Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс

Вариант № 1

1. В районе расположено несколько жилых домов, общее число этажей в которых равно 50. Петя поднимался на крышу каждого из домов района, подсчитывал число домов меньшей этажности, которые он мог наблюдать, и складывал полученные результаты. Какое наибольшее возможное число он мог получить?

2. Сколько решений имеет уравнение $(\cos x-\cos 2x+\cos 3x)^2=\cos^2 x-\cos^2 2x+\cos^2 3x$ на отрезке $\left[0;100\pi\right]$?

3. На интервале $\left(\dfrac{1}{2023};\dfrac{1}{2022}\right)$ отмечены все несократимые обыкновенные дроби вида $\dfrac{231}{q}$. Найти сумму обратных величин таких дробей.

4. Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{64}{\sqrt{x-3}}+\frac{36}{\sqrt{y-4}}=44-4\sqrt{x-3}-\sqrt{y-4}\ .$$

5. Найти коэффициент при x^{50} многочлена $P(x)=\left(1+x+x^2+\ldots+x^{20}\right)^4$.

6. Через середины сторон AB и AD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная медиане боковой грани SDC, проведенной из вершины D. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если сторона основания пирамиды 1, а боковое ребро 2.

Ответы и решения

1. Пусть самый высокий дом содержит k этажей. Обозначим через n_1 число одноэтажных домов, через n_2 число двухэтажных домов, через n_k число домов, содержащих k этажей. Согласно условию задачи, ищется максимальное значение величины m

$$m=n_1\left(n_2+\ldots+n_k\right)+n_2\left(n_3+\ldots+n_k\right)+\ldots+n_{k-1}n_k$$

при условиях $n_1+2n_2+\ldots+kn_k=50,\quad j=1,2,\ldots,k-$ целые неотрицательные числа.
Покажем, что если $k>2,$ то найдется набор домов, для которого сумма будет больше. Заменим дом высоты k (если таких домов несколько, то любой з них) двумя домами высоты $k-1$ и 1 соответственно. Получим следующий набор одно, двух, …, k этажных домов

$$n_1+1,\ n_2,\ldots,\ n_k-1.$$

Соответствующая сумма $\tilde{m}$ количеств домов для такого набора домов равна

$$\tilde{m}=\left(n_1+1\right)\left(n_2+\ldots+\left(n_{k-1}+1\right)+\left(n_k-1\right)\right)+n_2\left(n_3+\ldots+\left(n_{k-1}+1\right)+\left(n_k-1\right)\right)+\ldots+\left(n_{k-1}+1\right)\left(n_k-1\right)=$$
$$=n_1\left(n_2+\ldots+n_k\right)+n_2\left(n_3+\ldots+n_k\right)+\ldots+n_{k-1}n_k+\left(n_2+\ldots+n_k\right)+n_k-n_{k-1}-1=$$
$$=n_1\left(n_2+\ldots+n_k\right)+n_2\left(n_3+\ldots+n_k\right)+\ldots+n_{k-1}n_k+n_2+\ldots+n_{k-2}+n_k+n_k-1.$$

Так как $n_k + n_k - 1 \ge 1,$ то $\tilde{m}$ больше m по крайней мере на 1. Значит набор домов, для которого m принимает максимальное значение может включать только одноэтажные двухэтажные дома.

Таким образом, у нас n_1 одноэтажных домов и n_2 двухэтажных домов и $n_1 + 2n_2 = 50.$ Тогда

$$m = n_1 n_2 = \left(50 - 2n_2\right) n_2,\ n_2 = 0,1,...,50.$$

Величина

$$m = \left(50 - 2n_2\right) n_2 = \frac{625}{2} - 2\left(n_2 - \frac{25}{2}\right)^2$$

достигает наибольшего значения при $x_2 = 12$ или $x_2 = 13$. Это значение равно 312.

Ответ: 312.

2. Перепишем уравнение в виде:

$$(\cos x - \cos 2x + \cos 3x)^2 - \cos^2 x = \cos^2 3x - \cos^2 2x.$$

Разложим на множители левую и правые части уравнения:

$$\left(\cos 3x - \cos 2x\right)\left(2\cos x - \cos 2x + \cos 3x\right) = \left(\cos 3x - \cos 2x\right)\left(\cos 3x + \cos 2x\right).$$

Последнее уравнение перепишем в виде:

$$\left(\cos 3x - \cos 2x\right)\left(2\cos x - 2\cos 2x\right) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos 3x - \cos 2x = 0, \\ 2\cos x - 2\cos 2x = 0, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \cos 3x = \cos 2x, \\ \cos x = \cos 2x. \end{array}\right.$$

Решим уравнение $\cos 3x = \cos 2x$:

$$\left[\begin{array}{l} 3x = 2x + 2\pi n, n \in Z, \\ 3x = -2x + 2\pi m, m \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n \in Z, \\ x = \dfrac{2\pi m}{5},\ m \in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{2\pi m}{5},\ m \in Z.$$

На отрезке $\left[0;100\pi\right]$ содержится 251 решение: $0 \le \dfrac{2\pi m}{5} \le 100\pi \Rightarrow 0 \le m \le 250.$

Решим уравнение $\cos 2x = \cos x$:

$$\left[\begin{array}{l} 2x = x + 2\pi l, l \in Z, \\ 2x = -x + 2\pi k, k \in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi l, l \in Z, \\ x = \dfrac{2\pi k}{3},\ k \in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z.$$

На отрезке $\left[0;100\pi\right]$ содержится 151 решение: $0 \le \dfrac{2\pi k}{3} \le 100\pi \Rightarrow 0 \le k \le 150.$

Найдем, какие из найденных решений первого и второго уравнений совпадает:

$$x = \frac{2\pi k}{3} = \frac{2\pi m}{5} \Rightarrow 5k = 3m \Rightarrow \begin{cases} m = 5t \\ k = 3t \end{cases}, t \in Z \Rightarrow x = 2\pi, t \in Z.$$

На отрезке $\left[0;100\pi\right]$ содержится 51 решение: $0 \le 2\pi t \le 100\pi \to 0 \le t \le 50.$

Таким образом, общее число решений исходного уравнения равно: $251 + 151 - 51 = 351$

Ответ: 351 решение.

3. Найдем q, для которых $\dfrac{1}{2023} < \dfrac{231}{q} < \dfrac{1}{2022}$: $2022 \cdot 231 < q < 2023 \cdot 231.$ Обозначим через $N = 2022 \cdot 231,$ тогда $q \in \left\{N+1, N+2..., N+230\right\}$. Так как число $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$, то q не должно иметь 3,7 и 11 своими делителями.

