

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика,
7 класс

Вариант № 1

1. Каждая из четырех сторон квадрата разделена точками на 9 равных отрезков. На каждой стороне квадрата выбирается по точке деления, исключая вершины, и они являются вершинами выпуклого четырехугольника. Сколько существует таких четырехугольников, у которых ни одна из диагоналей не параллельна сторонам квадрата?

2. При каком натуральном n справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} = 50 ?$$

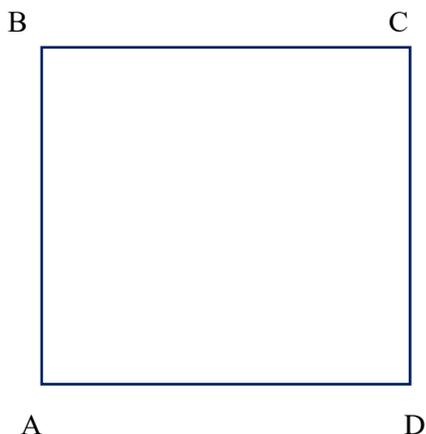
3. Петя, Ваня, Сергей и Иван Иванович являются учредителями предприятия с некоторым начальным капиталом. Если Петя удвоит свою долю в начальном капитале, то он возрастет на 20%. Если то же проделает Ваня, то капитал возрастет на 30%. Если Сергей увеличит свою долю в три раза, то рост капитала составит 40%. Во сколько раз должен увеличить свою долю капитала Иван Иванович, чтобы его доля в начальном капитале превысила 51%?

4. Найти последнюю цифру в десятичной записи числа $1^2 + 2^2 + \dots + 2023^2$.

5. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагональ BD является биссектрисой угла при вершине B , составляет острый угол 72° с другой диагональю и угол 53° со стороной AD . Найти углы четырехугольника.

Задача 1 **Ответ:** 3136.

Решение.



На каждой стороне квадрата находится по 10 точек (включая вершины). Вершинами произвольного выпуклого четырехугольника могут являться 8 точек на каждой стороне квадрата (исключая вершины). Так, на стороне AB квадрата $ABCD$ вершина произвольного четырехугольника может быть выбрана любым из 8 способов, тогда на противоположной стороне CD вершина искомого четырехугольника может быть выбрана 7 способами (по условию, диагональ четырехугольника не может быть параллельна BC , поэтому для каждого из 8 вариантов выбора вершины на AB мы не рассматриваем горизонтальное расположение диагонали, и на CD остается 7 вариантов для вершины). Таким образом, на двух противоположных сторонах квадрата можно выбрать концы диагонали, не параллельной другой паре сторон, $8 \cdot 7$ способами. Выбор двух

диагоналей определяет искомый четырехугольник, то есть его выбор может быть осуществлен $(8 \cdot 7)^2$ различными способами: $(8 \cdot 7)^2 = 3136$.

Задача 2 **Ответ:** 5100.

Решение. Умножая числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное к ее знаменателю, получим:

$$\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{(\sqrt{1}+\sqrt{3})(\sqrt{1}-\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})} + \dots + \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{(\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})}.$$

Применяя формулу разности квадратов в знаменателях, найдем:

$$\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{1-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7} + \dots + \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{(2n-1)-(2n+1)} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{-2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2} + \dots + \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{-2} = = -\frac{1}{2}(\sqrt{1}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\dots+\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{1}-\sqrt{2n+1}) = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}.$$

Тогда по условию $\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2} = 50$, отсюда находим искомое значение n :

$$\sqrt{2n+1}-1 = 100; \quad \sqrt{2n+1} = 101; \quad 2n+1 = 101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 + 1; \\ 2n = 10000 + 200 = 10200; \quad n = 5100.$$

Задача 3 **Ответ:** более, чем в $\frac{17}{7}$ раза.

