Решения XLVI Турнира имени М. В. Ломоносова

Физика, 2023-2024

1. Две доски шириной по 10 см имеют, очевидно, такую же прочность на излом, как одна доска шириной 20 см (доски имеют одинаковую толщину). Однако при переходе по этим двум доскам Пете придется одной ногой наступать на одну доску, а другой – на другую (идти только по одной доске в такой ситуации довольно глупо). А значит, в те моменты, когда Петя будет делать очередной шаг, одна из его ног будет двигаться в воздухе, и весь его вес будет приходиться на другую ногу, то есть на одну узкую доску. Прочность такой доски вдвое меньше, чем широкой, поэтому вероятность того, что она сломается под весом Пети, гораздо выше. Переноса веса на одну доску можно избежать, если при каждом шаге ставить ногу так, чтобы она опиралась на обе доски. Но для этого доски должны лежать вплотную друг к другу. Если же между ними несколько сантиметров, наступать сразу на обе не получится. Поэтому для перехода Пете нужно использовать доску шириной 20 см.

2. Естественный (белый) свет представляет собой смесь световых потоков всех цветов радуги. Бесцветная прозрачная жидкость выглядит такой потому, что пропускает все эти световые потоки без изменений. Если падающий на такую жидкость свет был белым, то пройдя сквозь нее он таким и останется. Красная жидкость пропускает только красный свет, а все остальные поглощает (или ослабляет намного сильнее, чем красный). Аналогично, синяя жидкость пропускает только синий свет, а остальные цвета сильно ослабляет. Когда мы смотрим на баночку с красной жидкостью, помещенную в сосуд с синей жидкостью, свет, приходящий к нашему глазу, вынужден пройти и через одну, и через другую жидкость. Но поскольку одна из них пропускает только красный, а другая только синий, их комбинация не пропустит никакого света вообще. Баночка, в первом приближении, будет выглядеть черной. Более точно, она будет очень темной, но определенная окраска у нее скорее всего будет – из-за того, что каждая жидкость другие цвета все же немного пропускает. Какую именно окраску даст смесь этих сильно ослабленных потоков света, предсказать трудно – она зависит от оптических свойств данных жидкостей.

3. Чем меньше масса тела (его инертность), тем быстрее оно будет разгоняться под действием данной силы. В первом случае (*а*) сила тяжести, действующая на груз, разгоняет систему, состоящую из тележки и груза. Во втором случае (*б*) точно такая же сила разгоняет только тележку. Масса этой системы меньше, поэтому во втором случае тележка будет разгоняться быстрее.

4. а) Пусть масло налито слоем толщины x и его поверхность еще не доходит до верха шайбы (часть шайбы выступает над поверхностью масла, как на рисунке к задаче). Обозначим площадь основания шайбы через S. Тогда действующая на нее сила тяжести равна:

$$mg = \rho Shg.$$

Сила Архимеда, действующая на шайбу, равна суммарному весу вытесненных шайбой воды и масла:

$$F_A = \rho_1 Sdg + \rho_2 Sxg.$$

В равновесии эти силы должны быть равны. Отсюда получаем:

$$\rho Shg = \rho_1 Sdg + \rho_2 Sxg$$

$$d = \frac{\rho h - \rho_2 x}{\rho_1}.$$

Отсюда видно, что в самом начале (при $x = 0$) шайба погружена в воду на глубину $d_0 = (\rho/\rho_1)h$. Затем, по мере доливания масла, глубина погружения уменьшается. Это будет происходить до тех пор, пока при некоторой толщине слоя масла x_1 поверхность масла не дойдет до верха шайбы. Сумма x и d при этом сравняется с h. Записав это условие, находим из него x_1:

$$x_1 + d = h$$

$$x_1 + \frac{\rho h - \rho_2 x_1}{\rho_1} = h$$

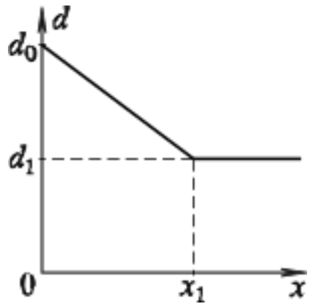
$$x_1 = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2} h.$$