Найдем сумму S_1 обратных величин без учета не сократимости дроби:

$$S_1 = \frac{1}{231} \cdot \sum_{q=N+1}^{N+230} q = \frac{1}{231} \cdot \frac{(2N + 231) \cdot 230}{2} = \frac{1}{231} \cdot \frac{(2 \cdot 2022 \cdot 231 + 231) \cdot 230}{2} = 4045 \cdot 115.$$

Найдем сумму S_2 обратных величин, для которых $q=3k$. Так как N делится на 3, то $q=N+3k,\ k=1,2,...,76$ и

$$S_2=\frac{1}{231}\cdot\sum_{k=1}^{76}q=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2N+231)\cdot 76}{2}=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2\cdot 2022+1)\cdot 76}{2}=4045\cdot 38.$$

Найдем сумму S_3 обратных величин, для которых $q=7k$. Так как N делится на 7, то $q=N+7k,\ k=1,2,...,32$ и

$$S_3=\frac{1}{231}\cdot\sum_{k=1}^{32}q=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2N+231)\cdot 32}{2}=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2\cdot 2022+1)\cdot 32}{2}=4045\cdot 16.$$

Найдем сумму S_4 обратных величин, для которых $q=11k$. Так как N делится на 11, то $q=N+11k,\ k=1,2,...,20$ и

$$S_4=\frac{1}{231}\cdot\sum_{k=1}^{20}q=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2N+231)\cdot 20}{2}=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2\cdot 2022+1)\cdot 20}{2}=4045\cdot 10.$$

Найдем сумму S_5 обратных величин, для которых $q=3\cdot 7k=21k.$ Так как N делится на 21, то $q=N+21k,\ k=1,2,...,10$ и

$$S_5=\frac{1}{231}\cdot\sum_{k=1}^{10}q=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2N+231)\cdot 10}{2}=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2\cdot 2022+1)\cdot 10}{2}=4045\cdot 5\,.$$

Найдем сумму S_6 обратных величин, для которых $q=3\cdot 11k=33k$ Так как N делится на 33, то $q=N+33k,\ k=1,2,...,6$ и

$$S_6=\frac{1}{231}\cdot\sum_{k=1}^{6}q=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2N+231)\cdot 6}{2}=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2\cdot 2022+1)\cdot 6}{2}=4045\cdot 3.$$

Найдем сумму S_7 обратных величин, для которых $q=7\cdot 11k=77k$. Так как N делится на 77, то $q=N+77k,\ k=1,2$ и

$$S_7=\frac{1}{231}\cdot\sum_{k=1}^{2}q=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2N+231)\cdot 2}{2}=\frac{1}{231}\cdot\frac{(2\cdot 2022+1)\cdot 2}{2}=4045\cdot 1.$$

Искомая сумма S равна

$$S=S_1-\left(S_2+S_3+S_4\right)+(S_5+S_6+S_7)=4045\left(115-38-16-10+5+3+1\right)=242700\,.$$

Ответ: 242700.

4. Введем переменные $a=\sqrt[4]{x-3},\ b=\sqrt[4]{y-4}.$ Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{64}{a^2}+\frac{36}{b^2}=44-4a-b.$$

Выполним следующие преобразования:

$$\frac{64}{a^2}+4a^2+\frac{36}{b^2}+b^2=44\Leftrightarrow\left(\frac{8}{a}-2a\right)^2+32+\left(\frac{6}{b}-b\right)^2+12=44\Leftrightarrow\left(\frac{8}{a}-2a\right)^2+\left(\frac{6}{b}-b\right)^2=0.$$

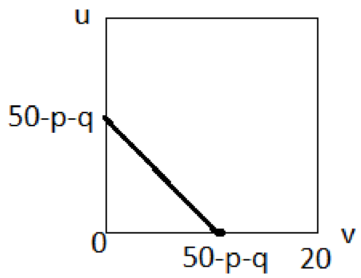
Отсюда получаем: $\begin{cases}\dfrac{8}{a}-2a=0,\\ \dfrac{6}{b}-b=0,\end{cases}$ или $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=6.\end{cases}$ Переходя к переменным $(x;y)$, имеем :

$\begin{cases}\sqrt{x-3}=4,\\ \sqrt{y-4}=6.\end{cases}$ Решая эту систему, находим $\begin{cases}x=19,\\ y=40.\end{cases}$

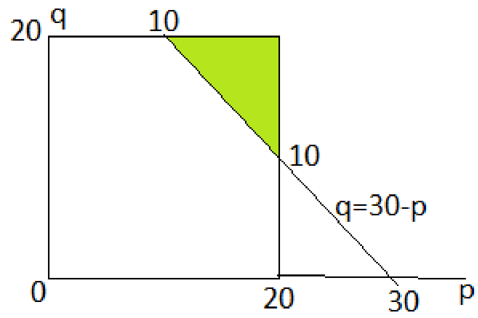
Ответ: $x=19, y=40$.

5. Перемножая скобки (четыре раза) и приводя подобные при x^{50}, получим искомый коэффициент. Все подобные члены имеют вид $x^p\cdot x^q\cdot x^u\cdot x^v$, $p+q+u+v=50$ с единичными коэффициентами. Их количество определяется числом различных неотрицательных решений p,r,u,v уравнения $p+q+u+v=50$ при наличии ограничений $0\le p\le 20$, $0\le q\le 20$, $0\le u\le 20$, $0\le v\le 20$.

Случай 1. $0\le 50-p-q\le 20\to p+q\ge 30,\ 0\le p\le 20, 0\le q\le 20$



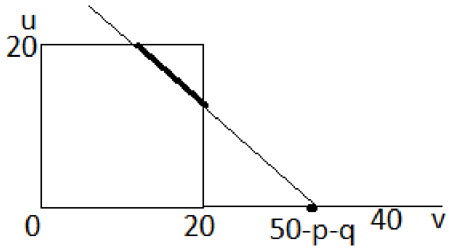
Число целых решений $(u;v)$ при фиксированных $(p;q)$ на выделенной линии равно $51-p-q$. Их нужно просуммировать по всем $(p;q)$, принадлежащим выделенной области (зеленая):



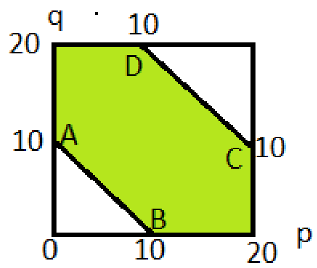
$$m_1=\sum_{p=10}^{20}\left(\sum_{q=30-p}^{20}(51-p-q)\right)=\sum_{p=10}^{20}\frac{(p-9)(52-p)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{p=10}^{20}\left(61p-9\cdot 52-p^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{p=10}^{20}\left(61p-9\cdot 52-p^2\right)==\frac{1}{2}\left(61\cdot 15\cdot 11-9\cdot 52\cdot 11-\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}+\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}\right)=1166.$$

Случай 2. $20<50-p-q\le 40\to 10\le p+q<30$



Число целых решений $(u;v)$ при фиксированных $(p;q)$ на выделенной линии равно $p+q-9$. Их нужно просуммировать по всем $(p;q)$, принадлежащим выделенной области (зеленая): граница AB входит, CD – не входит.



$$m_2=\sum_{p=0}^{9}\left(\sum_{q=10-p}^{20}(p+q-9)\right)+\sum_{p=10}^{20}\left(\sum_{q=0}^{29-p}(p+q-9)\right)=\sum_{p=0}^{9}\frac{(p+11)(p+12)}{2}+\sum_{p=10}^{20}\frac{(30-p)(p+11)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{9}\left(11\cdot 12+23p+p^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{p=10}^{20}\left(11\cdot 30+19p-p^2\right)=\frac{1}{2}\left(10\cdot 11\cdot 12+23\cdot 45+\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(11^2\cdot 30+19\cdot 15\cdot 11-\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}+\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(10\cdot 11\cdot 12+23\cdot 45+15\cdot 19\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(11^2\cdot 30+19\cdot 15\cdot 11-70\cdot 41+15\cdot 19\right)=\frac{1}{2}\left(10\cdot 11\cdot 12+15\cdot 11\cdot 8\right)+\frac{1}{2}\left(30\cdot 235-70\cdot 41\right)=8\cdot 11\cdot 15+11\cdot 5\cdot 38$$

