральное число n от 1 до 6000000, затем n чисел во второй строке, каждое от 1 до 9.

Пример:

Входные данные	Выходные данные
7 2 1 1 1 3 8 1	2 4
10 1 9 1 1 2 1 1 9 2 1	4 2

Ответы:

```
for nom_test in (1, 2, 3):
    with open(f'test10_1_5_{nom_test}.txt') as f:
        n = int(f.readline())
        arr = list(map(int, f.readline().split()))
        minl = [10**7] * n
        minr = [10**7] * n
        for i in range(1, n):
            if arr[i-1] >= 5: minl[i] = 1
            else: minl[i] = minl[i - 1] + 1
        for i in range(n - 2, -1, -1):
            if arr[i+1] >= 5: minr[i] = 1
```

```

        else: minr[i] = minr[i + 1] + 1
    max_dist = [0, 0]
    for i in range(n):
        if max_dist[1] < min(minl[i], minr[i]) and
arr[i] == 1:
        max_dist = [i + 1, min(minl[i], minr[i])]
    print(*max_dist)

```

Ответы на тесты:

Test10_1_5_1.txt: 1 5

Test10_1_5_2.txt: 39994 30002

Test10_1_5_3.txt: 432507 322483

Критерии:

За каждый правильно отвеченный тест 8 баллов.

Информатика. 10 класс

Вариант 2

Задание 1. Натуральные числа x и y удовлетворяют двум следующим уравнениям

$$x \wedge y = 2049$$

$$x \text{ xor } y = 5928$$

Здесь $\wedge$ поразрядная конъюнкция, xor поразрядное исключающее или (например, для чисел $12 \wedge 5 = 1100_2 \wedge 0101_2 = 0100_2 = 4$, $12 \text{ xor } 5 = 1100_2 \text{ xor } 0101_2 = 1001_2 = 9$). Ответы на вопросы должны быть аналитически обоснованы, однако все вычисления и переводы в другие системы счисления можно выполнять программой, не упоминая это в решении.

А) Разрешено узнать за один запрос, какая цифра стоит в двоичной записи на конкретном месте в числе x или y . Какое минимальное количество таких запросов нужно, чтобы однозначно узнать числа x и y ?

Б) Стало известно, что $x - y = 3816$. Чему равны x и y в таком случае?

Ответы:

Под А правильный ответ 6. Действительно, в двоичном виде числа имеют вид 0100000000001 и 1011100101000. Там, где в первом числе (то есть поразрядной конъюнкции) 1, и в том, и в другом числе будет стоять единица в этом разряде. Если во втором числе стоит ноль в каком-то разряде, то это возможно, только если две единицы или два нуля, по цифре в первом числе это можно определить однозначно. Во втором числе 6 единиц, на этих 6 местах и нужно определить, что за цифры (очевидно, что если мы определим цифру на определённом разряде в x , то мы сможем однозначно определить цифру на этом же разряде в y). Под Б правильный ответ 6921 и 3105. Для этого надо заметить, что в исключающем или y нас собраны все степени двойки, которые входят ровно в одно число, а в конъюнкции те, которые входят в оба числа. Значит, если мы сложим исключающее или с удвоенной конъюнкцией, то получим сумму x и y , это будет 10026. Осталось решить систему из двух уравнений.

Критерии:

За полное без ошибок решение части А 7 баллов, части Б 10 баллов. За незначительные ошибки, такие как лишний учёт одного из запросов, снимается два балла.

Задание 2. Для передачи сообщений по каналу связи используются последовательности из 0, 1, 2 и 3. Так как при передаче сообщений по этому каналу связи возможны помехи, было решено отправлять последовательности длиной, кратной 4, где цифры объединены в блоки по 4

цифры, где в каждом блоке сумма цифр равна 10 (тогда, если сумма цифр не равна 10, значит, в блоке были помехи и его надо переслать). Пример такой последовательности 3232 3133. Какой длины должны быть последовательности, чтобы можно было передать как минимум 10^{10} различных последовательностей именно этой длины?

Пример: если передаются 0 и 1 блоками по две цифры, где каждый блок имеет сумму 1, то последовательностей длины 4 будет 4 (10 10, 10 01, 01 10, 01 01).