Глубина погружения при этом станет равна

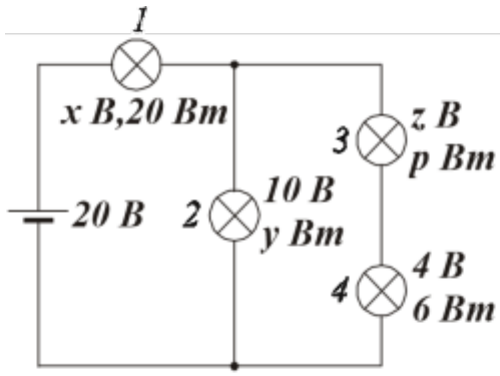
$$d_1 = h - x_1 = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} h.$$

При дальнейшем доливании масла оно полностью закроет шайбу. Вес вытесненного масла перестанет меняться, а значит, перестанет изменяться и глубина погружения в воду. Поэтому при $x > x_1$ глубина погружения d будет оставаться равной d_1.

б) График зависимости $d(x)$ показан на рисунке. Значения координат существенных точек d_0, d_1 и x_1 вычислены в пункте а).



5. Пронумеруем лампочки так, как показано на рисунке. Если все они горят нормальным накалом, значит, на каждой из лампочек в этой цепи падает ее нормальное рабочее напряжение и она потребляет написанную на ней мощность. Сумма напряжений на первой и второй лампочке должна быть равна напряжению источника. Значит, рабочее напряжение первой лампочки равно



$$x = 20\text{ В} - 10\text{ В} = 10\text{ В}.$$

Мощность, потребляемая элементом электрической цепи, равна произведению напряжения на силу тока. Значит, ток через лампочку 1 равен

$$I_1 = \frac{20\text{ Вт}}{10\text{ В}} = 2\text{ А},$$

а ток через лампочку 4 (он же течет и через лампочку 3) равен

$$I_3 = \frac{6\text{ Вт}}{4\text{ В}} = 1{,}5\text{ А}.$$

Ток через лампу 2 равен, очевидно, разности I_1 и I_3:

$$I_2 = I_1 - I_3 = 2\text{ А} - 1{,}5\text{ А} = 0{,}5\text{ А}.$$

Тогда мощность этой лампочки равна

$$y = 10\text{ В} \times 0{,}5\text{А} = 5\text{ Вт}.$$

Сумма напряжений на лампах 3 и 4 равна напряжению на лампе 2. Значит, напряжение на лампе 3 равно

$$z = 10\text{ В} - 4\text{В} = 6\text{ В}.$$

Мощность лампы 3 равна произведению ее напряжения на ток I_3:

$$p = 6\text{ В} \times 1{,}5\text{ А} = 9\text{ Вт}.$$

6. а) Ответ 1) не может быть верным просто по размерности. В любой правильной физической формуле размерности правой и левой частей должны быть одинаковы. В левой части приведенных

формул стоят величины размерности длины (м), а правой части – размерности длины, деленной на скорость, то есть времени (с).

Ответ 2) не удовлетворяет частному случаю $v_1 = v_2$. В этом случае из симметрии очевидно, что разворот всех спортсменов происходит в одной и той же точке. Тогда, поскольку спортсмены прибегают к этой точке и убегают от нее с одной и той же скоростью, каждая колонна разворачивается без изменения длины. То есть в этом случае правильный ответ должен давать $l_1 = l_2 = l$. Легко видеть, что приведенные формулы при $v_1 = v_2$ дают $l_1 = l_2 = l/2$.

Ответ 3) не удовлетворяет следующему соображению симметрии. Если мы поменяем местами скорости спортсменов (у первой колонны сделаем скорость v_2, а у второй v_1), то длины колонн после разворота тоже должны поменяться местами – первая колонна станет второй, а вторая первой. Отсюда следует, что правильные ответы должны обладать следующим свойством: если в них все v_1 заменить на v_2, а v_2 на v_1, то они тоже поменяются местами – та формула, которая давала l_1, будет давать l_2, а та, которая давала l_2, будет давать l_1. Легко видеть, что формулы ответа 3) не обладают таким свойством.