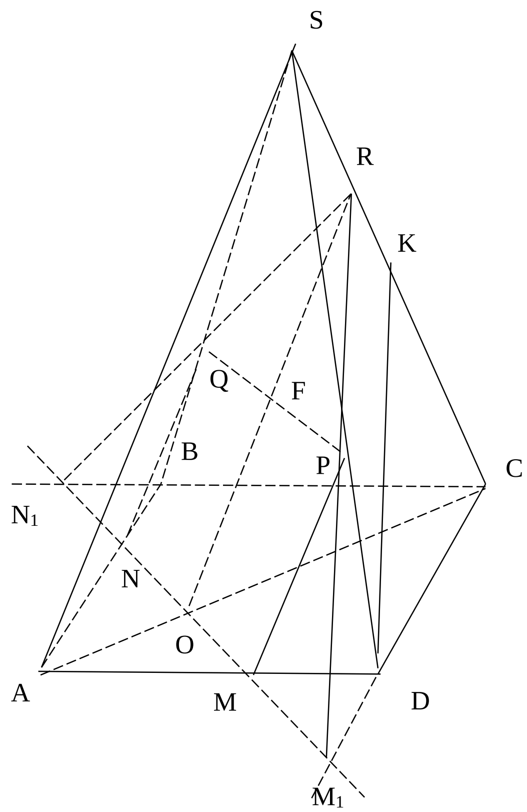
$$=5\cdot 11\cdot 62=3410$$

Случай 3. $50-p-q>40\to u+v=50-p-q>40\ \varnothing$

В итоге получаем $m=m_1+m_2=1166+3410=4576$.

Ответ: 4576.

6. Введем обозначения: $a-$ сторона основания, $b-$ боковое ребро, $N-$ середина стороны AB, $M-$ середина стороны AD, $K-$ середина ребра SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$.



Построим сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, проведенной через точки N и M параллельно медиане DK боковой грани SDC: через точки N и M проводим прямую NM до пересечения с прямыми BC и CD в точках N_1 и M_1 соответственно; через точку M_1 проводим прямую, параллельно медиане DK, точки пересечения этой прямой с ребрами SD и SC обозначим через P и R соответственно; соединяем точки R и N_1; точку пересечения RN_1 и SB обозначим через Q; соединяем Q и N, P и M. Сечение $NMPRQ$ построено. Найдем его площадь.

По условию $AM = MD = AN = NB = \frac{a}{2}$. Следовательно треугольник AMN прямоугольный, равнобедренный и $MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Заметим, что треугольники MDM_1 и NBN_1 прямоугольные. Они равны треугольнику AMN по катету и углу. Следовательно, $M_1D = N_1B = \frac{a}{2}$. Рассмотрим плоскость боковой грани SDC. Так как $M_1R \parallel DK$, то $\frac{RK}{CK} = \frac{M_1D}{CD} = \frac{1}{2}$. Тогда $RK = \frac{CK}{2} = \frac{b}{4}$, $SR = SK - RK = \frac{b}{4}$. Кроме того, $PR \parallel DK$, $\frac{SP}{PD} = \frac{SR}{RK} = 1$. Следовательно, $SP = PD = \frac{b}{2}$. Так как P середина ребра SD, а M середина основания AD, то PM средняя линия треугольника ADS и $PM = \frac{AS}{2} = \frac{b}{2}$, $PM \parallel AS$. Аналогично можно получить, что $QN = \frac{AS}{2} = \frac{b}{2}$, $QN \parallel AS$. Следовательно, четырехугольник $PMQN$ параллелограмм. Докажем, что это прямоугольник. Действительно, проекция AC ребра AS является диагональю квадрата $ABCD$.Потому AC перпендикулярна диагонали BD, а так как $BD \parallel MN$, то AC перпендикулярна MN. Отсюда следует, что AS перпендикулярно MN. В силу того, что $PM \parallel AS$ следует, что PM перпендикулярно MN. Таким образом, сечение $NMPRQ$ состоит из прямоугольника $PMQN$ со сторонами $MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $PM = \frac{b}{2}$ и равнобедренного треугольника PQR со основанием $PQ = \frac{b}{2}$ и высотой RF. Найдем площадь прямоугольника: $MN \cdot PM = \frac{ab}{2\sqrt{2}}$. Так как $\frac{CR}{RS} = \frac{CO}{OA} = 3$, то $\frac{OR}{AS} = \frac{CO}{OA} = \frac{3}{4}$. Отсюда получаем $OR = \frac{3b}{4}$, а $FR = \frac{3b}{4} - \frac{b}{2} = \frac{b}{4}$. Тогда площадь треугольника PQR равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{4} = \frac{ab}{8\sqrt{2}}$. Площадь сечения $NMPRQ$ равна: $\frac{ab}{2\sqrt{2}} + \frac{ab}{8\sqrt{2}} = \frac{5ab}{8\sqrt{2}} = \frac{5ab\sqrt{2}}{16}$. Подставляя $a = 1$, $b = 2$, находим $S = \frac{5\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $S = \frac{5\sqrt{2}}{8}$.

Вариант № 2

1. В районе расположено несколько жилых домов, общее число этажей в которых равно 40. Петя поднимался на крышу каждого из домов района, подсчитывал число домов меньшей этажности,

которые он мог наблюдать, и складывал полученные результаты. Какое наибольшее возможное число он мог получить?

Ответ: 200.

2. Сколько решений имеет уравнение $(\sin x - \cos 2x + \sin 3x)^2 = \sin^2 x - \cos^2 2x + \sin^2 3x$ на отрезке $\left[0; 20\pi\right]$?

Ответ: 80 решений.

3. На интервале $\left(\frac{1}{2022}; \frac{1}{2021}\right)$ отмечены все несократимые обыкновенные дроби вида $\frac{105}{q}$. Найти сумму обратных величин таких дробей.

Ответ: 97032.

4. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{4}{\sqrt{x-2}} + \frac{9}{\sqrt{y-3}} = 10 - \sqrt{x-2} - \sqrt{y-3} .$$

Ответ: $x = 6, y = 12$.

5. Найти коэффициент при x^{20} многочлена $P(x) = \left(1 + x + x^2 + ... + x^{10}\right)^3$.

Ответ: 66 .

6. Через середины сторон AB и AD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная медиане боковой грани SDC, проведенной из вершины D. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если сторона основания пирамиды $\sqrt{2}$, а боковое ребро 4.

Ответ: $S = \frac{5}{2}$.

Вариант № 3

1. В районе расположено несколько жилых домов, общее число этажей в которых равно 60. Петя поднимался на крышу каждого из домов района, подсчитывал число домов меньшей этажности, которые он мог наблюдать, и складывал полученные результаты. Какое наибольшее возможное число он мог получить?

Ответ: 450.

