Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика,
8 класс

Вариант № 1

1. Ученики 8^A класса разделились на три категории. В первую вошли ученики, любящие свою школу, во вторую – «любящие, но не очень», а в третью – те, кто не любит свою школу. Ученики из первой категории на вопросы анкеты всегда дают правдивые ответы, из третьей – всегда лгут. Ученики второй группы обманывают и говорят правду при ответе на вопросы строго «через раз». На три вопроса анкеты: 1) Любишь ли ты школу? 2) Любишь ли ты школу, но не очень? 3) Ты не любишь школу? учеников просили ответить «Да» или «Нет». Оказалось, что «Да» на первый вопрос ответили 25, на второй – 21, на третий – 6 учеников. Сколько учеников класса «любят школу, но не очень», если в классе 31 ученик?

2. При каких значениях a корни уравнения $x^2-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)x+(a+2\sqrt{6})\left(\dfrac{1}{a}-2\sqrt{6}\right)=0$ целые числа?

3. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих $496125=3^4\cdot5^3\cdot7^2$, кратных 49, но не делящихся ни на 3, ни на 5?

4. Найти наименьшее натуральное число n, кратное 7, для которого выражение $n^2+25n+100$ делится нацело на 115.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 130^0. Через точки A и C проведены прямые, перпендикулярные прямой AC и пересекающие окружность, описанную около треугольника ABC, в точках E и D. Найти острый угол между диагоналями четырехугольника с вершинами в точках A, C, D и E.

Задача 1 **Ответ:** 12 учеников.

Решение. Пусть a – число учеников в первой категории, c – число учеников в третьей категории, b – часть учеников из второй категории, которые в ответе на первый вопрос обязательно соврут (и скажут «ДА» на все три вопроса), остальные ученики из этой категории на все три вопроса ответят «НЕТ». Тогда «ДА» на первый вопрос ответят $a+b+c=25$ учеников. На второй вопрос анкеты «ДА» ответ дадут $b+c=21$. На третий вопрос ответ «ДА» дадут $b=6$ учеников. Решая систему, получим: $a=4, b=6, c=15$. Тогда ко второй категории нужно отнести $31-a-c=12$ учеников.

Задача 2 **Ответ:** $a=\pm5-2\sqrt{6}$.

Решение. По теореме Виета корнями уравнения являются числа $m=(a+2\sqrt{6})$ и $n=\left(\dfrac{1}{a}-2\sqrt{6}\right)$.

Тогда имеем:

$$\left[\begin{array}{l} a=m-2\sqrt{6} \\ \dfrac{1}{a}=n+2\sqrt{6} \end{array}\right. \to 1=mn+2\sqrt{6}(m-n)-24 \to 2\sqrt{6}(m-n)=25-mn.$$

Если $m,n\in Z,\ m\neq n$, то $2\sqrt{6}=\dfrac{25-mn}{m-n}$ – рациональное число, что неверно. Следовательно, $m=n$ и тогда $m^2=25\to m=\pm5\to a=\pm5-2\sqrt{6}$.

Задача 3 **Ответ:** 5400 чисел.

Решение. **Запишем** $496125 = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2$. Всего кратных 49-ти существует $3^4 \cdot 5^3 = 10125$ чисел. Среди них делятся на три $3^3 \cdot 5^3 = 3375$ чисел, на пять $- 3^4 \cdot 5^2 = 2025$ чисел, на пятнадцать – $3^3 \cdot 5^2 = 675$ чисел. Тогда среди чисел, кратных 49, найдется $3375 + 2025 - 675 = 4725$ чисел, делящихся или на 3, или на 5. Значит, не делящимися ни на 3, ни на 5 останутся $10125 - 4775 = 5400$ искомых чисел.

Задача 4 **Ответ:** $n = 210$.

Решение. По условию задачи $n = 7k$ и выражение

$$n^2 + 25n + 100 = (n+5)(n+20) = (7k+5)(7k+20)$$

должно делиться на 5 и 23. Заметим, что если один из сомножителей делится на 5, то и второй делится на 5 и наоборот, поэтому:

$$7k + 5 = 5m \to 7k = 5(m-1) \to \begin{cases} k = 5t \\ m = 7t + 1 \end{cases} \to n = 35t, t \in Z \; .$$

Случай 1. $7k + 5$ делится на 23:

$$35t + 5 = 23u \to \begin{cases} t = 23v - 10 \\ u = 35v - 15 \end{cases} \to n = 35t = 35(23v - 10) \to n_{\min} = 455 .$$

Случай 2. $7k + 20$ делится на 23:

$$35t + 20 = 23u \to \begin{cases} t = 23v + 6 \\ u = 35v + 10 \end{cases} \to n = 35t = 35(23v + 6) \to n_{\min} = 210.. $$

Выбирая наименьшее из найденных $n_{\min}$, получаем $n_{\min} = 210$.

