Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика,
10 класс

Вариант № 1

1. В поезде 10 вагонов и в них находятся 270 пассажиров. Во втором вагоне более, чем на одного пассажира больше, чем в первом, в третьем вагоне более чем на одного пассажира больше, чем во втором и так до последнего вагона. Число пассажиров в последнем вагоне не более, чем в 2 раза превышает количество пассажиров в первом вагоне. Сколько пассажиров едет в первом вагоне?

2. Найти на интервале $\left(0;2\pi\right)$ наибольшее решение уравнения

$$\left(\sin x+\sin 2x+\sin 3x\right)^3=\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x\,.$$

3. Найти первые 100 цифр после запятой в десятичной форме записи числа $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}$.

4. Решить уравнение $\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=4\sqrt{2}x\sqrt{1-4x^2}$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и его диагонали пересекаются в точке P . Точки K,L и M – середины сторон AB,BC и CD соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника KLP , равен 1. Найти радиус окружности, описанной около треугольника LMP .

Задача 1 Ответ: 18 пассажиров.

Решение. Пусть y_k – число пассажиров в вагоне с номером $k,\ k=1,2,3,...,10$. По условию задачи $\sum\limits_{k=1}^{10} y_k=270$. Кроме того, сказано, что $y_2\ge y_1+2,\ y_3\ge y_1+4,...,y_9\ge y_1+16,\quad y_{10}\ge y_1+18.$ Сложим эти неравенства

$$y_2+y_3+...+y_9+y_{10}\ge y_1+2+y_1+4+...+y_1+16+y_1+18$$

или

$$270-y_1\ge 9y_1+90.$$

Отсюда получаем $y_1\le 18.$ Из условий $y_{10}\ge y_1+18$ и $y_{10}\le 2y_1$ следует, что $2y_1\ge y_1+18$ или $y_1\ge 18.$ Сравнивая полученные неравенства, приходим к тому, что $y_1=18$. Набор $y_1=18,\ y_2=20,$ …, $y_{10}=36$ удовлетворяет условиям задачи.

Задача 2 Ответ: $x=\dfrac{8\pi}{5}.$

Решение. Введем обозначения: $u=\sin x, v=\sin 2x, w=\sin 3x$. Тогда уравнение примет вид

$$(u+v+w)^3=u^3+v^3+w^3.$$

Перепишем уравнение в виде

$$(u+v+w)^3-u^3-\left(v^3+w^3\right)=0.$$

С помощью формул разности и суммы кубов, а также разности квадратов разложим левую часть уравнения на множители

$$(u+v+w)^3-u^3-(v^3+w^3)=(v+w)((u+v+w)^2+u(u+v+w)+u^2)-$$
$$-(v+w)(v^2-vw+w^2)=(v+w)\Big[((u+v+w)^2-v^2)+(u^2-w^2)+u(u+w)+v(u+w)\Big]=$$
$$=(v+w)(u+w)\left(u+2v+w+u-w+u+v\right)=3(v+w)(u+w)(u+v).$$

В результате уравнение принимает вид

$$3(v+w)(u+w)(u+v)=0.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим уравнение:

..

Случай 1. $\sin x+\sin 2x=0$.

$$\left[\begin{array}{l} 2x=-x+2\pi k \\ 2x=\pi+x+2\pi m \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi k}{3}, \\ x=\pi+2\pi m,\ m,k\in Z. \end{array}\right.$$ Наибольшее на интервале $\left(0;2\pi\right)$ решение $x=\dfrac{4\pi}{3}$

.

Случай 2. $\sin x+\sin 3x=0$.

$$\left[\begin{array}{l} 3x=-x+2\pi k \\ 3x=\pi+x+2\pi m \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi k}{2}, \\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ m,k\in Z. \end{array}\right.$$ Наибольшее на интервале $\left(0;2\pi\right)$ решение. $x=\dfrac{3\pi}{2}$

Случай 3. $\sin 3x+\sin 2x=0$.

$$\left[\begin{array}{l} 3x=-2x+2\pi k \\ 3x=\pi+2x+2\pi m \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi k}{5}, \\ x=\pi+2\pi m,\ m,k\in Z. \end{array}\right.$$ Наибольшее на интервале $\left(0;2\pi\right)$ решение $x=\dfrac{8\pi}{5}$.

Наибольшим решением из $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{8\pi}{5}$ является решение $x=\dfrac{8\pi}{5}$.

Задача 3 **Ответ:** все 100 цифр после запятой–девятки.

