Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика,
9 класс

Вариант № 1

1. Петя считал для себя счастливыми моменты жизни, когда его электронные часы показывали количество часов в три раза большее, чем минут или наоборот. Петя заснул и проснулся в счастливые момент своей жизни, при этом ни одного такого момента не проспал. Какое максимальное целое число минут мог длиться сон Пети?

2. Петя написал пять последующих членов арифметической прогрессии и зашифровал их по принципу: каждую цифру заменил на букву, разным цифрам – разные буквы и наоборот. Вот что получилось: Д, БЕ, АФ, СС, ФА. Какие числа написал Петя?

3. Петя написал на доске 8 последовательных натуральных чисел, а Вася стер два из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 2022. Какое наименьшее возможное число мог написать Петя?

4. Доказать, что существует более 2024 различных троек целых чисел $(x;y;z)$, для которых $x^{2022}+y^{2022}=z^{2023}$.

5. Точка M делит сторону BC параллелограмма $ABCD$ в отношении $BM:MC=2$. Прямая AM пересекает диагональ BD в точке K. Найти площадь четырехугольника $CMKD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

Задача 1 Ответ: 236 минут или 173 минуты.

Решение. Считалось правильным считать момент 00:00 как счастливым, так и не счастливым, при этом решение практически не меняется.

Счастливые моменты в которые количество минут в три раза больше количества часов: 01:03, 02:06, …, 19:57 и, быть может, 00:00. Промежутки между этими счастливыми моментами равны 1 час 3 минуты с 01:03 (быть может, с 00:00) по 19:57 и 5 часов 6 минут с 19:57 по 01:03 следующего дня (или 4 часа 3 минуты с19:57 по 00:00 следующего дня).

Счастливые моменты в которые количество часов в три раза больше количества минут: 03:01, 06:02, …, 21:07 и, быть может, 00:00. Промежутки между такими счастливыми моментами равны 3 часа 1 минута с 03:01 (быть может, с 00:00) по 21:07 и 5 часов 54 минуты с 21:07 по 03:01 следующего дня (или 2 часа 53 минуты с 21:07 по 00:00 следующего дня).

Накладывая эти серии счастливых моментов видим, что если момент 00:00 не считать счастливым, то с 01:03 по 19:57 промежуток между счастливыми моментами во всяком случае не превосходит 1 час 3 минуты, потом следует промежуток с 19:57 по 21:07 длительностью 1 час 10 минут и промежуток с 21:07 по 01:03 следующего дня длительностью 3 часа 56 минут. Максимальной является длительность этого последнего промежутка, в минутах это 236 минут.

Если же момент 00:00 считать счастливым, то с 00:00 по 19:57 промежуток между счастливыми моментами во всяком случае не превосходит 1 час 3 минуты, потом следует промежуток с 19:57 по 21:07 длительностью 1 час 10 минут и промежуток с 21:07 по 00:00 следующего дня длительностью 2 часа 53 минуты. Максимальной является длительность этого последнего промежутка, в минутах это 173 минуты.

Задача 2 Ответ: 6, 15, 24, 33, 42.

Решение. Из условия следует, что члены арифметической последовательности являются натуральными числами и разность прогрессии, обозначим её d, положительна. Буквы А, Б, С, Д, Е считаем цифрами или числами, соответствующие двухзначные числа будем обозначать $\overline{\text{АФ}}$ и т.д.

Поскольку $\overline{ФА}-\overline{АФ}=(10Ф+А)-(10А+Ф)=9(Ф-А)=2d$, то значение d кратно 9. Поэтому d равно либо 9, либо 18. Значение 27 или больше величина d принимать не может, так как в этом случае выполнялось бы $\overline{ФА}=Д+4d\geq 4\times 27>100$, что невозможно, так как число $\overline{ФА}$ является двухзначным.

Предположим сначала, что $d=9$. Тогда $Б=1$, $А=2$, $С=3$, $Ф=4$. Используя значения найденных букв видим, что запись на доске приобретает вид Д, $1\overline{Е}$, 24, 33, 42. Тогда $1\overline{Е}=24-d=24-9=15$ и $Д=1\overline{Е}-d=15-9=6$. Таким образом, на доске написаны числа 6, 15, 24, 33 и 42.

Теперь предположим, что $d=18$. Поскольку $\overline{ФА}=Д+4d=Д+4\times 18=Д+72$, то $81\geq \overline{ФА}\geq 72$, т.е. буква Ф обозначает либо 7, либо 8. Рассмотрим обе эти возможности.