Решение. Обозначим x, y, z, u – вклады в начальный капитал Пети, Вани, Сергея и Ивана Ивановича соответственно, $k = x + y + z + u$ – начальный капитал. По условию задачи

$$\begin{cases} x + y + z + u = k \\ 2x + y + z + u = 1,2k \\ x + 2y + z + u = 1,3k \\ x + y + 3z + u = 1,4k \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x = 0,2k; y = 0,3k; z = 0,2k$. Пусть доля капитала Ивана Ивановича была увеличена в t раз. Тогда его доля в начальном капитале превысит 51%, если выполнено неравенство

$$\frac{tu}{x+y+z+tu} > 0,51 \text{ ,или } \frac{tu}{k+(t-1)u} > 0,51.$$

Умножая обе части неравенства на 100 и положительный знаменатель, получим:

$$100tu > 51k + 51(t-1)u = 51k - 51u + 51tu; 49tu > 51(k-u); 49t > 51\left(\frac{k}{u} - 1\right).$$

Имеем: $\frac{u}{k} = \frac{k-x-y-z}{k} = 1 - \frac{x}{k} - \frac{y}{k} - \frac{z}{k} = 1 - 0,2 - 0,3 - 0,2 = 0,3$.

Тогда находим $49t > 51\left(\frac{1}{0,3} - 1\right) = 51 \cdot \left(\frac{10}{3} - 1\right) = 51 \cdot \frac{7}{3}; 7t > 51 \cdot \frac{1}{3} = 17; t > \frac{17}{7}$.

Задача 4 **Ответ:** 4.

Решение. Заметим, что для каждого десятка слагаемых $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2; 11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 20^2; \dots; 2011^2 + 2012^2 + 2013^2 + \dots + 2020^2$ каждая сумма оканчивается на одно и то же число. Найдем его для первого десятка: $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385$ – оканчивается на 5. Таких десятков 202, поэтому сумма $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2020^2$ оканчивается на 0. Остаются слагаемые $2021^2 + 2022^2 + 2023^2 = \dots + 1 + \dots + 4 + \dots + 9 = \dots + 4$.

Задача 5 **Ответ:** $\angle A = 72^0; \angle B = 110^0; \angle C = 108^0; \angle D = 70^0$ или $\angle A = 108^0; \angle B = 38^0; \angle C = 72^0; \angle D = 142^0$

Вариант 2

1. Каждая из четырех сторон квадрата разделена точками на 10 равных отрезков. На каждой стороне квадрата выбирается по точке деления, исключая вершины, и они являются вершинами выпуклого четырехугольника. Сколько существует таких четырехугольников, у которых ни одна из диагоналей не параллельна сторонам квадрата?

Ответ: 5184.

2. При каком натуральном n справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{4}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{7}}} + \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{11}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3n-2+\sqrt{3n+1}}} = 10 ?$$

Ответ: 320

3. Петя, Ваня, Сергей и Иван Иванович являются учредителями предприятия с некоторым начальным капиталом. Если Петя удвоит свою долю в начальном капитале, то он возрастет на 30%. Если то же проделает Ваня, то капитал возрастет на 25%. Если Сергей увеличит свою долю в три раза, то рост капитала составит 50%. Во сколько раз должен увеличить свою долю капитала Иван Иванович, чтобы его доля в начальном капитале превысила 60%?

Ответ: более, чем в 6 раз.

4. Найти последнюю цифру в десятичной записи числа $1^2 + 2^2 + \dots + 2022^2$.

Ответ: 5.

5. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагональ BD является биссектрисой угла при вершине B , составляет острый угол 80° с другой диагональю и угол 55° со стороной AD . Найти углы четырехугольника.

Ответ: $80^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 90^\circ$ или $100^\circ, 50^\circ, 80^\circ, 130^\circ$.

Вариант 3

1. Каждая из четырех сторон квадрата разделена точками на 11 равных отрезков. На каждой стороне квадрата выбирается по точке деления, исключая вершины, и они являются вершинами выпуклого четырехугольника. Сколько существует таких четырехугольников, у которых ни одна из диагоналей не параллельна сторонам квадрата?

Ответ: 8100.

2. При каком натуральном n справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{9}}} + \frac{1}{\sqrt{9+\sqrt{13}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n-3+\sqrt{4n+1}}} = 20 ?$$

Ответ: 1640.