Решение. Рассмотрим $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}$. Воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}=\sum_{k=0}^{2023}C_{2023}^{k}7^{2023-k}\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^{k}=a+b\sqrt{3},$$

где $a=\sum\limits_{k=0}^{1011}C_{2023}^{2k}7^{2023-2k}\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^{2k}\in N,\ b=\sum\limits_{k=0}^{1011}C_{2023}^{2k+1}7^{2022-2k}\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^{2k}\in N.$

Теперь рассмотрим $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2023}$:

$$\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2023}=\sum_{k=0}^{2023}C_{2023}^{k}7^{2023-k}\cdot\left(-4\sqrt{3}\right)^{k}=a-b\sqrt{3},$$

где $a=\sum\limits_{k=0}^{1011}C_{2023}^{2k}7^{2023-2k}\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^{2k}\in N,\ b=\sum\limits_{k=0}^{1011}C_{2023}^{2k+1}7^{2022-2k}\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^{2k}\in N.$

Складывая полученные равенства, получаем

$$\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}+\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2023}=a+b\sqrt{3}+a-b\sqrt{3}=2a\in N.$$

Отсюда имеем

$$\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}=2a-\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2023}=2a-\frac{\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2023}\cdot\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}}{\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}}=2a-\frac{1}{\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}}=$$

$$=2a-1+1-\frac{1}{\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}},\quad 2a-1\in N.$$

Заметим, что $\frac{1}{\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}}<\frac{1}{10^{2023}}<\frac{1}{10^{100}}$. Следовательно, $\underbrace{0,99...9}_{100}<1-\frac{1}{\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}}<1.$ Таким образом, первые 100 цифр после запятой в десятичной форме записи числа $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}$ это девятки.

Задача 4 **Ответ:** $x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};x=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$

Решение. Уравнение $\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=4\sqrt{2}x\sqrt{1-4x^2}$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} x\ge 0, \\ 1-4x^2\ge 0, \\ \left(2x-\sqrt{1-4x^2}\right)^2=\left(4\sqrt{2}x\sqrt{1-4x^2}\right)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right], \\ 4x^2-4x\sqrt{1-4x^2}+1-4x^2=32x^2\left(1-4x^2\right), \end{cases}$$

В итоге получаем $\begin{cases} x\in\left[0;\frac{1}{2}\right], \\ -4x\sqrt{1-4x^2}+1=32x^2\left(1-4x^2\right). \end{cases}$

Введем переменную $t=4x\sqrt{1-4x^2}, t\ge 0.$ Тогда уравнение принимает вид

$$-t+1=2t^2 \quad \text{или} \quad 2t^2+t-1=0.$$

Решая квадратное уравнение, находим $t=-1,\ t=\frac{1}{2}.$ С учетом неотрицательности $t,$ выбираем $t=\frac{1}{2}.$ В итоге получаем уравнение для нахождения x

$$4x\sqrt{1-4x^2}=\frac{1}{2},\ \ x\in\left[0;\frac{1}{2}\right].$$

Решим это уравнение

$$64x^2\left(1-4x^2\right)=1\leftrightarrow 256x^4-64x^2+1=0\rightarrow x^2=\frac{32\pm\sqrt{32^2-256}}{256}=\frac{32\pm 16\sqrt{3}}{256}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{16}>0.$$

Тогда, с учетом неотрицательности x, находим $x=\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{4}$. Осталось проверить условие $x\le\frac{1}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{4} \vee \frac{1}{2} \leftrightarrow \sqrt{2\pm\sqrt{3}} \vee 2 \leftrightarrow 2\pm\sqrt{3} \vee 4 \leftrightarrow \pm\sqrt{3} \vee 2 \to \pm\sqrt{3} < 2.$$

Следовательно, оба корня $x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ и $x=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ удовлетворяют условию $x \le \frac{1}{2}$.

Задача 5 **Ответ:** $R=1$.

Решение. Рассмотрим треугольники ABP и DCP. Они подобны по двум равным углам ($\angle BAC = \angle BDC,$. $\angle ABD = \angle ADC$ как углы, вписанные в окружность и опирающиеся на одну дугу). Поэтому стороны этих треугольников пропорциональны:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AP}{DP} = \frac{BP}{PC}.$$

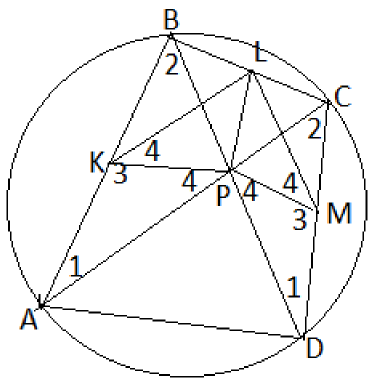
Теперь рассмотрим треугольники AKP и DCP. По условию $AK = \frac{AB}{2}$, $DM = \frac{DC}{2}$, поэтому $\frac{AK}{DM} = \frac{AB}{DC}$. В результате имеем $\frac{AK}{DM} = \frac{AP}{DB}$. Следовательно треугольник APK подобен треугольнику DPM по равному углу и пропорциональным сторонам. Тогда угол APK равен углу DPM как углы в подобных треугольниках, лежащих против пропорциональных сторон.

По условию задачи KL и LM являются средними линиями треугольников ABC и BCD соответственно. Поэтому $KL \parallel AC$, $LM \parallel BD$. Тогда угол APK равен углу PKL, а угол DPM равен углу PML как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Таким образом, мы доказали, что угол PKL равен углу PML. Применяя теорему синусов к треугольнику KLP, получаем

$$\sin\angle PKL = \frac{KL}{2\cdot 1} = \frac{KL}{2}.$$

Применяя теорему синусов к треугольнику LMP, получаем

$$R = \frac{KL}{2\sin\angle PKL} = 1.$$



Вариант № 2

1. В поезде 12 вагонов и в них находятся 384 пассажиров. Во втором вагоне более, чем на два пассажира больше, чем в первом, в третьем вагоне более чем на два пассажира больше, чем во втором и так до последнего вагона. Число пассажиров в последнем вагоне не более, чем в 3 раза превышает количество пассажиров в первом вагоне. Сколько пассажиров едет в первом вагоне?