Ответ:

Чтобы сумма равнялась 10, среди цифр должно быть либо 3 тройки и 1 единица, либо 2 двойки и 2 тройки. Различных блоков первого типа 4, второго типа $4 \cdot 3/2$. Итого 10 вариантов. Так как все блоки не зависят друг от друга, то работает правило умножения и если блоков k , то последовательностей будет 10 в степени k , осталось лишь подобрать его так, чтобы это число было больше или равно 10^{10} . Легко понять, что нужно как минимум 10 блоков по 4 цифры минимум.

Критерии:

За полностью правильный подсчёт количества различных блоков без правильного перемножения количества вариантов ставится максимум 10 баллов. От двух до пяти баллов снимается за различные ошибки с подсчётом вариантов.

Задание 3. Два игрока играют в следующую игру. На доске написано одно или несколько натуральных чисел. В свой ход игрок может стереть одно число на доске и написать вместо него два натуральных числа, которые в сумме дают стёртое. Например, можно стереть 5 и написать 4 и 1, или 3 и 2. 1 стереть уже не получится. Также запрещено стирать число 30, если оно появится на доске. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какой игрок, первый или второй, победит при правильной игре и какая у него должна быть стратегия в трёх следующих случаях: когда на доске изначально написано число 21, когда на доске написано число 61, когда на доске написано в самом начале два числа, 42 и 47.

Ответы:

1)Заметим, что для всех чисел k , меньших 30, игра не зависит от стратегий игроков, так как каждый ход увеличивает количество чисел на доске на 1, а в конце будет ровно k единиц, и следовательно, будет сделано $k-1$ ход. Потому если изначально написано 21, будет сделано 20 ходов, чётное число, следовательно, выиграет второй игрок.

2) До числа 30 выигрышные и проигрышные позиции чередуются в зависимости от чётности. Нечётные проигрышные, чётные выигрышные. Само по себе число 30 проигрышное, так как с ним нельзя сделать никакого хода. После числа 30 и до 60 если число само по себе чётное и выигрышное, то его надо разбить пополам и выиграть, если же нечётное, то надо разбить его на число 30 плюс нечётное. Так как 61 нечётное, первому игроку надо получить одно число 30, но не дать второму игроку сделать ещё одно 30 (поэтому ход 30 31 не подойдёт). Выигрышным ходом будет 59 2. Второй игрок тогда, как бы не разбивал 59, обязательно получит либо число 30, либо большее, и первый игрок может тогда получить число 30 на доске. При этом вторую 30 получить уже не получится.

3) Первому игроку надо походить в 42 42 5. 5 проигрышная позиция, так как там чётное число ходов, а в числах 42 можно просто ходить симметрично.

Критерии:

Каждый полностью правильно рассмотренный случай даёт 7 баллов. 2 балла снимается за правильно рассмотренный случай, в котором при этом не учтён какой-то ход противника, не совсем корректно описана стратегия победы. 4 балла за один случай ставится в случае, если приведена важная идея для стратегии, но не полностью описана сама стратегия.

Задание 4. В текстовом файле записана последовательность, состоящая из n натуральных чисел. Вася собирает самую большую подпоследовательность чисел из последовательности натуральных чисел. При этом ему нужно, чтобы все числа в этой подпоследовательности имели одинаковый остаток при делении на 3 и при этом шли по убыванию в исходной последовательности. Например, в последовательности 10 19 21 13 6 3 1 он может выбрать 21 6 3 или 19 13 1, обе подпоследовательности максимально возможной длины 3. Напишите программу, которая находит эту максимальную длину. На вход программе подаётся в первой строке число n , затем во второй строке n чисел через пробел. В ответ выведите длину самой большой такой подпоследовательности.

Входные данные: подается число n от 1 до 20000, затем n чисел.

Пример:

Входные данные	Выходные данные
7 10 19 21 13 6 3 1	3
8	1

1 2 3 4 5 6 7 8	
-----------------	--

Ответ:

```
for nom_test in (1, 2, 3):
    with open(f'test10_1_4_{nom_test}.txt') as f:
        n = int(f.readline())
        arr = list(map(int, f.readline().split()))
        arr_nech = [i for i in arr if i % 3 == 1]
        arr_ch = [i for i in arr if i % 3 == 0]
        dp = [1] * len(arr_nech)
        for i in range(len(arr_nech)):
            mx = 1
            for j in range(i):
                if arr_nech[i] < arr_nech[j]:
                    mx = max(mx, dp[j] + 1)
            dp[i] = mx
        print(max(dp) if len(dp) else 0)
        dp = [1] * len(arr_ch)
        for i in range(len(arr_ch)):
            mx = 1
            for j in range(i):
                if arr_ch[i] < arr_ch[j]:
                    mx = max(mx, dp[j] + 1)
            dp[i] = mx
        print(max(dp) if len(dp) else 0)
        arr_ch = [i for i in arr if i % 3 == 2]
        dp = [1] * len(arr_ch)
        for i in range(len(arr_ch)):
            mx = 1
            for j in range(i):
                if arr_ch[i] < arr_ch[j]:
                    mx = max(mx, dp[j] + 1)
            dp[i] = mx
        print(max(dp) if len(dp) else 0)
```

Ответы на тесты.

Test10_2_4_1.txt: 9

Test10_2_4_2.txt: 39

Test10_2_4_3.txt: 205

Критерии:

За правильный ответ на один тест 7 баллов, на два теста 15 баллов, на три теста 23 балла. 22 балла ставится, если на все тесты ответ отличается на 1 балл.

Задание 5. Игорь хочет купить одноэтажный дом на одной приглянувшейся ему улице. Эта улица имеет длину n , то есть состоит из n одинаковых идущих подряд участков. Игорь не только не любит жить в многоэтажных домах, он даже не любит жить рядом с ними, так как, по его мнению, они загораживают ему свет. Для Игоря многоэтажным домом считается любой дом, где 6 этажей или больше. Необходимо найти ему такой одноэтажный дом, у которого расстояние до ближайшего многоэтажного дома максимально. Для этого необходимо написать программу. Программа должна выдавать номер места, на котором стоит дом и расстояние до ближайшей многоэтажки. Например, если этажи у домов будут 2 1 1 1 3 8 1, то самый подходящий будет второй дом, его расстояние до ближайшей многоэтажки с 8 этажами будет 4. Если таких домов несколько, то надо выбирать дом с наименьшим номером. Гарантируется, что есть хотя бы один дом с 6 этажами или выше.

Учтите, что программа должна выдавать ответы на все тесты за время, не превышающее время олимпиады. Решения за $O(n^2)$ будут оцениваться неполным количеством баллов.

Входные данные: подается натуральное число n от 1 до 6000000, затем n чисел во второй строке, каждое от 1 до 9.

Пример:

Входные данные	Выходные данные
7 2 1 1 1 3 8 1	2 4
10 1 9 1 1 2 1 1 9 2 1	4 2

Ответ:

```
for nom_test in (1, 2, 3):
    with open(f'test10_1_5_{nom_test}.txt') as f:
        n = int(f.readline())
        arr = list(map(int, f.readline().split()))
        minl = [10**7] * n
        minr = [10**7] * n
        for i in range(1, n):
            if arr[i-1] >= 6: minl[i] = 1
            else: minl[i] = minl[i - 1] + 1
        for i in range(n - 2, -1, -1):
            if arr[i+1] >= 6: minr[i] = 1
            else: minr[i] = minr[i + 1] + 1
        max_dist = [0, 0]
        for i in range(n):
```

```

        if max_dist[1] < min(minl[i], minr[i]) and
arr[i] == 1:
            max_dist = [i + 1, min(minl[i], minr[i])]
    print(*max_dist)

```

Ответы на тесты:

Test10_2_5_1.txt: 1 10

Test10_2_5_2.txt: 39994 30003

Test10_2_5_3.txt: 432507 322483

Критерии:

За каждый правильно отвеченный тест 8 баллов.

Информатика. 10 класс

Вариант 3

Задание 1. Натуральные числа x и y , такие, что $x > y$, удовлетворяют двум следующим уравнениям

$$x \wedge y = 2594$$

$$x \text{ xor } y = 1420$$

Здесь $\wedge$ поразрядная конъюнкция, xor поразрядное исключающее или (например, для чисел $12 \wedge 5 = 1100_2 \wedge 0101_2 = 0100_2 = 4$, $12 \text{ xor } 5 = 1100_2 \text{ xor } 0101_2 = 1001_2 = 9$). Ответы на вопросы должны быть аналитически обоснованы, однако все вычисления и переводы в другие системы счисления можно выполнять программой, не упоминая это в решении.