3. Петя, Ваня, Сергей и Иван Иванович являются учредителями предприятия с некоторым начальным капиталом. Если Петя удвоит свою долю в начальном капитале, то он возрастет на 25%. Если то же проделает Ваня, то капитал возрастет на 35%. Если Сергей увеличит свою долю в три раза, то рост капитала составит 40%. Во сколько раз должен увеличить свою долю капитала Иван Иванович, чтобы его доля в начальном капитале превысила 50%?

Ответ: более, чем в 4 раза

4. Найти последнюю цифру в десятичной записи числа $1^2 + 2^2 + \dots + 2021^2$.

Ответ: 1.

5. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагональ BD является биссектрисой угла при вершине B , составляет острый угол 75° с другой диагональю и угол 70° со стороной AD . Найти углы четырехугольника.

Ответ: $75^\circ, 70^\circ, 105^\circ, 110^\circ$ или $105^\circ, 10^\circ, 75^\circ, 170^\circ$.

Вариант 4

1. Каждая из четырех сторон квадрата разделена точками на 12 равных отрезков. На каждой стороне квадрата выбирается по точке деления, исключая вершины, и они являются вершинами выпуклого четырехугольника. Сколько существует таких четырехугольников, у которых ни одна из диагоналей не параллельна сторонам квадрата?

Ответ: 12100.

2. При каком натуральном n справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{11}}} + \frac{1}{\sqrt{11+\sqrt{16}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{5n-4+\sqrt{5n+1}}} = 30 ?$$

Ответ: 4560.

3. Петя, Ваня, Сергей и Иван Иванович являются учредителями предприятия с некоторым начальным капиталом. Если Петя удвоит свою долю в начальном капитале, то он возрастет на 30%. Если то же проделает Ваня, то капитал возрастет на 40%. Если Сергей увеличит свою долю в три раза, то рост капитала составит 20%. Во сколько раз должен увеличить свою долю капитала Иван Иванович, чтобы его доля в начальном капитале превысила 75%?

Ответ: более, чем в 12 раз.

4. Найти последнюю цифру в десятичной записи числа $1^2 + 2^2 + \dots + 2021^2$.

Ответ: 0.

5. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагональ BD является биссектрисой угла при вершине B , составляет острый угол 65° с другой диагональю и угол 55° со стороной AD . Найти углы четырехугольника.

Ответ: $65^\circ, 120^\circ, 115^\circ, 60^\circ$ или $115^\circ, 20^\circ, 65^\circ, 160^\circ$.

**Критерии проверки работ
финального тура олимпиады Росатом 04.03.2023 8 класс**

Во всех задачах верный ответ без обоснования 0

1. задача

- попытки вычислить количество способов выбора точек на сторонах квадрата под вершины четырехугольника, не увенчавшиеся успехом **0.5**
- вычислено количество способов выбора точек на двух противоположных сторонах квадрата под вершины четырехугольника **1**
- получена верная формула для количества искомых четырехугольников, но в вычислениях имеется арифметическая ошибка или присутствуют недочеты в решении (например, недостаточное обоснование) **1.5**
- решена верно **2.0**

2. задача

- догадался умножить дроби на сопряженные выражения, далее не решил **0.5**
- преобразовал левую часть к разности двух слагаемых, далее не решил **1.0**
- арифметическая ошибка в ответе **1.5**
- решена верно **2.0**

3. задача

- введены обозначения и условия задачи записаны в виде равенств **0.5**
- последнее условие задачи записано в виде неравенства **1.0**
- решена записанная система уравнений, но оценка для искомой величины вычислена с арифметической ошибкой **1.5**
- решена верно **2.0**

4. задача

- заметил, что можно не учитывать числа, оканчивающиеся нулем **0.5**
- выделил какие-либо группы чисел, суммы которых оканчиваются на определенную цифру **1.0**
- арифметическая ошибка в ответе или недостаточное обоснование **1.5**
- решена верно **2.0**

5. задача

- верный чертеж и некоторые равные вписанные углы **0.5**
- найден 1 или 2 угла ABCD. **1.0**
- найдены все углы ABCD, но есть арифметическая ошибка **1.5**
- решена верно **2.0**