2. Сколько решений имеет уравнение

$(\cos 2x - \sin 3x + \cos 4x)^2 = \cos^2 2x - \sin^2 3x + \cos^2 4x$ на отрезке $\left[0;10\pi\right]$?

Ответ: 60 решений.

3. На интервале $\left(\frac{1}{2021};\frac{1}{2020}\right)$ отмечены все несократимые обыкновенные дроби вида $\frac{385}{q}$. Найти сумму обратных величин таких дробей.

Ответ: 484920.

4. Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{9}{\sqrt{x-5}}+\frac{16}{\sqrt{y-4}}=22-\sqrt{x-5}-4\sqrt{y-4}\ .$$

Ответ: $x=14, y=8$.

5. Найти коэффициент при x^{30} многочлена $P(x)=\left(1+x+x^2+...+x^{15}\right)^4$.

Ответ: 2736.

6. Через середины сторон AB и AD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная медиане боковой грани SDC, проведенной из вершины D. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если сторона основания пирамиды 2, а боковое ребро 8.

Ответ: $S=5\sqrt{2}$.

Вариант № 4

1. В районе расположено несколько жилых домов, общее число этажей в которых равно 70. Петя поднимался на крышу каждого из домов района, подсчитывал число домов меньшей этажности,
которые он мог наблюдать, и складывал полученные результаты. Какое наибольшее возможное число он мог получить?

Ответ: 612.

2. Сколько решений имеет уравнение
$(\sin 3x - \cos 4x + \cos 5x)^2 = \sin^2 3x - \cos^2 4x + \cos^2 5x$ на отрезке $\left[0; 30\pi\right]$?

Ответ: 241 решение.

3. На интервале $\left(\frac{1}{2020}; \frac{1}{2019}\right)$ отмечены все несократимые обыкновенные дроби вида $\frac{429}{q}$. Найти сумму обратных величин таких дробей.

Ответ: 484680 .

4. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{4}{\sqrt{x+1}} + \frac{16}{\sqrt{y+3}} = 20 - \sqrt{x+1} - 4\sqrt{y+3} \ .$$

Ответ: $x = 3, y = 1$.

5. Найти коэффициент при x^{40} многочлена $P(x) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{18}\right)^3$.

Ответ: 120.

6. Через середины сторон AB и AD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная медиане боковой грани SDC, проведенной из вершины D. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если сторона основания пирамиды 2, а
боковое ребро 6.

Ответ: $S = \frac{15\sqrt{2}}{4}$.

Критерии проверки работ, 11 класс
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, Москва

Задача 1.
1) Верно найдено наибольшее число в предположении, что дома одноэтажные и двухэтажные без достаточного обоснования – 0,5– 1 балл.
3) Арифметическая ошибка – 1,5 балла.
4) Решена верно – 2 балла.
Задача 2.
1) Задача сведена к решению простейших тригонометрических уравнений– 0,5 балла;
2) Найдены все решения исходного тригонометрического уравнения– 1 балл.
3) Арифметическая ошибка при подсчете количества решений, попадающих на заданный отрезок– 1,5 балла.
4) Решена верно – 2 балла.
Задача 3.
1) Получено множество значений параметра q – 0,5 балла.
2) Записана формула для вычисления суммы обратных величин и верно вычислено хотя бы одно их слагаемых– 1 балл.
3) Арифметическая ошибка – 1,5 балла.
4) Решена верно – 2 балла.
Задача 4.
1) Предпринята попытка введения параметров, но окончательного решения не получено – 0,5 балла;
2) Решение недостаточно обоснован – 1,5 балла.
3) Арифметическая ошибка – 1,5 балла.
4) Решена верно – 2 балла.
Задача 5.
1) Верный ход решения – 0,5 – 1 б.
2) Арифметическая ошибка – 1,5 балла.
3) Решена верно – 2 балла.
Задача 6.
1) Обосновано построено сечение– 0,5 балла.
2) Обосновано построено сечение, верно вычислены элементы сечения, необходимые для нахождения его площади – 0,5 – 1 балл;
3) Арифметическая ошибка – 1,5 балла.
4) Решена верно – 2 балла.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс, выезд 1

Вариант № 1

1. В школе три девятых класса. В каждом из них обучаются по 25 учеников. Нужно собрать из учеников этих классов команду для участия в городской олимпиаде по математике с условием того, что 1) сумма возрастов (полных лет) представителей одного класса в команде кратна 25; 2) сумма возрастов всех членов команды кратна 75. Ученик 7 класса Петя подумал и сказал, что собрать такую команду возможно. Почему он в этом уверен?

2. Вычислить $11211-112211+1122211-\ldots-1\underbrace{122\ldots2}_{2020}11$ (знаки чередуются).

3. Даны сто различных натуральных чисел, 50 из которых не больше100, а другие – больше 100, но не больше 200. Среди предложенных чисел нет двух, отличающихся на 100. Найти сумму всех чисел.

4. При каких a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \arcsin x+\arccos y=a \end{cases}$ имеет бесконечное число решений? Найти эти решения.

5. В произвольной треугольной пирамиде $ABCD$ произведено ее сечение плоскостью, пересекающей ребра AB, DC и DB в точках M, N, P соответственно. Точка M делит ребро AB в отношении $AM:MB=2$. Точка N делит ребро DC в отношении $DN:NC=3$. Точка P делит ребро DB в отношении $DP:PB=1:2$. Найти отношение, $AQ:QC$.

Приведём решение этого варианта.

1. В каждом из классов существует группа из учеников, суммарный возраст которых кратен 25. Действительно, пусть $k_1, k_2, ..., k_{25}$ – возраста учеников одного класса. Составим 25 групп из учеников одного класса. В первую войдет один ученик, возраст которого k_1, во вторую – два ученика с возрастами k_1 и k_2 и тд., в последнюю группу войдут все ученики класса. Сумма возрастов учеников группы с номером m равна

$$s_m = k_1 + k_2 + ... + k_m .$$

Тогда одна из сумм s_m либо делится на 25, либо две из них имеют одинаковые остатки при делении на 25. В первом случае, необходимая группа найдена. Рассмотрим второй случай. Обозначим через s_n и s_m, $m>n$ две суммы, имеющие равные остатки от деления на 25. Тогда их разность

$$s_m - s_n = k_{n+1} + k_{n+2} + ... + k_m$$

кратна 25 и необходимая группа может быть создана из учеников с номерами

$$n+1, n+2, ..., m .$$

Пусть A_1, A_2, A_3 – группы учеников, собранные в каждом из классов, с суммами возрастов

$$a_1 = 25\cdot m_1,\ a_2 = 25\cdot m_2,\ a_3 = 25\cdot m_3 .$$

Если m_1 кратно 3, то команду можно сформировать из учеников группы A_1. В противном случае, два из трех чисел $m_1, m_1+m_2, m_1+m_2+m_3$ имеют равные остатки при делении на 3 и их разность делится на три. Например, такой разностью является $(m_1+m_2+m_3)-m_1 = m_2+m_3$. Тогда число (a_2+a_3) делится на 75, а искомой командой является объединение групп A_2 и A_3.