Ответ: решений нет.

Решение. Пусть y_k – число пассажиров в вагоне с номером k, $k=1,2,3,...,12$. По условию задачи $\sum_{k=1}^{12} y_k = 384$. Кроме того, сказано, что $y_2 \ge y_1+3,\ \ y_3 \ge y_1+6, ..., y_{11} \ge y_1+30,\ \ y_{12} \ge y_1+33.$ Сложим эти неравенства

$$y_2+y_3+...+y_{11}+y_{12} \ge y_1+3+y_1+6+...+y_1+30+y_1+33$$

или

$$384-y_1 \ge 11y_1+198.$$

Отсюда получаем $y_1 \le \frac{186}{12}=\frac{31}{2}=15,5.$ Так как y_1 натуральное, то $y_1 \le 15.$ Из условий $y_{12} \ge y_1+33$ и $y_{12} \le 3y_1$ следует, что $3y_1 \ge y_1+33$ или $y_1 \ge \frac{33}{2}=16,5.$ Так как y_1 натуральное, то $y_1 \ge 17.$ Система $\begin{cases} y_1 \le 15, \\ y_1 \ge 17, \end{cases}$ решений не имеет.

2. Найти на интервале $\left(0;2\pi\right)$ наибольшее решение уравнения

$$\left(\sin x+\cos x+\sin 3x\right)^3=\sin^3 x+\cos^3 x+\sin^3 3x.$$

Ответ: $x=\frac{15\pi}{8}.$

3. Найти первые 1000 цифр после запятой в десятичной форме записи числа $\left(8+\sqrt{65}\right)^{2022}$.

Ответ: все 1000 цифр после запятой–нули.

4. Решить уравнение $\left|3x-\sqrt{1-9x^2}\right|=\sqrt{2}\left(18x^2-1\right).$

Ответ: $x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{6}; x=\frac{1}{3\sqrt{2}}.$

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и его диагонали пересекаются в точке P. Точки K, L и M – середины сторон AB, BC и CD соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника KLP, равен 2. Найти радиус окружности, описанной около треугольника LMP.

Ответ: $R=2.$.

Вариант № 3

1. В поезде 14 вагонов и в них находятся 600 пассажиров. Во втором вагоне более, чем на три пассажира больше, чем в первом, в третьем вагоне более чем на три пассажира больше, чем во втором и так до последнего вагона. Число пассажиров в последнем вагоне не более, чем в 4 раза превышает количество пассажиров в первом вагоне. Сколько пассажиров едет в первом вагоне?

Ответ: решений нет.

2. Найти на интервале $\left(0;2\pi\right)$ наибольшее решение уравнения

$$\left(\cos 2x+\sin 3x+\cos 4x\right)^3=\cos^3 2x+\sin^3 3x+\cos^3 4x .$$

Ответ: $x=\dfrac{25\pi}{14}$.

3. Найти первые 2000 цифр после запятой в десятичной форме записи числа $\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2021}$.

Ответ: все 2000 цифр после запятой–девятки.

4. Решить уравнение $\left|4x-\sqrt{1-16x^2}\right|=(32x^2-1)\sqrt{1-16x^2}$.

Ответ: $x=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и его диагонали пересекаются в точке P. Точки K, L и M – середины сторон AB, BC и CD соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника KLP, равен 3. Найти радиус окружности, описанной около треугольника LMP.

Ответ: $R=3$.

Вариант № 4

1. В поезде 16 вагонов и в них находятся 880 пассажиров. Во втором вагоне более, чем на четыре пассажира больше, чем в первом, в третьем вагоне более чем на четыре пассажира больше, чем во втором и так до последнего вагона. Число пассажиров в последнем вагоне не более, чем в 5 раза превышает количество пассажиров в первом вагоне. Сколько пассажиров едет в первом вагоне?

Ответ: решений нет.

2. Найти на интервале $\left(0;2\pi\right)$ наибольшее решение уравнения

$$\left(\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x\right)^3=\cos^3 3x+\cos^3 4x+\cos^3 5x .$$

Ответ: $x=\dfrac{17\pi}{9}$.

3. Найти первые 200 цифр после запятой в десятичной форме записи числа $\left(7+5\sqrt{2}\right)^{2020}$.

Ответ: все 200 цифр после запятой–нули.

4. Решить уравнение $\left|5x-\sqrt{1-25x^2}\right|=5\sqrt{2}x\left(100x^2-3\right)$.

Ответ: $x=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{10}; x=-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{10}$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и его диагонали пересекаются в точке P. Точки K, L и M – середины сторон AB, BC и CD соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника KLP, равен 4. Найти радиус окружности, описанной около треугольника LMP.

Ответ: $R=4$.