Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 10 класс.

Вариант № 1

1. Число A в десятичной форме записи имеет вид $\underbrace{777...7}_{2023}m\underbrace{999...9}_{2022}$ с некоторой цифрой m. Найти m, если известно, что A кратно 13.

2. Решить уравнение $\sin^2 x\cdot \mathrm{ctg}^4 2x-\sin^2 x-\mathrm{ctg}^4 2x+4\sin x\cdot \mathrm{ctg}^2 2x+1=0$.

3. Вычислить значение произведения $\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\dfrac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{100^3-1}{100^3+1}$.

4. Решить уравнение $x^3-2[x]=5$. Здесь $[x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x.

5. На сторонах AB и BC вне треугольника ABC построены два правильных треугольника ABM и BCN. Точки P,Q и R – середины отрезков AB, MN и BC соответственно. Найти площадь треугольника PQR, если длина стороны AC треугольника ABC равна 4.

Ответы и решения

1. Поскольку число 13 является делителем числа 111111, то 777777 делится на 13 и 999999 делится на 13. Учитывая, что 2022:13=337, а 2023:13=337(ост.1), получим, что число A можно представить в виде $A=\underbrace{\overline{777777}}_{337}\overline{7m}\underbrace{\overline{999999}}_{337}=\underbrace{\overline{777777}}_{337}\cdot 10^{2024}+\overline{7m}\cdot 10^{2022}+\underbrace{\overline{999999}}_{337}$. В этой сумме первое и последнее слагаемые делятся на 13, а второе слагаемое, $\overline{7m}\cdot 10^{2022}$, делится на 13 тогда и только тогда, когда число $\overline{7m}=70+m$ делится на 13. Последнее возможно только когда $5+m$ делится на 13, то есть только при $m=8$.
Ответ: $m=8$.

2. Левую часть уравнения можно представить в виде разности квадратов:

$$\left(\sin x\cdot \mathrm{ctg}2x+1\right)^2-\left(\sin x-\mathrm{ctg}^2 2x\right)^2=0\Leftrightarrow\left(\sin x\cdot \mathrm{ctg}2x+1\right)^2=\left(\sin x-\mathrm{ctg}^2 2x\right)^2\Leftrightarrow$$
$$\left(\sin x\cdot \mathrm{ctg}2x+1\right)=\pm\left(\sin x-\mathrm{ctg}^2 2x\right).$$

Далее рассматриваем два случая.

Случай «$+$»:

$$\sin x\cdot \mathrm{ctg}^2 2x+1=\sin x-\mathrm{ctg}^2 2x\rightarrow \sin x\left(\mathrm{ctg}^2 2x-1\right)=-\left(1+\mathrm{ctg}^2 2x\right)\rightarrow$$
$$\rightarrow \sin x\cdot\frac{\cos 4x}{\sin^2 2x}=-\frac{1}{\sin^2 2x}\rightarrow\begin{cases}\sin x\cdot\cos 4x=-1\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\rightarrow\varnothing.$$

Случай «$-$»:

$$\sin x\cdot \operatorname{ctg}^2 2x+1=-\sin x+\operatorname{ctg}^2 2x\to \sin x\left(\operatorname{ctg}^2 2x+1\right)=\left(\operatorname{ctg}^2 2x-1\right)\to$$

$$\to \sin x\cdot\frac{1}{\sin^2 2x}=\frac{\cos 4x}{\sin^2 2x}\to\begin{cases}\sin x=\cos 4x\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\to\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}k\ \ (1)\\ x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi}{5}m,\ \ (2).\end{array}\right.\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}n,\ k,m,n\in Z\end{array}\right.$$

Отберем корни, удовлетворяющие условию $\sin 2x\neq 0$, в серии (1): $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}k\neq\dfrac{\pi}{2}n$.

Поскольку равенство выполняется при $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}k=\dfrac{\pi}{2}n\to -3n+4k=1\to\begin{cases}k=3t+1\\ n=4t+1\end{cases}$,

то решения уравнения, описываемые серией (1), будут $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}k,\ k\in Z,\ k\neq 3t+1, t\in Z$

Отберем теперь корни, удовлетворяющие условию $\sin 2x\neq 0$, в серии (2): $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi}{5}m\neq\dfrac{\pi}{2}n$

Здесь равенство выполняется при $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi}{5}m=\dfrac{\pi}{2}n\to 5n-4m=1\to\begin{cases}m=5t+1\\ n=4t+1\end{cases}$.

