Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 8 класс

Вариант № 1

1. Набор из 50 чисел таков, что прибавление к каждому из них числа 2 не меняет величину суммы их квадратов. На сколько изменится сумма квадратов этих чисел, если к каждому числу прибавить по 3?

2. На окружности в девяти различных точках размещены цифры $1, 2, ..., 9$ в произвольном порядке. По ним строятся девять различных двузначных чисел по следующему правилу: к любой из написанных цифр приписывается справа цифра, следующая за ней на окружности по часовой стрелке. Найти сумму таких двузначных чисел.

3. В семье Пети (папа, мама, дети, включая Петю) пьют чай с молоком, при этом каждый добавляет молоко в свою чашку по вкусу. Вечером каждый член семьи выпил по полной чашке чая с молоком. При этом оказалось, что Петя выпил $\frac{1}{6}$ всего молока и $\frac{1}{9}$ часть чая. Сколько детей в семье Пети, если в молочнике было более двух чашек молока, и он был полностью выпит?

4. В $8^{А}$ классе не более 38 учеников, среди них есть мальчики с именем Даня. Треть учеников класса выше по росту каждого ученика с именем Даня, и только $\frac{5}{12}$ учеников класса имеют рост меньше роста любого Дани. Какое максимальное число Даней могло учиться в таком $8^{А}$ классе?

5. Длина диагонали AC ромба $ABCD$ с острым углом при вершине A равна 3. Точки M и N на сторонах DA и DC – основания высот ромба, опущенных из вершины B. Высота BM пересекает диагональ AC в точке P так, что $AP:PC = 1:3$. Найти длину отрезка MN.

Приведём решение этого варианта.

1. Решение. По условию задачи сумма исходных чисел представляет выражение:

$$(a_1+2)^2+(a_2+2)^2+...+(a_{50}+2)^2 = a_1^2+a_2^2+...+a_{50}^2 \to$$
$$\left[(a_1+2)^2-a_1^2\right]+\left[(a_2+2)^2-a_2^2\right]+...\left[(a_{50}+2)^2-a_{50}^2\right]=0 \to$$
$$\to 4(a_1+1)+4(a_2+1)+...+4(a_{50}+1)=0 \to a_1+a_2+...+a_{50}=-50$$

Тогда, если прибавить 3, получим:

$$(a_1+3)^2+(a_2+3)^2+...+(a_{50}+3)^2-(a_1^2+a_2^2+...+a_{50}^2)=$$
$$=\left[(a_1+3)^2-a_1^2\right]+\left[(a_2+3)^2-a_2^2\right]+...\left[(a_{50}+3)^2-a_{50}^2\right]=$$
$$=3(2a_1+3)+3(2a_2+3)+...+3(2a_{50}+3)=6(a_1+a_2+...+a_{50})+9\cdot 50=$$
$$=-300+450=150$$

Ответ: увеличится на 150.

2. Решение. Пусть цифра, стоящая в первой точке окружности, равна a_1, во второй по часовой стрелке – a_2 и т.д. до a_9. Сумма двузначных чисел по ним построенным равна:

$$(a_1 \cdot 10 + a_2) + (a_2 \cdot 10 + a_3) + \ldots + (a_8 \cdot 10 + a_9) + (a_9 \cdot 10 + a_1) =$$
$$= 11 \cdot a_1 + 11 \cdot a_2 + 11 \cdot a_3 + \ldots + 11 \cdot a_9 = 11(1 + 2 + \ldots + 9) = 11 \cdot 9 \cdot 5 = 495$$

Каждая из цифр: 1, 2, 3,…, 9 встречается в каждом разряде ровно один раз. Поэтому найдем сумму цифр от 1 до 9, она равна 45, и умножим ее на 11 Для других вариантов умножать надо на 111, где число 1 совпадает с количеством знаков числа в условии.

Ответ: 495.

3. Решение. Обозначения: n – количество чашек (число членов семьи), n – целое число; a – количество молока (в чашках), не обязательно целое число. Тогда для чашки Пети:

$$\frac{a}{6} + \frac{n-a}{9} = 1 \to \begin{cases} a + 2n = 18 \\ n > a > 0 \end{cases} \to a = 18 - 2n < n \to 6 < n < 9$$

Одно равенство для a и n позволяет получить два неравенства: $n > a \to 3n > 18$,

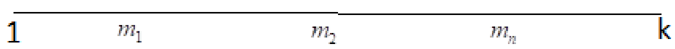
$a > 0 \to n > 6$. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. $n = 7, a = 4$, пять детей.

Случай 2. $n = 8, a = 2$ невозможен по условию задачи *(в молочнике было более двух чашек молока)*

Ответ: пять детей.

4. Решение. Обозначения: k – число учеников в классе, n – количество учеников с именем Даня. Предположим, что все ученики упорядочены по возрастанию их роста и ученики с именем Даня имеют номера $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n$.