А) Разрешено узнать за один запрос, какая цифра стоит в двоичной записи на конкретном месте в числе x или y . Какое минимальное количество таких запросов нужно, чтобы однозначно узнать числа x и y ?

Б) Стало известно, что $x - y = 908$. Чему равны x и y в таком случае?

Ответ:

Под А правильный ответ 4. Действительно, в двоичном виде числа имеют вид 101000100010 и 10110001100. Там, где в первом числе (то есть поразрядной конъюнкции) 1, и в том, и в другом числе будет стоять единица в этом разряде. Если во втором числе стоит ноль в каком-то разряде, то это возможно, только если две единицы или два нуля, по цифре в первом числе это можно определить однозначно. Во втором числе 5 единиц, на правых 4 местах и нужно определить, что за цифры (очевидно, что если мы определим цифру на определённом разряде в x , то мы сможем однозначно определить цифру на этом же разряде в y). Под самой левой единицей цифру определять не надо, так как нам и так известно, что x больше y и поэтому в x там будет 1,

а в у ноль. Под Б правильный ответ 3758 и 2850. Для этого надо заметить, что в исключающем или у нас собраны все степени двойки, которые входят ровно в одно число, а в конъюнкции те, которые входят в оба числа. Значит, если мы сложим исключающее или с удвоенной конъюнкцией, то получим сумму x и y, это будет 6608. Осталось решить систему из двух уравнений.

Критерии:

За полное без ошибок решение части А 7 баллов, части Б 10 баллов. За незначительные ошибки, такие как лишний учёт одного из запросов, снимается два балла.

Задание 2. Для передачи сообщений по каналу связи используются последовательности из 0, 1, 2 и 3. Так как при передаче сообщений по этому каналу связи возможны помехи, было решено отправлять последовательности длиной, кратной 4, где цифры объединены в блоки по 4 цифры, где в каждом блоке сумма цифр равна 3 (тогда, если сумма цифр не равна 3, значит, в блоке были помехи и его надо переслать). Пример такой последовательности 1011 1020 3000. Какой длины должны быть последовательности, чтобы можно было передать как минимум 10^{14} различных последовательностей именно этой длины?

Пример: если передаются 0 и 1 блоками по две цифры, где каждый блок имеет сумму 1, то последовательностей длины 4 будет 4 (10 10, 10 01, 01 10, 01 01).

Ответ:

Чтобы сумма равнялась 3, среди цифр должно быть либо 1 тройка и 3 нуля, либо 3 единицы и 1 ноль, либо 1 единица, 1 двойка и два нуля. Различных блоков первого типа 4, второго типа 4, третьего типа $4 \cdot 3$. Итого 20 вариантов. Так как все блоки не зависят друг от друга, то работает правило умножения и если блоков k, то последовательностей будет 20^k в степени k, осталось лишь подобрать его так, чтобы это число было больше 10^{14} . Легко понять, что $20^{10} = 1024 \cdot 10^{10} < 10^{14} < 20^{11}$. Следовательно, последовательности должны быть минимум из 11 блоков по 4 цифр, то есть минимум из 44 цифр.

Критерии:

За полностью правильный подсчёт количества различных блоков без правильного перемножения количества вариантов ставится максимум 10 баллов. От двух до пяти баллов снимается за различные ошибки с подсчётом вариантов.

Задание 3. Два игрока играют в следующую игру. На доске написано одно или несколько натуральных чисел. В свой ход игрок может стереть одно число на доске и написать вместо него два натуральных числа, которые в сумме дают стёртое. Например, можно стереть 5 и написать 4 и 1, или 3 и 2. 1 стереть уже не получится. Также запрещено стирать число 40, если оно появится на доске. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какой игрок, первый или второй, победит при правильной игре и какая у него должна быть стратегия в трёх следующих случаях: когда на доске изначально написано число 27, когда на доске написано число 81, когда на доске написано в самом начале два числа, 55 и 68.

Ответ:

1) Заметим, что для всех чисел k , меньших 40, игра не зависит от стратегий игроков, так как каждый ход увеличивает количество чисел на доске на 1, а в конце будет ровно k единиц, и следовательно, будет сделано $k-1$ ход. Потому если изначально написано 27, будет сделано 26 ходов, чётное число, следовательно, выиграет второй игрок.