Задача 5 **Ответ:** 80^0.

Решение. На рисунках 1 и 2 представлены возможные геометрические конфигурации.

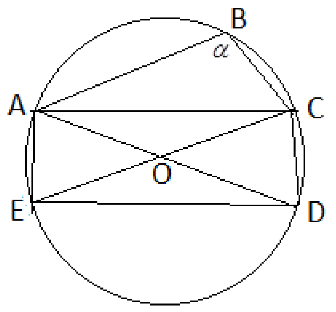

рис 1

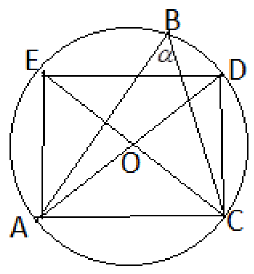

рис 2

На рисунках точка O – центр окружности K, описанной около треугольника ABC.

Случай 1. $\alpha > 90^0$ (рис. 1). Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность K по построению, поэтому точка O равноудалена от точек C и D на расстояние, равное радиусу окружности K. Аналогично, точка O равноудалена от точек A и E на то же расстояние. Следовательно, точка O является точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ACDE$. Угол CDO, как противоположный углу α во вписанном четырехугольнике $ABCD$, равен $180^0-\alpha$. Искомый угол между диагоналями прямоугольника $ACDE$ равен: $180^0-2\left(180^0-\alpha\right)=2(\alpha-90^0)$.

Случай 2. $\alpha<90^0$ (рис. 2). Точка O равноудалена от точек A,C,D и E, поэтому она является точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ACDE$ с этими вершинами. Угол ADC равен α, поскольку является вписанным и опирается с углом ABC на одну дугу окружности K. Тогда искомый угол DOC равен: $180^0-2\alpha=2(90^0-\alpha)$.

В варианте 1 $\alpha=130^0$, поэтому реализуется случай 1, и $2(\alpha-90^0)=80^0$.

Вариант № 2

1. Ученики 8^{Б} класса разделились на три категории. В первую вошли ученики, любящие свою школу, во вторую – «любящие, но не очень», а в третью – те, кто не любит свою школу. Ученики из первой категории на вопросы анкеты всегда дают правдивые ответы, из третьей – всегда лгут. Ученики второй группы обманывают и говорят правду при ответе на вопросы строго «через раз». На три вопроса анкеты: 1) Любишь ли ты школу? 2) Любишь ли ты школу, но не очень? 3) Ты не любишь школу? учеников просили ответить «Да» или «Нет». Оказалось, что «Да» на первый вопрос ответили 29, на второй – 22, на третий – 8 учеников. Сколько учеников класса «любят школу, но не очень», если в классе 32 ученика?

Ответ: 11 учеников .

2. При каких значениях a корни уравнения $x^2-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)x+(a+\sqrt{35})\left(\dfrac{1}{a}-\sqrt{35}\right)=0$ целые числа?

Ответ: $a=\pm6-\sqrt{35}$.

3. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих $305613=3^4\cdot7^3\cdot11$, кратных 11, но не делящихся ни на 3, ни на 7?

Ответ: 15876 чисел.

4. Найти наименьшее натуральное число n, кратное 5, для которого выражение $n^2+11n+18$ делится нацело на 259.

Ответ: $n=250$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 70^0. Через точки A и C проведены прямые, перпендикулярные прямой AC и пересекающие окружность, описанную около треугольника ABC, в точках E и D. Найти острый угол между диагоналями четырехугольника с вершинами в точках A,C,D и E.

Ответ: 40^0.