б) Чтобы решить задачу, перейдем в систему отсчета, движущуюся относительно земли со скоростью $u = (1/2)(v_1 - v_2)$ в ту же сторону, куда направлена скорость v_1. В этой системе отсчета первая колонна до разворота имеет скорость

$$v_1 - u = \frac{v_1 + v_2}{2} = v_0.$$

Вторая колонна движется ей навстречу со скоростью

$$v_2 + u = \frac{v_1 + v_2}{2} = v_0.$$

Как видим, выбранная нами система отсчета обладает следующим свойством: колонны до разворота движутся в ней с одной и той же по модулю скоростью (мы обозначили эту скорость v_0). Но тогда, как уже обсуждалось в пункте а), разворот всех спортсменов в этой с.о. происходит в одной и той же точке. Тогда новая длина каждой колонны будет равна скорости ее спортсменов после разворота, умноженной на время разворота (время между разворотом первого спортсмена и разворотом последнего). Скорость первой колонны после разворота в этой с.о. равна

$$v'_1 = v_1 + u = \frac{3v_1 - v_2}{2},$$

скорость второй

$$v'_2 = v_2 - u = \frac{3v_2 - v_1}{2}.$$

Время разворота равно

$$\tau = \frac{l}{v_0} = \frac{2l}{v_1 + v_2}.$$

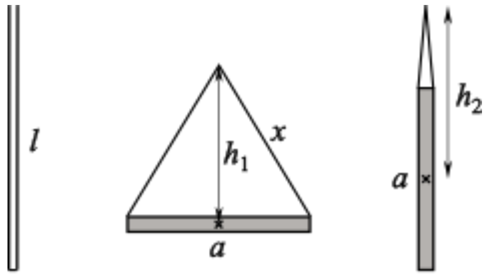
Тогда длины колонн после разворота

$$l_1 = v'_1 \tau = \frac{3v_1 - v_2}{v_1 + v_2} l$$

$$l_2 = v'_2 \tau = \frac{3v_2 - v_1}{v_1 + v_2} l.$$

Легко проверить, что эти ответы удовлетворяют всем обсуждавшимся в пункте а) требованиям.

7. а) Найдем расстояние между верхом ручек пакета (где мы его держим рукой) и центром тяжести коробки для двух положений коробки – горизонтального и вертикального. Пусть длина пакета (пустого) вместе с ручками равна l (рис. 1), ширина коробки равна a, высоту коробки будем считать пренебрежимо малой. Если коробка расположена горизонтально (рис. 2), то длина не касающихся ее частей пакета равна



1 2 3

$$x = l - \frac{a}{2}.$$

(Высотой коробки мы пренебрегаем). Значит, расстояние между нашей рукой и центром тяжести коробки в этом случае равно

$$h_1 = \sqrt{x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{l^2 + la}.$$

Если же коробка расположена вертикально (рис. 3), то аналогичное расстояние равно

$$h_2 = l - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(l - \frac{a}{2}\right)^2}.$$

Мы представили эту величину в виде квадратного корня, чтобы ее можно было сравнить с h_1. Сразу видно, что подкоренное выражение для h_2 больше, чем для h_1. Значит, и $h_2 > h_1$.

Таким образом, в вертикальном положении центр тяжести коробки находится ниже, чем в горизонтальном, и ее потенциальная энергия меньше. Любая физическая система стремится занять то положение, в котором ее потенциальная энергия минимальна. Коробка не встает сразу же стоймя в пакете только потому, что этому мешают силы трения. Однако при переноске пакет совершает случайные колебательные движения, в процессе которых бывают моменты, когда эти силы значительно ослабевают. В результате коробка медленно, маленькими смещениями поворачивается в сторону вертикального положения и за достаточно большое время его достигает.

б) Для того, чтобы ответить на вопрос о влиянии длины пакета на обсуждаемое явление, найдем разность величин h_1 и h_2 и исследуем ее зависимость от l. Эта разность равна

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_2 + h_1} = \frac{a^2}{4\left(\sqrt{\left(l - \frac{a}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}}\right)}.$$

Эту величину мы преобразовали к такому (довольно громоздкому) виду для того, чтобы сделать понятной интересующую нас зависимость. Как видим, числитель получившейся дроби от длины пакета не зависит, а знаменатель, очевидно, возрастает при увеличении l. Значит, чем длиннее пакет, тем меньше будет выигрыш в потенциальной энергии при повороте коробки из горизонтального положения в вертикальное. Поэтому для одной и той же коробки обсуждаемое явление должно быть более ярко выраженным, если ручки у пакета короткие.

Правда, нужно сделать следующую оговорку. Чем короче не прилегающие к коробке части пакета, тем меньший угол они образуют с горизонталью. А значит, тем больше силы их натяжения, потому что вертикальная составляющая этих сил всегда равна силе тяжести, действующей на коробку. В результате пакет с короткими ручками, огибая края коробки, будет очень сильно на них давить, что обеспечит очень большие силы трения. Этот эффект может затруднить поворот коробки даже несмотря на больший выигрыш в потенциальной энергии.