Тогда решения уравнения, описываемые серией (2), будут $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi}{5}m,\ m\in Z,\ m\neq 5t+1, t\in Z$

Совокупность всех отобранных корней является решением уравнения.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}k,\ k\in Z,\ k\neq 3t+1, t\in Z;\quad x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi}{5}m,\ m\in Z,\ m\neq 5t+1,\ t\in Z.$

3. Разложим разности кубов в числителе и суммы кубов в знаменателе на множители:

$$A=\frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(99-1)(99^2+99+1)}{(99+1)(99^2-99+1)}\cdot\frac{(100-1)(100^2+100+1)}{(100+1)(100^2-100+1)}.$$

Тогда получим, что

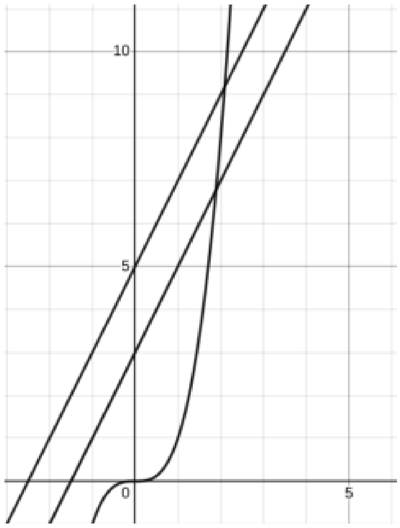
$$A=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 99}{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 101}\frac{(2^2+2+1)}{(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3^2+3+1)}{(3^2-3+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(99^2+99+1)}{(99^2-99+1)}\cdot\frac{(100^2+100+1)}{(100^2-100+1)}.$$

Поскольку при любых натуральных $n\ (n>1)$ выполнено равенство $(n-1)^2+(n-1)+1=n^2-n+1$, сомножители числителя и знаменателя сокращаются. Таким образом, получаем

$$A=\frac{1\cdot 2}{100\cdot 101}\cdot\frac{100^2+100+1}{2^2-2+1}=\frac{2(100^2+100+1)}{3\cdot 100\cdot 101}=\frac{10101}{50\cdot 303}=\frac{3367}{5050}.$$

Ответ: $\dfrac{2(100^2+100+1)}{3\cdot 100\cdot 101}=\dfrac{3367}{5050}$.

4. Запишем x в виде: $x=[x]+\alpha,$ где $\alpha-$ дробная часть числа $x,\quad \alpha\in[0;1).$ Тогда уравнение $x^3-2[x]=5$ примет вид: $x^3-2(x-\alpha)=5$ или $2\alpha=5+2x-x^3.$



Поскольку $2\alpha\in[0;2),$ найдем возможные целые значения $x,$ которые удовлетворяют двойному неравенству $0\le 5+2x-x^3<2,$ что равносильно $3+2x\le x^3<5+2x.$

x	-1	0	1	2	3
$3+2x$	1	3	5	7	9
x^3	-1	0	1	8	27
$5+2x$	3	5	7	9	11

Учитывая свойства кубической и линейных функций, получаем, что в этот интервал попадает единственное целое число $x=2$. Поэтому решениями уравнения могут быть $x,$ для которых $[x]=1$ или $[x]=2.$ Рассмотрим эти случаи.

Если $[x]=1,$ то из $x^3-2[x]=5$ получаем $x^3=7\to x=\sqrt[3]{7}\approx 1,9\to\left[\sqrt[3]{7}\right]=1$

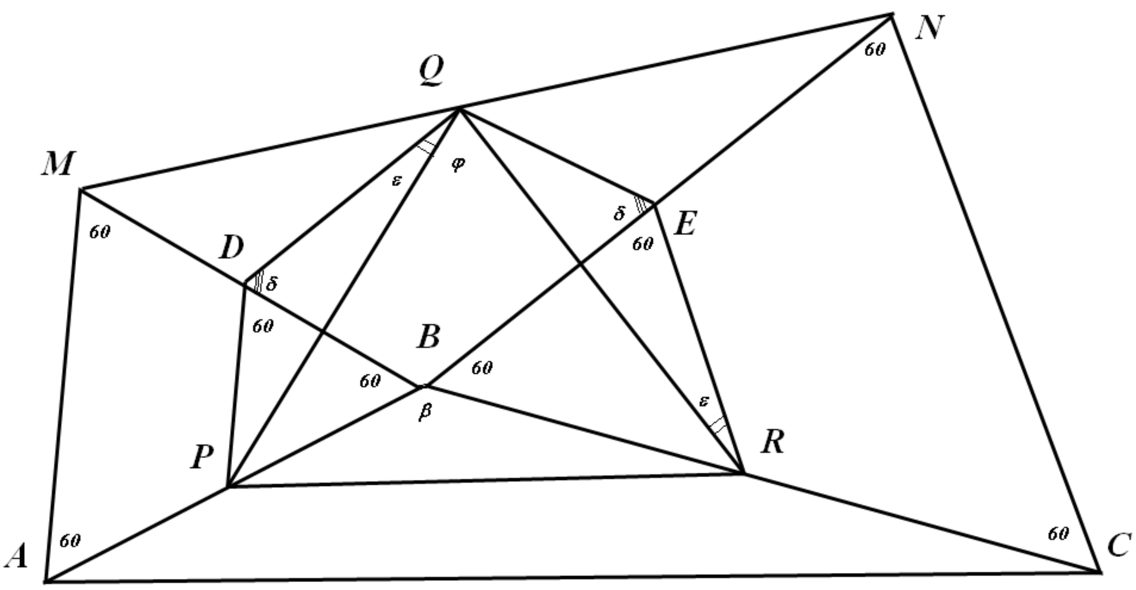
Если $[x]=2,$ то из $x^3-2[x]=5$ получаем $x^3=9\to x=\sqrt[3]{9}\approx 2,1\to\left[\sqrt[3]{9}\right]=2$