2. Число слагаемых в выражении четно. Разобьем на пары соседние слагаемые и сложим их внутри пары:

$$\underbrace{1122...211}_{2k}-\underbrace{1122...211}_{2k-1}=101\cdot 10^{2k+1},\ k=1,2,...,1010.$$

Сумма пар (геометрическая прогрессия):

$$101\cdot 10^{3}+101\cdot 10^{5}+...+101\cdot 10^{2021}=101\cdot 10^{3}\cdot\left(1+10^{2}+...+10^{2018}\right)=101000\cdot\frac{10^{1010}-1}{99}$$

$$=101000\cdot\frac{\underbrace{99...9}_{1010}}{99}=10100\cdot\underbrace{10101...01}_{505\ единиц}=10\underbrace{20202...02}_{504\ двоек}01\cdot 1000=10\underbrace{20202...02}_{504\ двоек}01000.$$

С учетом знака разностей ответом служит число $-10\underbrace{20202...02}_{504\ двоек}01000$.

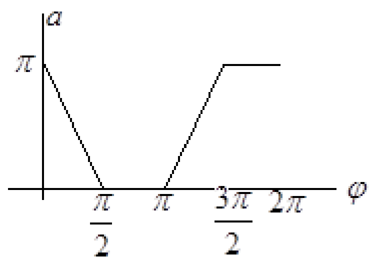
Ответ: $-10\underbrace{20202...02}_{504\ двоек}01000$.

3. Если 50 чисел не больших 100 объединить с 50 числами большими 100, из каждого из которых предварительно вычесть по 100, то образуется множество из 100 чисел, по условию разных. Это множество является перестановкой отрезка натуральных чисел 1, 2, 3, …, 99, 100 и имеет сумму чисел в него входящих равную $1+2+3+...+100=101\cdot 50$. Полученная сумма меньше искомой на величину $100\cdot 50=5000$. Таким образом,

$$s=101\cdot 50+100\cdot 50=50\cdot\left(101+100\right)=10050.$$

Ответ: 10050.

4. Параметризуем решения первого уравнения системы $\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases},\forall\varphi\in\left[0;2\pi\right)$ и подставим во второе уравнение $\arcsin\left(\cos\varphi\right)+\arccos\left(\sin\varphi\right)=a$. На рис изображен график зависимости a от φ, которая является кусочно- линейной функцией с изломами в точках $\varphi=\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$.

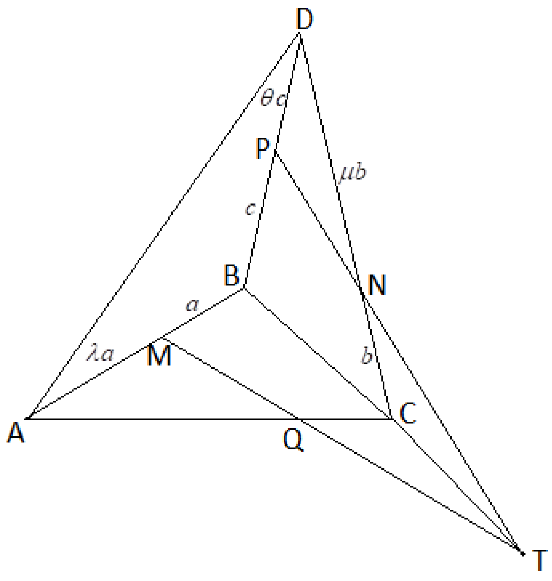


Если $a=0$, то второму уравнению удовлетворяют все $\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases},\forall\varphi\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

При $a=\pi$ решениями второго уравнения являются $\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases},\forall\varphi\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

Ответ: При $a=0$ $\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases},\forall\varphi\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. При $a=\pi$, $\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases},\forall\varphi\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

5. Пусть точка M делит ребро AB в отношении $AM:MB=\lambda$, точка N делит ребро DC в отношении $DN:NC=\mu$, а точка P делит ребро DB в отношении $DP:PB=\theta$. Найдем отношение $AQ:QC$.



Обозначим через T точку пересечение прямой PN с прямой BC, тогда точка Q это точка пересечение прямой MT с прямой AC. Введем обозначения $BM = a,\quad CN = b,\quad BP = c.$ Тогда $MA = \lambda a,\ ND = \mu b,$ а $PD = \theta c.$

Применим теорему Менелая для треугольника CBD и секущей PT:

$$\frac{CT}{TB} \cdot \frac{BP}{PD} \cdot \frac{DN}{NC} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{CT}{TB} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \mu = 1.$$

Отсюда находим $\frac{CT}{TB} = \frac{\theta}{\mu}.$

Теперь применим теорему Менелая для треугольника ACB и секущей MT:

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CT}{TB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1 \text{ или } \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{\theta}{\mu} \cdot \frac{1}{\lambda} = 1.$$

Отсюда получаем

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{\lambda\mu}{\theta}.$$

По условию задачи $\lambda = 2,\ \mu = 3, \theta = \frac{1}{2}$, тогда $\frac{AQ}{QC} = 12.$

Ответ: $AQ : QC = 12.$

Вариант № 2

1. В школе четыре десятых класса. В каждом из них обучаются по 23 ученика. Нужно собрать из учеников этих классов команду для участия в городской олимпиаде по математике с условием того, что 1) сумма возрастов (полных лет) представителей одного класса в команде кратна 23; 2) сумма возрастов всех членов команды кратна 92. Ученик 7 класса Петя подумал и сказал, что собрать такую команду возможно. Почему он в этом уверен?

Ответ: доказательство.

2. Вычислить $132 - 1332 + 13332 - \ldots - 1\underbrace{333\ldots3}_{2020}2$ (знаки чередуются).

Ответ: $-\underbrace{1212\ldots1200}_{1010\ \text{двоек и единиц}}$.

3. Даны 80 различных натуральных чисел, 40 из которых не больше 80, а другие – больше 80, но не больше 160. Среди предложенных чисел нет двух, отличающихся на 80. Найти сумму всех чисел.

Ответ: 6440.

4. Решить систему $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \arccos x-\arcsin y=a \end{cases}$ при любых a.

Ответ: 1) $\begin{cases} x_1=\cos\varphi \\ y_1=\sin\varphi \end{cases}, \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ при $a=0$; 2) $\begin{cases} x_1=-\sin\frac{a}{2} \\ y_1=\cos\frac{a}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2=\cos\frac{a}{2} \\ y_2=-\sin\frac{a}{2} \end{cases}$ при $\varphi\in(0;\pi)$;

3) $\begin{cases} x_1=\cos\varphi \\ y_1=\sin\varphi \end{cases}, \varphi\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ при $a=\pi$; 4) $\varnothing$ при $a\notin[0;\pi]$.

5. В произвольной треугольной пирамиде $ABCD$ произведено ее сечение плоскостью, пересекающей ребра AB, DC и DB в точках M, N, P соответственно. Точка M делит ребро AB в отношении $AM:MB=1:2$. Точка N делит ребро DC в отношении $DN:NC=3:2$. Точка P делит ребро DB в отношении $DP:PB=2$. Найти отношение $AQ:QC$.

Ответ: $AQ:QC=3:8$.