8. Найдем зависимость динамического давления жидкости в интересующей нас точке от параметров, описывающих данную физическую ситуацию. Для этого используем метод анализа размерностей.

От каких параметров может зависеть искомое давление? Здравый физический смысл говорит, что это механические свойства жидкости, геометрические параметры находящегося в ней тела и скорость набегающего потока v. Единственный механический параметр идеальной несжимаемой жидкости – ее плотность ρ. Единственный геометрический параметр шара – его радиус R. Итак, все величины, от которых может зависеть искомое давление – это ρ, R и v. Выпишем размерности этих величин, обозначив размерность длины через L, размерность массы через M и размерность времени через T. Имеем:

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[R] = L$$

$$[v] = LT^{-1}$$

Легко видеть, что из этих величин нельзя составить безразмерный параметр. В самом деле, в такой параметр не может входить скорость, так как только ее размерность содержит время и сократиться ему будет не с чем. Но из оставшихся двух величин только размерность плотности содержит массу и сократиться эта размерность опять-таки не сможет. В таком случае искомая зависимость может быть только одночленом вида[1]

$$p = C\rho^x R^y v^z,$$

где x, y и z – неизвестные пока показатели степени, C – безразмерный численный множитель, определить который методом анализа размерностей невозможно. Подставим в это уравнение размерности входящих в него величин, учитывая, что

$$[p] = [F]/[S] = [ma]/[S] = ML^{-1}T^{-2}.$$

Имеем:

$$ML^{-1}T^{-2} = (ML^{-3})^x (L)^y (LT^{-1})^z.$$

Раскроем скобки в правой части:

$$ML^{-1}T^{-2} = M^x L^{-3x+y+z} T^{-z}.$$

Поскольку M, L и T в системе СИ – независимые основные единицы (они никак не выражаются друг через друга), показатели степеней, в которых они входят в левую и правую части этого уравнения, должны быть одинаковы. Приравнивая эти показатели, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 1 \\ -3x + y + z = -1 \\ -z = -2 \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Значит, искомая зависимость имеет вид:

$$p = C\rho v^2.$$

Оказывается, от радиуса шара интересующее нас давление вообще не зависит. Из полученной формулы сразу получаются ответы на вопросы задачи:

а) если в два раза увеличить радиус шара, динамическое давление на изменится;

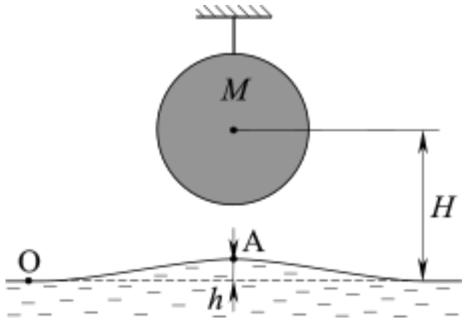
б) если в два раза увеличить скорость потока, динамическое давление увеличится в четыре раза.

9. а) Введем понятие гравитационного потенциала φ – гравитационной потенциальной энергии единичной массы. В однородном гравитационном поле Земли (вблизи ее поверхности) эта величина равна $\varphi_З = gh$, где h - высота над уровнем нулевого потенциала, в гравитационном поле однородного шара массы M она равна $\varphi_ш = -GM/R$, где R – расстояние до центра шара, G – гравитационная постоянная.

---

[1] Подробнее об этом см. Б.Ю. Коган "Размерность физической величины"

В любом гравитационном поле свободная поверхность жидкости в равновесии должна быть эквипотенциальна – полный гравитационный потенциал должен быть одинаков во всех ее точках. В нашем случае этот потенциал равен $\varphi = \varphi_З + \varphi_ш$. Для того, чтобы найти высоту подъема жидкости под шаром h, приравняем значения этого потенциала в точке О, находящейся на поверхности жидкости вдали от шара (на расстоянии, много большем H) и в точке А, находящейся точно под шаром (см. рисунок). В качестве нулевого уровня для $\varphi_З$ выберем уровень невозмущенной поверхности жидкости. Тогда в точке О $\varphi_З = 0$. Потенциал $\varphi_ш$ в этой точке также можно считать близким к нулю, так как расстояние от нее до центра шара много больше H. Тогда полный потенциал в этой точке $\varphi(О) = 0$. В точке А $\varphi_З = gh$, $\varphi_ш = -GM/(H-h) \approx -GM/H$, поскольку высота подъема жидкости h, очевидно, очень мала по сравнению с H. Поэтому