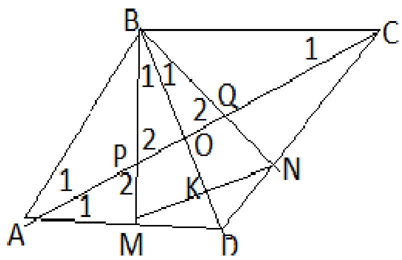
Условие задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{k - m_n}{k} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{m_1 - 1}{k} = \dfrac{5}{12} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{m_n}{k} = \dfrac{2}{3} \to 3m_n = 2k \to \begin{cases} m_n = 2t \\ k = 3t \end{cases}, t \in Z \\ 12(m_1 - 1) = 5k \to \begin{cases} m_1 - 1 = 5s \\ k = 12s \end{cases}, s \in Z \end{cases} \to \begin{cases} k = 12s \\ m_n = 8s \quad , 1 \leq s \leq 3 \\ m_1 = 5s + 1 \end{cases}$$

Максимальное число учеников с именем Даня возникает тогда, когда номера (подряд) с m_1 до m_n имеют ученики с именем Даня, т.е. их количество $m_n - m_1 + 1 = 3s, 1 \leq s \leq 3$. Число учеников в классе должно быть кратно 12, чтобы число учеников ниже ростом было целым.

Ответ: 9.

5. Решение. На рисунке равные углы помечены одинаковыми цифрами. Треугольник APM подобен треугольнику CPB с коэффициентом подобия $k_1 = \lambda$



$$AP = \lambda x,\ PC = x,\ PQ + \lambda x = x \to PQ = x(1-\lambda)$$

$$\lambda x + x = a \to x = \frac{a}{1+\lambda} \to PQ = \frac{a(1-\lambda)}{1+\lambda}$$

Треугольник BPQ подобен треугольнику BMN с коэффициентом подобия

$$k_2 = \frac{BP}{BM} = \frac{BP}{BP+PM} = \frac{1}{1+\dfrac{PM}{BP}} = \frac{1}{1+\lambda}.$$

Тогда $\dfrac{PQ}{MN} = k_2 \to MN = PQ \cdot \dfrac{1}{k_2} = PQ \cdot (1+\lambda) = a(1-\lambda)$.

Ответ: $MN = a(1-\lambda) = 2$.

Вариант № 2

1. Набор из 60 чисел таков, что прибавление к каждому из них числа 3 не меняет величину суммы их квадратов. На сколько изменится сумма квадратов этих чисел, если к каждому числу прибавить по 4?
Ответ: увеличится на 240.

2. На окружности в девяти различных точках размещены цифры $1, 2, ..., 9$ в произвольном порядке. По ним строятся девять различных трехзначных чисел по следующему правилу: к любой из написанных цифр приписывается справа две цифры, следующие за ней на окружности по часовой стрелке. Найти сумму таких трехзначных чисел.
Ответ: 4995.

3. В семье Пети (папа, мама, дети, включая Петю, всего менее 10 человек) пьют чай с молоком, при этом каждый добавляет молоко в свою чашку по вкусу. Вечером каждый член семьи выпил по полной чашке чая с молоком. При этом оказалось, что Петя выпил $\frac{1}{8}$ всего молока и $\frac{1}{12}$ часть чая. Сколько детей в семье Пети, если чай и молоко были полностью выпиты?
Ответ: семь детей.

4. В $8^{Б}$ классе не более 36 учеников, среди них есть мальчики с именем Петя. Седьмая часть учеников класса выше по росту каждого ученика с именем Петя, и только $\frac{2}{5}$ учеников класса имеют рост меньше роста любого Пети. Какое максимальное число Петь могло учиться в таком $8^{Б}$ классе?
Ответ: 16.

5. Длина диагонали AC ромба $ABCD$ с острым углом при вершине A равна 4. Точки M и N на сторонах DA и DC – основания высот ромба, опущенных из вершины B.

Высота BM пересекает диагональ AC в точке P так, что $AP:PC=1:4$. Найти длину отрезка MN.
Ответ: $MN=a(1-\lambda)=3$.

Вариант № 3

1. Набор из 70 чисел таков, что прибавление к каждому из них числа 4 не меняет величину суммы их квадратов. На сколько изменится сумма квадратов этих чисел, если к каждому числу прибавить по 5?
Ответ: увеличится на 350.

2. На окружности в девяти различных точках размещены цифры $1,2,...,9$ в произвольном порядке. По ним строятся девять различных четырехзначных чисел по следующему правилу: к любой из написанных цифр приписывается справа три цифры, следующие за ней на окружности по часовой стрелке. Найти сумму таких четырехзначных чисел.
Ответ: 49995.