Вариант № 3

1. В школе два одиннадцатых класса. В каждом из них обучаются по 27 учеников. Нужно собрать из учеников этих классов команду для участия в городской олимпиаде по математике с условием того, что 1) сумма возрастов (полных лет) представителей одного класса в команде кратна 27; 2) сумма возрастов всех членов команды кратна 54. Ученик 7 класса Петя подумал и сказал, что собрать такую команду возможно. Почему он в этом уверен?

Ответ: доказательство.

2. Вычислить $143-1443+14443-\ldots-\underbrace{144\ldots43}_{2020}$ (знаки чередуются).

Ответ: $\underbrace{1313\ldots1300}_{1010\ \text{троек и единиц}}$.

3. Даны 60 различных натуральных чисел, 30 из которых не больше 60, а другие – больше 60, но не больше 120. Среди предложенных чисел нет двух, отличающихся на 60. Найти сумму всех чисел.

Ответ: 3630.

4. При каких a система $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 3\arcsin x-2\arccos y=a \end{cases}$ совместна?

Ответ: $a\in\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

5. В произвольной треугольной пирамиде $ABCD$ произведено ее сечение плоскостью, пересекающей ребра AB, DC и DB в точках M, N, P соответственно. Точка M делит ребро AB в отношении $AM:MB=1:3$. Точка N делит ребро DC в отношении $DN:NC=4:3$. Точка P делит ребро DB в отношении $DP:PB=3$. Найти отношение $AQ:QC$.

Ответ: $AQ:QC=4:27$.

Вариант № 4

1. В школе пять восьмых классов. В каждом из них обучаются по 21 ученику. Нужно собрать из учеников этих классов команду для участия в городской олимпиаде по математике с условием того, что 1) сумма возрастов (полных лет) представителей одного класса в команде кратна 21; 2) сумма возрастов всех членов команды кратна 105. Ученик 7 класса Петя подумал и сказал, что собрать такую команду возможно. Почему он в этом уверен?

Ответ: доказательство.

2. Вычислить $154-1554+15554-\ldots-\underbrace{155\ldots5}_{2020}4$ (знаки чередуются).

Ответ: $\underbrace{1414\ldots1400}_{1010 \text{ четверок и единиц}}$.

3. Даны 40 различных натуральных чисел, 20 из которых не больше 40, а другие – больше 40, но не больше 80. Среди предложенных чисел нет двух, отличающихся на 40. Найти сумму всех чисел.

Ответ: 1620.

4. Найти наибольшее значение a, при котором система $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \arcsin x + 4\arccos y = a \end{cases}$ имеет решение.

Ответ: $a=4\pi$.

5. В произвольной треугольной пирамиде $ABCD$ произведено ее сечение плоскостью, пересекающей ребра AB, DC и DB в точках M, N, P соответственно. Точка M делит ребро AB в отношении $AM:MB=2:3$. Точка N делит ребро DC в отношении $DN:NC=3:5$. Точка P делит ребро DB в отношении $DP:PB=4$. Найти отношение $AQ:QC$.

Ответ: $AQ:QC=1:10$.

Критерии проверки работ, 11 класс
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, выезд 1

Задача 1.

1) Составил какое-либо разумное уравнение – 0,5 балла.

2) Рассмотрел какой -либо частный случай – 1 балл.

3) Арифметическая ошибка –1,5 балла.

4) Решена верно – 2 балла.

Задача 2.

1) Нашёл какие-либо закономерности – 0,5 балла.

2) Доказал, получил геометрическую прогрессию – 1 балл.

4) Недочеты в решении –1,5 балла.

3) Получил ответ (с решением) в любом (не упрощённом) виде – 2 балла.

Задача 3.

1) Посчитал частный случай – 1 балл.

2) Недочеты в решении –1,5 балла.

3) Решена верно – 2 балла.

Задача 4.

1) Сделал разумную замену переменной – 0,5 балла.

2) Построен верный график(например, $y = arcsin(sin\varphi))$ – 1 балл.

3) Указана часть верного ответа (с решением) –1,5 балла.

4) Решена верно – 2 балла.

Задача 5.

1) Сделал чертёж, нашёл подобные треугольники – 0,5 балла.

2) Ответ с ошибкой в зависимости от ошибки – 1 –1,5 балла.

3) Решена верно – 2 балла.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс, выезд 2

Вариант № 1

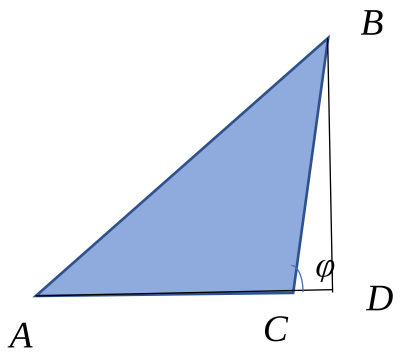
1. Поселок А находится на прямолинейном участке дороги с асфальтовым покрытием, а деревня B – на поле, в стороне от дороги. Пете необходимо добраться от А до B как можно быстрее. Он решил, что часть пути он пройдет по дороге до точки С, а потом свернет с нее и пойдет по прямой до B. Скорость его передвижения по дороге в два раза больше чем по полю. Найти значение угла ACB, при котором время в пути будет наименьшим. (А и B точки, дорога – прямая линия)

2. Целое положительное число $a \le 1000$ имеет только два простых делителя: 2 и 3, а число всех его делителей, включая 1 и a, само является делителем a. Сколько существует таких чисел a? Найти наибольшее среди них.

3. Петя написал в тетради 200 последовательных нечетных натуральных чисел и сообщил Васе по телефону, что их сумма делится на 56. Какое наименьшее значение могла иметь эта сумма?

4. При каких q уравнение $\left(q^2-2q-3\right)x^2+qx+p+1=0$ имеет только положительные корни для всех положительных p?

5. В треугольнике ABC площади 8 проведены медианы AM, BN, CQ. На прямой AC взята точка P так, что $AP:PC=1:3$. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках P, M, N, Q.



Приведём решение этого варианта.

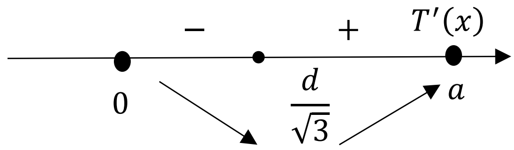
1. Обозначим через a длину AD, x – длина отрезка CD, BD – перпендикуляр к прямой AD, d – длина перпендикуляра, φ – угол треугольника CBD. Обозначим скорость по полю v. Тогда скорость по шоссе $2v$. А время в пути: $T(x)=\frac{AC}{2v}+\frac{BC}{v}=\frac{a-x}{2v}+\frac{\sqrt{x^2+d^2}}{v}$, $x\in[0;a]$.

Вычислим производную, получим:

$T'(x)=\frac{1}{2v}\left(-1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+d^2}}\right)$. $T'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=\sqrt{x^2+d^2} \Rightarrow x=\frac{d}{\sqrt{3}}$.