$$\varphi(А) = gh - \frac{GM}{H}.$$

Приравняв эту величину к нулю, получаем:

$$h = \frac{GM}{gH}.$$

б) Какова максимальная масса шара, которую можно использовать в таком эксперименте? Реалистичной представляется оценка в 1 тонну. В принципе, шар можно изготовить и в 10, и в 100 раз больше, однако тогда кран, который должен его перемещать и удерживать, придется использовать очень большой грузоподъемности и мощности. Механические вибрации, создаваемые им при работе, сильно затруднят точное измерение h. Итак, возьмем $M = 1000$ кг.

На какое минимальное расстояние можно приблизить центр шара к поверхности жидкости? Очевидно, это расстояние не может быть меньше радиуса шара – он ведь не должен касаться жидкости. Отсюда следует, что шар должен быть изготовлен из материала как можно большей плотности – чтобы при данной массе иметь наименьший радиус. Возьмем в качестве материала свинец. Как написано в Википедии, его плотность $\rho \approx 11300\ \text{кг/м}^3$. Найдем радиус нашего шара, приравняв его массу к произведению объема на плотность:

$$M = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} \approx 0{,}28\ \text{м}.$$

Теперь, взяв из Википедии значение $G \approx 6{,}67 \times 10^{-11}$ Н $\cdot$ м$^2 \cdot$ кг$^{-2}$ и положив $H \approx R \approx 0{,}3$ м, мы можем найти высоту подъёма поверхности жидкости, подставив числа в формулу из пункта а):

$$h = \frac{GM}{gH} \approx 2 \times 10^{-8}\ \text{м} = 20\ \text{нм}.$$

Можно ли измерить такое смещение поверхности жидкости с точностью, необходимой для уточнения значения гравитационной постоянной? В настоящее время надежно измерено значение этой константы с относительной погрешностью порядка $10^{-4} - 10^{-5}$. Это значит, что для уточнения этого результата величину h нужно суметь измерить с относительной погрешностью максимум $10^{-5} - 10^{-6}$, что соответствует абсолютной погрешности $10^{-13} - 10^{-14}$ м $= 0{,}1 - 0{,}01$ пм. Это в тысячи раз меньше размера атома! Конечно, в знаменитом эксперименте LIGO по детектированию гравитационных волн его участники могли измерять смещения пробных масс величиной порядка 10^{-20} м. Однако, во-первых, это число есть минимальное смещение, которое чувствовала их аппаратура, а вовсе не погрешность измерения на несколько порядков большего расстояния. Во-вторых, это чудовищно сложный и очень дорогой эксперимент. В-третьих, в нашем эксперименте придется иметь дело не с твердым телом, а с поверхностью жидкости. Ее нельзя охладить до близких к абсолютному нулю температур – она просто замерзнет. А каковы будут колебания ее поверхности из-за теплового движения атомов при комнатной температуре и позволят ли они в принципе провести измерение с нужной точностью – вопрос, требующий уже довольно непростых оценок. В любом случае, возможность такого измерения весьма сомнительна.

в) В установке гораздо лучше использовать ртуть, а не воду. Одной из основных помех для высокоточного измерения h будут являться волны, которые начинают бежать по поверхности жидкости при малейшем внешнем возмущении. У ртути в 13 раз больше плотность и в 6,5 раза больше коэффициент поверхностного натяжения, чем у воды (у воды $\sigma \approx 0{,}073\ \text{Н/м}$, у ртути $\sigma \approx 0{,}465\ \text{Н/м}$). Это означает, что амплитуды и гравитационных, и капиллярных волн на поверхности ртути будут в несколько раз меньше, чем на поверхности воды (при одинаковой энергии возмущения).

10. Продолжительное кипение воды в колбе приведет к тому, что воздуха в ней практически не останется – он будет вытеснен парами воды. После закрывания колбы эти пары очень быстро станут насыщенными и кипение прекратиться. Если же после этого облить колбу ледяной водой, то произойдет следующее. Вода быстро охладит стенки колбы (у них небольшая теплоемкость) и на них начнется конденсация пара. Давление пара в результате резко упадет. А вода в первом приближении сохранит прежнюю температуру (ее теплоемкость велика), а значит, и соответствующее этой температуре давление насыщенного пара. Давление в колбе окажется меньше давления насыщенных паров находящейся в ней воды, что и приведет к резкому вскипанию последней.