3. В семье Пети (папа, мама, дети, включая Петю) пьют чай с молоком, при этом каждый добавляет молоко в свою чашку по вкусу. Вечером каждый член семьи выпил по полной чашке чая с молоком. При этом оказалось, что Петя выпил $\frac{1}{4}$ всего молока и $\frac{1}{6}$ часть чая. Сколько детей в семье Пети, если чай и молоко были полностью выпиты?
Ответ: трое детей.

4. В $8^В$ классе не более 43 учеников, среди них есть мальчики с именем Ваня. Шестая часть учеников класса выше по росту каждого ученика с именем Ваня, и только $\frac{4}{7}$ учеников класса имеют рост меньше роста любого Вани. Какое максимальное число Ваней могло учиться в таком $8^В$ классе?
Ответ: 11.

5. Длина диагонали AC ромба $ABCD$ с острым углом при вершине A равна 12. Точки M и N на сторонах DA и DC – основания высот ромба, опущенных из вершины B. Высота BM пересекает диагональ AC в точке P так, что $AP:PC=2:3$. Найти длину отрезка MN.
Ответ: $MN=a(1-\lambda)=4$.

Вариант № 4

1. Набор из 80 чисел таков, что прибавление к каждому из них числа 5 не меняет величину суммы их квадратов. На сколько изменится сумма квадратов этих чисел, если к каждому числу прибавить по 6?
Ответ: увеличится на 480.

2. На окружности в девяти различных точках размещены цифры $1,2,...,9$ в произвольном порядке. По ним строятся девять различных пятизначных чисел по следующему правилу: к любой из написанных цифр приписывается справа четыре цифры, следующие за ней на окружности по часовой стрелке. Найти сумму таких пятизначных чисел.

Ответ: 499995.

3. В семье Пети пьют чай с молоком, при этом каждый добавляет молоко в свою чашку по вкусу. Вечером каждый член семьи выпил по полной чашке чая с молоком. При этом оказалось, что Петя выпил $\frac{1}{8}$ всего молока и $\frac{1}{10}$ часть чая. Сколько человек в семье Пети участвовало в чаепитии, если чай и молоко были полностью выпиты?
Ответ: девять .

4. В $8^{Г}$ классе не более 37 учеников, среди них есть мальчики с именем Саша. Пятая часть учеников класса выше по росту каждого ученика с именем Саша, и только $\frac{3}{7}$ учеников класса имеют рост меньше роста любого Саши. Какое максимальное число Сашей могло учиться в таком $8^{Г}$ классе?
Ответ: 13.

5. Длина диагонали AC ромба $ABCD$ с острым углом при вершине A равна 20. Точки M и N на сторонах DA и DC – основания высот ромба, опущенных из вершины B. Высота BM пересекает диагональ AC в точке P так, что $AP:PC = 3:4$. Найти длину отрезка MN .
Ответ: $MN = a(1-\lambda) = 5$.

Критерии проверки работ, 8 класс
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика

Задача 1.
1) Правильно записал преобразование возведения в квадрат – 0,5 балла.
2) Начал правильно решать. Нашел сумму a1+..+aN, но ошибся (ответ неверный) – 1 балл.
3) Правильный ход решения, но неверный ответ или мелкие ошибки – 1,5 балла.
4) Решена верно – 2 балла.

Задача 2.
1) Правильные частные случаи, но далее не продвинулся, верный ответ для частного случая, без общего обоснования – 0,5 балла.
2) Правильно догадался, что все цифры надо умножить на 11(111), но не обосновал – 1 балл.
3) Правильный ход решения, есть попытка обоснования, но неверный ответ или мелкие ошибки – 1,5 балла.
4) Решена верно – 2 балла.

Задача 3.
1) Попытка записать условие задачи в виде системы, но далее не продвинулся – 0,5 балла.
2) Нашел правильно ограничения на a (наименьшее число), дальше не продвинулся, есть ошибки – 1 балл.
3) Нашел правильно все возможные случаи, есть мелкие ошибки – 1,5 балла.
4) Решена верно – 2 балла.

Задача 4.
1) Правильно записал условия задачи на соотношения учеников, но далее не продвинулся – 0,5 балла.
2)Получил верную систему, но не смог правильно интерпретировать неравенства – 1 балл.
3) Правильный ход решения, но есть мелкие ошибки – 1,5 балла.
4) Решена верно – 2 балла.

Задача 5.
1)Построил правильный рисунок, увидел равенство треугольников, но маленькое продвижение, нашел длины отрезков диагонали из пропорции – 0,5 балла.
2) Правильно увидел подобие треугольников, написал некоторые пропорции для сторон, но полного хода решения нет – 1 балл.
3)Допустил небольшие вычислительные ошибки при правильном в целом решении – 1,5 балла.
4) Решена верно – 2 балла.