2) До числа 40 выигрышные и проигрышные позиции чередуются в зависимости от чётности. Нечётные проигрышные, чётные выигрышные. Само по себе число 40 проигрышное, так как с ним нельзя сделать никакого хода. После числа 40 и до 80 если число само по себе чётное и выигрышное, то его надо разбить пополам и выиграть, если же нечётное, то надо разбить его на число 40 плюс нечётное. Так как 81 нечётное, первому игроку надо получить одно число 40, но не дать второму игроку сделать ещё одно 40 (поэтому ход 40 41 не подойдёт). Выигрышным ходом будет 79 2. Второй игрок тогда, как бы не разбивал 79, обязательно получит либо число 40, либо большее, и первый игрок может тогда получить число 40 на доске. При этом вторую 40 получить уже не получится.

3) Первому игроку надо походить в 55 55 13. 13 проигрышная позиция, так как там чётное число ходов, а в числах 55 можно просто ходить симметрично.

Критерии:

Каждый полностью правильно рассмотренный случай даёт 7 баллов. 2 балла снимается за правильно рассмотренный случай, в котором при этом не учтён какой-то ход противника, не совсем корректно описана стратегия победы. 4 балла за один случай ставится в случае, если приведена важная идея для стратегии, но не полностью описана сама стратегия.

Задание 4. В текстовом файле записана последовательность, состоящая из n натуральных чисел. Вася собирает самую большую подпоследовательность чисел из последовательности натуральных чисел.

При этом ему нужно, чтобы все числа в этой подпоследовательности были одной чётности и при этом шли по убыванию в исходной последовательности. Например, в последовательности 10 19 22 12 6 3 1 он может выбрать 22 12 6 или 19 3 1, обе подпоследовательности максимально возможной длины 3. Напишите программу, которая находит эту максимальную длину. На вход программе подаётся в первой строке число n, затем во второй строке n чисел через пробел. В ответ выведите длину самой большой такой подпоследовательности.

Входные данные: подается число n от 1 до 20000, затем n чисел.

Пример:

Входные данные	Выходные данные
7 10 19 22 12 6 3 1	3
8 1 2 3 4 5 6 7 8	1

Ответ:

```
for nom_test in (1, 2, 3):
    with open(f'test10_1_4_{nom_test}.txt') as f:
        n = int(f.readline())
        arr = list(map(int, f.readline().split()))
        arr_nech = [i for i in arr if i % 3 == 1]
        arr_ch = [i for i in arr if i % 3 == 0]
        dp = [1] * len(arr_nech)
        for i in range(len(arr_nech)):
            mx = 1
            for j in range(i):
                if arr_nech[i] < arr_nech[j]:
                    mx = max(mx, dp[j] + 1)
            dp[i] = mx
        print(max(dp) if len(dp) else 0)
        dp = [1] * len(arr_ch)
        for i in range(len(arr_ch)):
            mx = 1
            for j in range(i):
                if arr_ch[i] < arr_ch[j]:
                    mx = max(mx, dp[j] + 1)
            dp[i] = mx
        print(max(dp) if len(dp) else 0)
        arr_ch = [i for i in arr if i % 3 == 2]
        dp = [1] * len(arr_ch)
        for i in range(len(arr_ch)):
            mx = 1
            for j in range(i):
                if arr_ch[i] < arr_ch[j]:
                    mx = max(mx, dp[j] + 1)
            dp[i] = mx
```

```
print(max(dp) if len(dp) else 0)
```

Ответы на тесты.

Test10_3_4_1.txt: 8

Test10_3_4_2.txt: 50

Test10_3_4_3.txt: 247

Критерии:

За правильный ответ на один тест 7 баллов, на два теста 15 баллов, на три теста 23 балла. 22 балла ставится, если на все тесты ответ отличается на 1 балл.

Задание 5. Игорь хочет купить одноэтажный дом на одной приглянувшейся ему улице. Эта улица имеет длину n , то есть состоит из n одинаковых идущих подряд участков. Игорь не только не любит жить в многоэтажных домах, он даже не любит жить рядом с ними, так как, по его мнению, они загораживают ему свет. Для Игоря многоэтажным домом считается любой дом, где 4 этажа или больше. Необходимо найти ему такой одноэтажный дом, у которого расстояние до ближайшего многоэтажного дома максимально. Для этого необходимо написать программу. Программа должна выдавать номер места, на котором стоит дом и расстояние до ближайшей многоэтажки. Например, если этажи у домов будут 2 1 1 1 3 8 1, то самый подходящий будет второй дом, его расстояние до ближайшей многоэтажки с 8 этажами будет 4. Если таких домов несколько, то надо выбирать дом с наименьшим номером. Гарантируется, что есть хотя бы один дом с 4 этажами или выше.