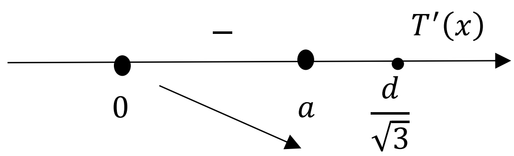
Если $\frac{d}{\sqrt{3}}\in[0;a]$, то $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$ – точка минимума функции $T(x)$. В этом случае

$$\cos\varphi=\frac{d/\sqrt{3}}{\sqrt{d^2/3+d^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3}.$$



Если $\frac{d}{\sqrt{3}}>a$, то функция $T(x)$ убывает на отрезке $[0;a]$ и $T_{min}=T(a)$, в этом случае

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}.$$



Ответ: 120^0, если $\frac{d}{\sqrt{3}}\in[0;a]$; $\pi-arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}$, если $\frac{d}{\sqrt{3}}>a$.

2. Число $a=2^m\cdot 3^n,\ m\ge 1,\ n\ge 1$ имеет всего $(m+1)(n+1)$ делителей, причем из условия следует $m+1=2^{k_1}\cdot 3^{k_2}$, $n+1=2^{s_1}\cdot 3^{s_2}$, $k_1+s_1\le m,\ k_2+s_2\le n$. Имеем цепочки неравенств

$$a\le 1000\to 2^m\cdot 3^n\le 1000\to 2^m\le\frac{1000}{3}\to 2^m\le 2^8=256\to m+1\le 9,$$

$$3^n\le\frac{1000}{2}\to 3^n\le 3^5=243\to n+1\le 6\ .$$

С учетом того, что $m+1=2^{k_1}\cdot 3^{k_2}$ возможными значениями $m+1$ являются $m+1=2,3,4,6,8,9$. Аналогично, $n+1=2^{s_1}\cdot 3^{s_2}$ может принимать значения $n+1=2,3,4,6$.

В таблицу помещены все возможные значения $a=2^m\cdot 3^n$ для таких m и n.

Для каждой пары чисел $(m;n)$ в таблице (до вычисления, соответствующего им числа a) устанавливаются числа k_1,k_2,s_1 и s_2, проверяются условия $k_1+s_1\le m,\ k_2+s_2\le n$ и в соответствующую клетку вносится число $a=2^m\cdot 3^n$. Такие клетки (их 11 штук) выделены в таблице и наибольшее число $a\le 1000$ в них записанное равно 972.

		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=5$
	$m+1$ \ $n+1$	2	3	4	6
$m=1$	2	6	18	54	486
$m=2$	3	12	36	108	972
$m=3$	4	24	72	216	1944
$m=5$	6	96	288	864	7776
$m=7$	8	384	1152	3456	31104
$m=8$	9	768	2304	6912	62208

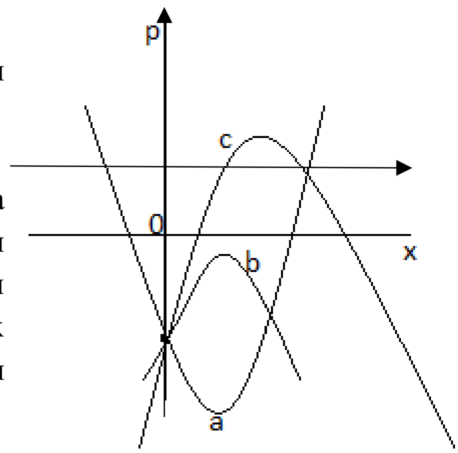
Ответ: 1) 11 чисел; 2) $a_{\max}=972$.

3. Все 200 написанных чисел можно представить в виде: $n-199,n-197,\dots,n-1,n+1,n+3,\dots,n+199$ при некотором четном $n\ge 200$. Их сумма s, равная $200n$, делится на 56, если $n=14k,\ k\ge 15$. Наименьшее s соответствует $k=15\to n=14\cdot 15=210\to s_{\min}=200\cdot 210=42000$.

Ответ: 42000.

4. Случай 1. $q^2-2q-3\ne 0$. На плоскости $(x;p)$ расположена парабола $p=-(q^2-2q-3)x^2-qx-1$. При любом q парабола проходит через точку $(0;-1)$.

Абсциссы пересечения параболы и прямых $p=t>0$ соответствуют решениям уравнения. Для парабол типа a, соответствующим случаю $q^2-2q-3<0$, есть точки пересечения с отрицательными абсциссами. Для парабол типа b и c, $q^2-2q-3>0$, не для всех положительных t уравнение имеет корни. Таким образом, случай 1 не реализуется.

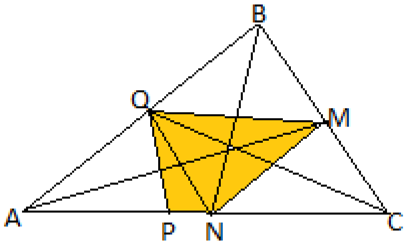


Случай 2. $q^2-2q-3=0$. Для $q=3$ уравнение имеет вид $3x+p+1=0$. Его решение $x=-\dfrac{p+1}{3}$ отрицательно при любых положительных p.

Для $q=-1$ уравнение имеет вид $-x+p+1=0$ и его решение $x=p+1$ положительно при любых $p>0$.

Ответ: $q=-1$.

5. В треугольнике ABC площади s проведены медианы AM, BN, CQ. На прямой AC взята точка P так, что $AP:PC=\lambda$.
Случай 1. Точка P расположена на стороне AC.



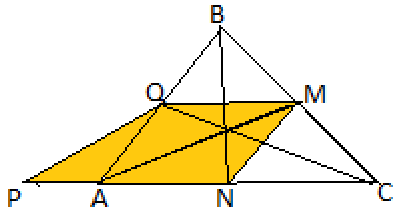
$$\frac{AP}{PC}=\lambda \to AP=\frac{\lambda}{\lambda+1}AC \to PN=\frac{|\lambda-1|}{2(\lambda+1)}AC$$

$$S_{QPN}:S_{AQN}=\frac{PN}{AN}=\frac{|\lambda-1|}{\lambda+1}\to S_{QPN}=\frac{|\lambda-1|s}{4(\lambda+1)}$$

При $0<\lambda<1,\ S_{PQMN}=S_{PNQ}+S_{QMN}=\frac{s}{4}+\frac{1-\lambda}{4(\lambda+1)}s=\frac{s}{2(\lambda+1)}$ (*)

При $\lambda>1$ $S_{PNQM}=S_{PQN}+S_{PQM}=S_{PQN}+S_{NQM}=\frac{\lambda-1}{4(\lambda+1)}s+\frac{s}{4}=\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}s$ (**)

Случай 2. Точка P не лежит на стороне AC треугольника.
Для случая $0<\lambda<1$

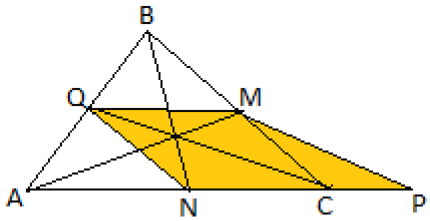


$$PA=\frac{\lambda}{1-\lambda}AC\to\frac{S_{PQA}}{S_{AQC}}=\frac{PA}{AC}=\frac{\lambda}{1-\lambda}\to S_{PQA}=\frac{\lambda}{2(1-\lambda)}s$$

Тогда

$$S_{PQMN}=S_{PQA}+S_{AQMN}=\frac{\lambda s}{2(1-\lambda)}+\frac{s}{2}=\frac{s}{2(1-\lambda)}\quad (***)$$

Для случая $\lambda>1$



$$PC:AC=\frac{1}{\lambda-1}\to\frac{S_{PMC}}{S_{AMC}}=\frac{PC}{AC}=\frac{1}{\lambda-1}\to S_{PMC}=\frac{s}{2(\lambda-1)}$$

Тогда

$$S_{PMQN}=S_{PMC}+\frac{s}{2}=\frac{s}{2(\lambda-1)}+\frac{s}{2}=\frac{\lambda}{2(\lambda-1)}s\quad (****)$$

Объединяя, получим ответ:
при $0<\lambda<1$ две возможности

$$S_1=\frac{s}{2(\lambda+1)}\quad S_2=\frac{s}{2(1-\lambda)};$$

при $\lambda>1$ две возможности

$$S_1=\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}s\quad S_2=\frac{\lambda}{2(\lambda-1)}s.$$

Ответ: $S_1=3,\ S_2=6$.