Рассмотренными случаями исчерпываются все решения уравнения.

Ответ: $x_1=\sqrt[3]{7},\ x_2=\sqrt[3]{9}$.

5. 1. Будем считать, что углы измеряются в градусах. Пусть D, E –середины сторон BM и BN соответственно.
2. Поскольку $PR-$ средняя линия треугольника ABC, то $PR=0.5AC=2.$

3. Поскольку ER и $DP-$ средние линии треугольников BNC и BMA соответственно, треугольники BER и BDP равносторонние.



4. Имеем DQ и $QE-$ средние линии треугольника BMN, следовательно $DQ \parallel BN$, $QE \parallel BM$. Значит, $BDQE-$ параллелограмм.

5. Из пунктов 3 и 4 получаем , что $DQ = BE = ER,\ DP = DB = QE,\ \angle QDB = \angle QEB = \delta.$

6. Поскольку $DQ = ER,\ DP = QE,\ \angle QER = \angle QDP = \delta + 60^0$, таким образом, треугольники QER и QDP равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $QR = QP,$ следовательно треугольник $PQR-$ равнобедренный. Кроме того, $\angle ERQ = \angle DQP = \varepsilon.$

7. Из пункта 5 следует, что $\angle DQE = 180^\circ - \delta.$ Из пункта 6 следует, что

$\angle RQE = 180^\circ - \left(\varepsilon + \delta + 60^\circ\right) = 120^\circ - \left(\varepsilon + \delta\right).$ Тогда получим что

$\angle PQR = \varphi = \angle DQE - \varepsilon - \angle ERQ = 180^\circ - \delta - \varepsilon - \left(120^\circ - \left(\varepsilon + \delta\right)\right) = 60^\circ.$

8. Получили, что у равнобедренного треугольника PQR угол при вершине равен 60°, значит, он равносторонний. Тогда $S_{PQR} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} PR^2 = \sqrt{3}.$

Ответ: $S_{PQR} = \sqrt{3}.$

Вариант № 2

1. Число A в десятичной форме записи имеет вид $\underbrace{888...8}_{2019} m \underbrace{666...6}_{2024}$ с некоторой цифрой $m.$

Найти $m,$ если известно, что A кратно 7.

Ответ: $m = 5.$

2. Решить уравнение $\cos^2 x \cdot \mathrm{tg}^4 2x - \cos^2 x - \mathrm{tg}^4 2x + 4\cos x \cdot \mathrm{tg}^2 2x + 1 = 0.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}k,\ k \in Z;\quad x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2\pi}{5}n,\ n \in Z;\quad x = 2\pi m,\ m \in Z.$

3. Вычислить значение произведения $\dfrac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \dfrac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \dfrac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{200^3-1}{200^3+1}.$

Ответ: $\dfrac{2 \cdot \left(200^2 + 200 + 1\right)}{3 \cdot 200 \cdot 201} = \dfrac{40201}{60300}.$

4. Решить уравнение $x^3 - 3[x] = 4.$ Здесь $[x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее $x.$

Ответ: $x_1 = -\sqrt[3]{2},\ \ x_2 = \sqrt[3]{7},\ \ x_3 = \sqrt[3]{10}.$

5. На сторонах AB и BC вне треугольника ABC построены два правильных треугольника ABM и BCN. Точки P, Q и R – середины отрезков AB, MN и BC соответственно. Найти площадь треугольника PQR, если длина стороны AC треугольника ABC равна 8.

Ответ: $S_{PQR} = 4\sqrt{3}.$

Вариант № 3

1. Число A в десятичной форме записи имеет вид $\underbrace{888...8}_{2010}m\underbrace{111...1}_{2017}$ с некоторой цифрой m. Найти m, если известно, что A кратно 21.