Учтите, что программа должна выдавать ответы на все тесты за время, не превышающее время олимпиады. Решения за $O(n^2)$ будут оцениваться неполным количеством баллов.

Входные данные: подается натуральное число n от 1 до 6000000, затем n чисел во второй строке, каждое от 1 до 9.

Пример:

Входные данные	Выходные данные
7 2 1 1 1 3 8 1	2 4
10 1 9 1 1 2 1 1 9 2 1	4 2

Ответ:

```
for nom_test in (1, 2, 3):
    with open(f'test10_1_5_{nom_test}.txt') as f:
        n = int(f.readline())
        arr = list(map(int, f.readline().split()))
        minl = [10**7] * n
        minr = [10**7] * n
        for i in range(1, n):
            if arr[i-1] >= 4: minl[i] = 1
            else: minl[i] = minl[i - 1] + 1
        for i in range(n - 2, -1, -1):
            if arr[i+1] >= 4: minr[i] = 1
            else: minr[i] = minr[i + 1] + 1
        max_dist = [0, 0]
        for i in range(n):
            if max_dist[1] < min(minl[i], minr[i]) and
arr[i] == 1:
                max_dist = [i + 1, min(minl[i], minr[i])]
        print(*max_dist)
```

Ответы на тесты:

Test10_3_5_1.txt: 1 4

Test10_3_5_2.txt: 40004 30000

Test10_3_5_3.txt: 432507 322483

Критерии:

За каждый правильно отвеченный тест 8 баллов.

Информатика. 10 класс

Вариант 4

Задание 1. Натуральные числа x и y , такие что $x > y$, удовлетворяют двум следующим уравнениям

$$x \wedge y = 327$$

$$x \text{ xor } y = 3720$$

Здесь $\wedge$ поразрядная конъюнкция, xor поразрядное исключающее или (например, для чисел $12 \wedge 5 = 1100_2 \wedge 0101_2 = 0100_2 = 4$, $12 \text{ xor } 5 = 1100_2 \text{ xor } 0101_2 = 1001_2 = 9$). Ответы на вопросы должны быть аналитически обоснованы, однако все вычисления и переводы в другие системы счисления можно выполнять программой, не упоминая это в решении.

А) Разрешено узнать за один запрос, какая цифра стоит в двоичной записи на конкретном месте в числе x или y . Какое минимальное количество таких запросов нужно, чтобы однозначно узнать числа x и y ?

Б) Стало известно, что $x - y = 1400$. Чему равны x и y в таком случае?

Ответ:

Под А правильный ответ 4. Действительно, в двоичном виде числа имеют вид 000101000111 и 111010001000. Там, где в первом числе (то есть поразрядной конъюнкции) 1, и в том, и в другом числе будет стоять единица в этом разряде. Если во втором числе стоит ноль в каком-то разряде, то это возможно, только если две единицы или два нуля, по цифре в первом числе это можно определить однозначно. Во втором числе 5 единиц, из этих 5 мест на левых 4 и нужно определить, что за цифры (очевидно, что если мы определим цифру на определённом разряде в x , то мы сможем однозначно определить цифру на этом же разряде в y). На самом первом очевидно, что раз x больше, то и 1 стоит в x , а в y на этом месте ноль. Под Б правильный ответ 2887 и 1487. Для этого надо заметить, что в исключающем или у нас собраны все степени двойки, которые входят ровно в одно число, а в конъюнкции те, которые входят в оба числа. Значит, если мы сложим исключающее или с удвоенной конъюнкцией, то получим сумму x и y , это будет 4374. Осталось решить систему из двух уравнений.

Критерии:

За полное без ошибок решение части А 7 баллов, части Б 10 баллов. За незначительные ошибки, такие как лишний учёт одного из запросов, снимается два балла.

Задание 2. Для передачи сообщений по каналу связи используются последовательности из 0, 2 и 3 (без единицы). Так как при передаче

сообщений по этому каналу связи возможны помехи, было решено отправлять последовательности длиной, кратной 5, где цифры объединены в блоки по 5 цифр, где в каждом блоке сумма цифр равна 9 (тогда, если сумма цифр не равна 9, значит, в блоке были помехи и его надо переслать). Пример такой последовательности 33003 23022. Какой длины должны быть последовательности, чтобы можно было передать как минимум 10^8 различных последовательностей именно этой длины?