Вариант № 2

1. Поселок А находится на прямолинейном участке дороги с асфальтовым покрытием, а деревня В – в поле, на расстоянии 2 км от дороги. Петя решил, что часть пути он пройдет по дороге, а потом свернет с нее и пойдет по прямой до В. Скорость его передвижения по дороге 5 км/ч, по полю – 3 км/ч. Найти длину пути, пройденного Петром по полю, если общее время в пути оказалось минимально возможным. (А и В точки, дорога – прямая линия).

Ответ: 2,5 км, если $a\ge 1{,}5$ км; $\sqrt{4+a^2}$, если $a<1{,}5$ км.

2. Целое положительное число $a \le 2000$ имеет только два простых делителя: 2 и 5, а число всех его делителей, включая 1 и a, само является делителем a. Сколько существует таких чисел a? Найти наименьшее среди них.

Ответ: 1) 5 чисел; 2) $a_{\min} = 40$.

3. Петя написал в тетради 301 последовательных четных натуральных чисел и сообщил Васе по телефону, что их сумма делится на 119. Какое наименьшее значение могла иметь эта сумма?

Ответ: 92106.

4. При каких q уравнение $\left(q^2+q-2\right)x^2+(q+1)x-2+p=0$ имеет только отрицательные корни для всех отрицательных p?

Ответ: $q=-2$.

5. В треугольнике ABC площади 10 проведены медианы AM, BN, CQ. На прямой AC взята точка P так, что $AP:PC=3:2$. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках P, M, N, Q.

Ответ: $S_1=3,\ S_2=15$.

Вариант № 3

1. Поселок А находится на прямолинейном участке дороги с асфальтовым покрытием, а деревня В – в поле, на расстоянии 5 км от дороги и 13 км от А. Петя решил, что часть пути он пройдет по дороге, а потом свернет с нее и пойдет по прямой до В. Скорость его передвижения по дороге 5 км/ч, по полю – 3 км/ч. Найти длину отрезка пути, пройденного Петром по дороге, если общее время в пути оказалось минимально возможным. (А и В точки, дорога – прямая линия).

Ответ: 8,25 км.

2. Целое положительное число $a \le 10^5$ имеет только два простых делителя: 3 и 5, а число всех его делителей, включая 1 и a, само является делителем a. Сколько существует таких чисел a? Найти наибольшее среди них.

Ответ: 1) 4 числа; 2) $a_{\max} = 50625$.

3. Петя написал в тетради 100 последовательных нечетных натуральных чисел и сообщил Васе по телефону, что их сумма делится на 65. Какое наименьшее значение могла иметь эта сумма?

Ответ: 10400.

4. При каких q уравнение $\left(q^2-3q-4\right)x^2+(q-2)x+p+3=0$ имеет только отрицательные корни для всех положительных p?

Ответ: $q=4$.

5. В треугольнике ABC площади 20 проведены медианы AM, BN, CQ. На прямой AC взята точка P так, что $AP:PC=2:3$. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках P, M, N, Q.

Ответ: $S_1=6,\ S_2=30$.

Вариант № 4

1. Поселок А находится на прямолинейном участке дороги с асфальтовым покрытием, а деревня В – в поле, на расстоянии 5 км от дороги и 13 км от А. Пете необходимо добраться от А до В как можно быстрее. Сначала Петр хотел идти в деревню В напрямик, но потом решил, что часть пути пройдет по дороге, а затем свернет с нее и пойдет по прямой до В. Скорость его передвижения по дороге 5 км/ч, по полю – 4 км/ч. Какое максимальное время может сэкономить Петр, выбрав такой маршрут? (А и В точки, дорога – прямая линия).
Ответ: 6 мин.
2. Целое положительное число $a \leq 50000$ имеет только два простых делителя: 2 и 7, а число всех его делителей, включая 1 и a, само является делителем a. Сколько существует таких чисел a? Найти наименьшее среди них.

Ответ: 1) 5 чисел; 2) $a_{\min} = 56$.

3. Петя написал в тетради 153 последовательных четных натуральных чисел и сообщил Васе по телефону, что их сумма делится на 221. Какое наименьшее значение могла иметь эта сумма?
Ответ: 23868.
4. При каких q уравнение $\left(q^2 - 5q + 6\right)x^2 + (q-4)x + p - 1 = 0$ имеет только отрицательные корни для всех отрицательных p ?

Ответ: $q = 3, q = 2$.

5. В треугольнике ABC площади 14 проведены медианы AM, BN, CQ. На прямой AC взята точка P так, что $AP : PC = 4:3$. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках P, M, N, Q.

Ответ: $S_1 = 4, \ S_2 = 28$.

Критерии проверки работ, 11 класс
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, выезд 2

Задача 1.

1) Сделан чертёж, составлено уравнение пути – 0,5 балла.

2) Верно составлена функция для исследования и указана её область определения – 1 балл.

3) Верно вычислена производная и найдена точка – не более 1,5 балла.

Возможно рассмотрение нескольких случаев расположения найденной точки относительно области задания функции.

4) Решена верно – 2 балла.

Задача 2.

1) Выписаны несколько примеров (частных случаев) – 0,5 балла.

2) Выписана формула для числа делителей и начато исследование, – не более 1 балла.

3) Указаны числа, удовлетворяющие условию, – не более 1,5 балла.

4) Решена верно – 2 балла.

Задача 3.

1) Указана арифметическая прогрессия – не более 0,5 балла;

2) Найдена сумма прогрессии с ошибкой – 1 балл;

3) Вычислена сумма прогрессии – не более 1,5 балла.

4) Решена верно – 2 балла.

Задача 4.

1) Предпринята попытка построить все возможные расположения парабол или составлена система для данных условий задачи без учёта $D>0$ – 0,5 балла;

2) Верно рассмотрен 1 из случаев или система решена – не более 1 балла;

3) Нет полного обоснования выбора значения q или доказана несовместность системы – не более 1,5 балла.

Возможны несколько вариантов решения, например, графический или аналитический (с помощью системы).

4) Решена верно – 2 балла.

Задача 5.

1) Вычислена площадь одного из треугольников, возможно с ошибкой – не более 0,5 балла;

2) Вычислена площадь для 1 случая (как единственного) – не более 1 балла;

3) Вычислена верно площадь для 1 случая, остальные с ошибкой – не более 1,5 балла.

4) Решена верно – 2 балла.