Ответ: $m = 2.$

2. Решить уравнение $\cos^2 x \cdot \operatorname{ctg}^4 2x - \cos^2 x - \operatorname{ctg}^4 2x + 4\cos x \cdot \operatorname{ctg}^2 2x + 1 = 0.$

Ответ: $x = \dfrac{2\pi}{3}k, \quad k \in Z, k \neq 3t, \; t \in Z; \quad x = \dfrac{2\pi}{5}n, \; n \in Z, \; n \neq 5t, \; t \in Z.$

3. Вычислить значение произведения $\dfrac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \dfrac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dfrac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{300^3 - 1}{300^3 + 1}.$

Ответ: $\dfrac{2 \cdot \left(300^2 + 300 + 1\right)}{3 \cdot 300 \cdot 301} = \dfrac{90301}{135450}.$

4. Решить уравнение $x^3 - 6[x] = 7.$ Здесь $[x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x.

Ответ: $x_1 = -\sqrt[3]{11}, \quad x_2 = -\sqrt[3]{5}, \quad x_3 = \sqrt[3]{19}.$

5. На сторонах AB и BC вне треугольника ABC построены два правильных треугольника ABM и BCN. Точки P, Q и R – середины отрезков AB, MN и BC соответственно. Найти площадь треугольника PQR, если длина стороны AC треугольника ABC равна 2.

Ответ: $S_{PQR} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

Вариант № 4

1. Число A в десятичной форме записи имеет вид $\underbrace{888...8}_{2019}m\underbrace{666...6}_{2024}$ с некоторой цифрой m. Найти m, если известно, что A кратно 39.

Ответ: $m = 9.$

2. Решить уравнение $\sin^2 x \cdot \mathrm{tg}^4 2x - \sin^2 x - \mathrm{tg}^4 2x + 4\sin x \cdot \mathrm{tg}^2 2x + 1 = 0.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k,\ k \in Z;\quad x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n,\ n \in Z;\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z.$

3. Вычислить значение произведения $\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{400^3-1}{400^3+1}.$

Ответ: $\frac{2 \cdot \left(400^2 + 400 + 1\right)}{3 \cdot 400 \cdot 401} = \frac{53467}{80200}.$

4. Решить уравнение $x^3 - 9[x] = 8.$ Здесь $[x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x.

Ответ: $x_1 = -\sqrt[3]{28},\ \ x_2 = -\sqrt[3]{19},\ \ x_3 = -1,\ \ x_4 = \sqrt[3]{26},\ \ x_5 = \sqrt[3]{35}.$

5. На сторонах AB и BC вне треугольника ABC построены два правильных треугольника ABM и BCN. Точки P, Q и R – середины отрезков AB, MN и BC соответственно. Найти площадь треугольника $PQR,$ если длина стороны AC треугольника ABC равна 1.

Ответ: $S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{16}.$

Критерии проверки работ, 10 класс
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика

Задача 1.

1) Выяснил, что число 111111, связанное с данной задачей, делится на 3, 7, 13 (в зависимости от варианта) – 0,5 балла.
2) Выделил в исследуемом числе слагаемые, кратные 111111, и свел задачу к исследованию делимости „короткого“ числа, содержащего параметр m (или получил условие, используя признаки делимости на 3, 7, 13) – 1— 1,5 балла.
3) После предыдущих шагов получил правильное значение m – 2 балла.
4) верный ответ без обоснования – 0 баллов.
5) верный ответ с минимальным обоснованием – 0,5 балла.

Задача 2.

1) Представил левую часть как разность квадратов или сделал какие-нибудь конструктивные преобразования левой части – 0,5 балла.

2) Разложил левую часть на множители и нашел часть корней или показал их отсутствие для одного из множителей – 1 балл.

3) Верно нашел все нули числителя, но не произвел отбор корней – 1,5 балла.

4) Полностью верное решение – 2 балла.

Задача 3.

1) Разложил числители и знаменатели на множители – 0,5 балла.

2) Выделил множители факториального типа и частично сократил дробь – 1 балл.

3) Экспериментально заметил сокращение нефакториальных множителей, но не обосновал строго – 1,5 балла.

4) Полностью все обосновал и получил верный ответ – 2 балла.

Задача 4.

1) Представил x как сумму целой и дробной части, указав ограничение на дробную часть – 0,5 балла.

2) Переписал уравнение через эти величины и на основе ограничений составил неравенства – 1 балл.

3) Решил эти неравенства каким-либо способом (перебором, графически) – 1,5 балла.

4) верно и обоснованно нашел все решения – 2 балла.

5) Верный ответ с недостаточным обоснованием или не все решения – 1 – 1,5 балла

6) верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Задача 5.
1) Содержательный рисунок и правильное значение PR – 0,5 балла.
2) Более или менее полное обоснование равносторонности треугольника PQR – 1 – 1,5 балла.
3)Полностью обоснованный верный ответ – 2 балла.