Вариант № 3

1. Ученики 8^{В} класса разделились на три категории. В первую вошли ученики, любящие свою школу, во вторую – «любящие, но не очень», а в третью – те, кто не любит свою школу. Ученики из первой категории на вопросы анкеты всегда дают правдивые ответы, из третьей – всегда лгут. Ученики второй группы обманывают и говорят правду при ответе на вопросы строго «через раз». На три вопроса анкеты: 1) Любишь ли ты школу? 2) Любишь ли ты школу, но не очень? 3) Ты не любишь школу? учеников просили ответить «Да» или «Нет». Оказалось, что «Да» на первый вопрос ответили 28, на второй – 19, на третий – 7 учеников. Сколько учеников класса «любят школу, но не очень», если в классе 30 учеников?

Ответ: 9 учеников.

2. При каких значениях a корни уравнения $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+(a+4\sqrt{3})\left(\frac{1}{a}-4\sqrt{3}\right)=0$ целые числа?

Ответ: $a=\pm 7-4\sqrt{3}$.

3. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих $79625=5^3\cdot 7^2\cdot 13$, кратных 13, но не делящихся ни на 5, ни на 7?

Ответ: 4200 чисел.

4. Найти наименьшее натуральное число n, кратное 3, для которого выражение $n^2+20n+51$ делится нацело на 203.

Ответ: $n=186$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 102^0. Через точки A и C проведены прямые, перпендикулярные прямой AC и пересекающие окружность, описанную около треугольника ABC, в точках D и E. Найти острый угол между диагоналями четырехугольника с вершинами в точках A, C, D и E.

Ответ: 24^0.

Вариант № 4

1. Ученики $8^{\text{Г}}$ класса разделились на три категории. В первую вошли ученики, любящие свою школу, во вторую – «любящие, но не очень», а в третью – те, кто не любит свою школу. Ученики из первой категории на вопросы анкеты всегда дают правдивые ответы, из третьей – всегда лгут. Ученики второй группы обманывают и говорят правду при ответе на вопросы строго «через раз». На три вопроса анкеты: 1) Любишь ли ты школу? 2) Любишь ли ты школу, но не очень? 3) Ты не любишь школу? учеников просили ответить «Да» или «Нет». Оказалось, что «Да» на первый вопрос ответили 24, на второй – 14, на третий – 4 учеников. Сколько учеников класса «любят школу, но не очень», если в классе 28 учеников?

Ответ: 8 учеников.

2. При каких значениях a корни уравнения $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+(a+4\sqrt{5})\left(\frac{1}{a}-4\sqrt{5}\right)=0$ целые числа?

Ответ: $a=\pm 9-4\sqrt{5}$.

3. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих $705551=7^3\cdot 11^2\cdot 17$, кратных 17, но не делящихся ни на 7, ни на 11?

Ответ: 32340 чисел .

4. Найти наименьшее натуральное число n, кратное 11, для которого выражение $n^2+17n+30$ делится нацело на 403.

Ответ: $n=2013$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 58^0. Через точки A и C проведены прямые, перпендикулярные прямой AC и пересекающие окружность, описанную около треугольника ABC, в точках D и E. Найти угол между диагоналями четырехугольника с вершинами в точках A, C, D и E.

Ответ: 64^0

Критерии проверки работ
финального тура олимпиады Росатом 04.03.2023 8 класс

Во всех задачах верный ответ без обоснования 0

1. **задача**
    - разумно ввел переменные и составил систему уравнений (перевел текстовое условие на язык уравнений) **0.5-1.0**
    - верно решил систему уравнений **1.5**
    - правильно нашел количество учеников категории № 2 **2.0**
    - арифметическая ошибка при верном ходе решения **1.0**
2. **задача**
    - получил выражения для корней уравнения через параметр a (по т. Виета, например) **0.5**
    - исключил a из выражений для корней и показал, что корни равны **1.0-1.5**
    - верно нашел значения параметра a (оба) **2.0**
3. **задача**
    - нашел число чисел, кратных требуемому **0.5**
    - среди кратных требуемому нашел число чисел, не делящихся ни на a, ни на b **1.0-1.5**
    - получил верный ответ **2.0**
    - арифметическая ошибка при верном ходе решения **1.0**
4. **задача**
    - верно разложил квадратичное выражение на множители **0.5**
    - рассмотрел два случая и нашел минимальное n для каждого **1.0-1.5**
    - верно нашел минимальное n **2.0**
5. **задача**
    - верно изобразил рисунок и показал, что четырехугольник ACDE – прямоугольник **0.5**
    - доказал, что центр окружности есть точка пересечения диагоналей прямоугольника ACDE **1.0-1.5**
    - верно определил значение угла между диагоналями, взяв при этом минимальный (< 90) **2.0**