Пример: если передаются 0 и 1 блоками по две цифры, где каждый блок имеет сумму 1, то последовательностей длины 4 будет 4 (10 10, 10 01, 01 10, 01 01).

Ответ:

Чтобы сумма равнялась 9, среди цифр должно быть либо 3 тройки и 2 нуля, либо 3 двойки, 1 тройка и 1 ноль. Различных блоков первого типа $5 \cdot 4/2$, второго типа $5 \cdot 4$. Итого 30 вариантов. Так как все блоки не зависят друг от друга, то работает правило умножения и если блоков k , то последовательностей будет 30 в степени k , осталось лишь подобрать его так, чтобы это число было больше 10^8 . Легко понять, что $30^5 = 243 \cdot 10^5 < 10^8 < 30^6$. Следовательно, последовательности должны быть минимум из 6 блоков по 5 цифр, то есть минимум из 30 цифр.

Критерии:

За полностью правильный подсчёт количества различных блоков без правильного перемножения количества вариантов ставится максимум 10 баллов. От двух до пяти баллов снимается за различные ошибки с подсчётом вариантов.

Задание 3. Два игрока играют в следующую игру. На доске написано одно или несколько натуральных чисел. В свой ход игрок может стереть одно число на доске и написать вместо него два натуральных числа, которые в сумме дают стёртое. Например, можно стереть 5 и написать 4 и 1, или 3 и 2. 1 стереть уже не получится. Также запрещено стирать число и писать вместо него два одинаковых числа, например вместо 6 нельзя писать 3 и 3. Так как 2 можно представить только как 1 и 1, её стирать тоже нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какой игрок, первый или второй, победит при правильной игре и какая у него должна быть стратегия в трёх следующих случаях: когда на доске изначально написано число 10, когда на доске изначально написаны числа 30 и 34, когда на доске написано в самом начале два числа, 17 и 7.

Ответ:

1) Заметим, что если мы разбиваем игру на две позиции и они обе проигрышные, то сама позиция тоже проигрышная. Если же одна позиция проигрышная, а вторая выигрышная, то позиция будет выигрышной (первому игроку достаточно в выигрышной позиции сделать ход в проигрышную). Посмотрим от обратного, какие позиции будут выигрышны или проигрышны для чисел, меньших 10. 1 и 2 проигрышные позиции, так как в них нельзя сделать ход, 3 выигрышная, так как в ней можно сделать ход 1 2 и закончить игру. 4 проигрышная, в ней можно сделать только 3 1, после чего оппонент выигрывает. 5 и 6 следовательно выигрышные, так можно походить в проигрышные позиции 4 1 или 4 2. Из 7 ходы все ходы ведут в выигрышные позиции 4 3, 5 2 и 6 1, потому 7 проигрышная. 8 и 9 выигрышные (есть ход в 7 1 или 7 2). Из 10 есть ходы в 1 9, 2 8, 3 7, 4 6. Везде здесь есть проигрышная и выигрышная позиция, следовательно, сама по себе 10 проигрышная.

2) Здесь первому игроку надо сделать ход 30 30 4. В первых двух числах он должен просто ходить симметрично, а с 4 можно сделать ровно два хода.

3) Первому игроку надо походить в 10 7 7. 10 проигрышная позиция, поэтому если второй игрок сделает что-то с ним, то первый может снова завести его в проигрышную позицию, а в числах 7 можно просто ходить симметрично.

Критерии:

Каждый полностью правильно рассмотренный случай даёт 7 баллов. 2 балла снимается за правильно рассмотренный случай, в котором при этом не учтён какой-то ход противника, не совсем корректно описана стратегия победы. 4 балла за один случай ставится в случае, если приведена важная идея для стратегии, но не полностью описана сама стратегия.

Задание 4. В текстовом файле записана последовательность, состоящая из n натуральных чисел. Вася собирает самую большую быстро падающую подпоследовательность чисел из последовательности натуральных чисел. Быстро падающей последовательностью Вася считает, в которой каждый следующий член меньше предыдущего хотя бы на 3 (то есть для любого $i > 1$, $a_i + 2 < a_{i-1}$). Например, в последовательности 18 19 16 5 14 10 он может выбрать 18 14 10 или 19 16 5, обе подпоследовательности максимально возможной длины 3. Напишите программу, которая находит эту максимальную длину. На вход программе подаётся в первой строке число n , затем во второй строке n чисел через пробел. В ответ выведите длину самой большой такой подпоследовательности.

Входные данные: подается число n от 1 до 20000, затем n чисел.

Пример:

Входные данные	Выходные данные
6 18 19 16 5 14 10	3
8 1 2 3 4 5 6 7 8	1

Ответ:

```
for nom_test in (1, 2, 3):
    with open(f'test10_1_4_{nom_test}.txt') as f:
        n = int(f.readline())
        arr = list(map(int, f.readline().split()))
        dp = [1] * n
        for i in range(n):
            mx = 1
            for j in range(i):
                if arr[i] + 2 < arr[j]:
                    mx = max(mx, dp[j] + 1)
            dp[i] = mx
        print(max(dp))
```

Ответы на тесты.

Test10_4_4_1.txt: 13

Test10_4_4_2.txt: 68

Test10_4_4_3.txt: 360

Критерии:

За правильный ответ на один тест 7 баллов, на два теста 15 баллов, на три теста 23 балла. 22 балла ставится, если на все тесты ответ отличается на 1 балл.

Задание 5. Игорь хочет купить одноэтажный дом на одной приглянувшейся ему улице. Эта улица имеет длину n , то есть состоит из n одинаковых идущих подряд участков. Игорь не только не любит жить в многоэтажных домах, он даже не любит жить рядом с ними, так как, по его мнению, они загораживают ему свет. Для Игоря многоэтажным домом считается любой дом, где 5 этажей или больше. Необходимо найти ему такой одноэтажный дом, у которого расстояние до ближайшего многоэтажного дома максимально. Кроме того, его ближайшие соседи (левый и правый дом, если они есть), должны быть не более 2 этажей в высоту. Гарантируется, что хотя бы один такой дом, подходящий под условия Игоря, есть. Для решения необходимо написать программу. Программа должна выдавать номер места, на котором стоит дом и расстояние до ближайшей многоэтажки. Например, если этажи у домов будут 2 1 1 1 3 8 1, то самый подходящий будет второй

дом, его расстояние до ближайшей многоэтажки с 8 этажами будет 4. Если таких домов несколько, то надо выбирать дом с наименьшим номером.

Учтите, что программа должна выдавать ответы на все тесты за время, не превышающее время олимпиады. Решения за $O(n^2)$ будут оцениваться неполным количеством баллов.

Входные данные: подается число n от 1 до 6000000, затем n чисел от 1 до 9 во второй строке.

Пример:

Входные данные	Выходные данные
7 2 1 1 1 3 8 1	2 4
10 1 9 1 1 2 1 1 9 2 1	4 2

Ответ:

```
for nom_test in (3, 3):
    with open(f'test10_1_5_{nom_test}.txt') as f:
        n = int(f.readline())
        arr = list(map(int, f.readline().split()))
        minl = [10**7] * n
        minr = [10**7] * n
        for i in range(1, n):
            if arr[i-1] >= 5: minl[i] = 1
            else: minl[i] = minl[i - 1] + 1
        for i in range(n - 2, -1, -1):
            if arr[i+1] >= 5: minr[i] = 1
            else: minr[i] = minr[i + 1] + 1
        max_dist = [0, 0]
        if max_dist[1] < min(minl[0], minr[0]) and arr[0] ==
1 and arr[1]<3:
            max_dist = [1, min(minl[0], minr[0])]
        for i in range(1, n - 1):
            if max_dist[1] < min(minl[i], minr[i]) and
arr[i] == 1 and arr[i-1]<3 and arr[i+1]<3:
                max_dist = [i + 1, min(minl[i], minr[i])]
            if max_dist[1] < min(minl[-1], minr[-1]) and arr[-1]
== 1 and arr[-2]<3:
                max_dist = [n, min(minl[-1], minr[-1])]
        print(*max_dist)
```

Ответы на тесты:

Test10_4_5_1.txt: 1 5

Test10_4_5_2.txt: 40006 29998

Test10_4_5_3.txt: 432507 322483

Критерии:

За каждый правильно отвеченный тест 8 баллов.