Если буква Ф соответствует 7, то запись на доске имеет вид Д, $\overline{БЕ}$, $\overline{А}7$, $\overline{СС}$, $7\overline{А}$. Так как $\overline{СС}=\overline{А}7+d=\overline{А}7+18$, то число $\overline{СС}$ заканчивается на 5 и запись на доске получает вид Д, $\overline{БЕ}$, $\overline{А}7$, 55, $7\overline{А}$. Тогда $7\overline{А}=55+18=73$, $\overline{А}7=55-18=37$, $\overline{БЕ}=55-2d=55-36=19$ и $Д=55-3d=55-54=1$. Таким образом, буквы Д и Б изображают цифру 1, что противоречит условию задачи.

Если буква Ф изображает 8, то запись на доске имеет вид Д, $\overline{БЕ}$, $\overline{А}8$, $\overline{СС}$, $8\overline{А}$. Так как $\overline{СС}=\overline{А}8+d=\overline{А}8+18$, то число $\overline{СС}$ заканчивается на 6 и запись на доске получает вид Д, $\overline{БЕ}$, $\overline{А}8$, 66, $8\overline{А}$. Тогда $8\overline{А}=66+18=84$, что невозможно, поскольку должно быть выполнено неравенство $\overline{ФА}=8\overline{А}\leq 81$.

Задача 3 **Ответ:** 333.

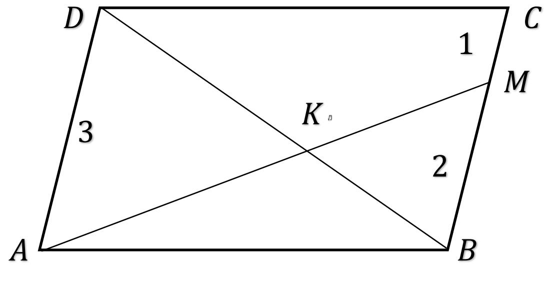
Решение. Обозначим n минимальное число, написанное Петей, а $n+q$ и $n+p$, $0\leq q<p\leq 7$ — числа, стёртые Васей. Тогда сумма оставшихся чисел равна $\frac{(n+(n+7))8}{2}-(n+q)-(n+p)=6n+28-(q+p)=2022$. Отсюда $6n=2022-28+(q+p)=1994+(q+p)=6\times 332+(2+q+p)$. Величина n принимает минимальное значение при минимально возможном значении правой части, которая должна быть кратна 6. Так как числа q и p неотрицательны, то правая часть минимальна при $q+p=4$. Тогда $6n=6\times 333$, т.е. $n=333$.

Задача 4 **Ответ:** доказательство.

Решение. Таких троек бесконечно много. Например, для произвольного натурального числа n тройка $(n^{2023};0;n^{2022})$ является целочисленным решением. В варианте 2 (и 3), где уравнение имеет вид $x^{2023}+y^{2023}=z^{2024}$. возможны решения $(n;-n;0)$.

Задача 5 **Ответ:** $\dfrac{11}{30}$.

Решение. По условию задачи длина отрезка $[B;M]$ равна $2/3$ длины отрезка $[B;C]$. Кроме того, треугольники DAK и BMK подобны с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. Поэтому длина отрезка $[B;K]$ равна $\frac{2}{5}$ длины отрезка $[B;D]$. Значит, для площадей треугольников BCD и BMK выполнено соотношение $S_{BMK}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times S_{BDC}=\frac{4}{15}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{30}$, а площадь четырёхугольника $CMKD$ равна $S_{CMKD}=\frac{1}{2}-\frac{4}{30}=\frac{11}{30}$.



Вариант № 2

1. Петя считал для себя счастливыми моменты жизни, когда его электронные часы показывали количество часов в четыре раза большее, чем минут или наоборот. Петя заснул и проснулся в счастливые момент своей жизни, при этом ни одного такого момента не проспал. Какое максимальное целое число минут мог длиться сон Пети?

Ответ: 299 минут или 241 минута.

2. Петя написал пять последующих членов арифметической прогрессии и зашифровал их по принципу: каждую цифру заменил на букву, разным цифрам – разные буквы и наоборот. Вот что получилось: А, БС, ДЕ, АВ, СБ. Какие числа написал Петя?

Ответ: 3, 15, 27, 39, 51.

Решение. Из условия следует, что члены арифметической последовательности являются натуральными числами и разность прогрессии, обозначим её d, положительна. Буквы А, Б, С, Д, Е считаем цифрами или числами, соответствующие двухзначные числа будем обозначать $\overline{\text{АФ}}$ и т.д.

Подсчитаем двумя способами разность $\overline{\text{СБ}} - \overline{\text{БС}}$. Сначала, пользуясь тем, что числа образуют арифметическую последовательность, получаем $\overline{\text{СБ}} - \overline{\text{БС}} = \left(\overline{\text{БС}} + 3d\right) - \overline{\text{БС}} = 3d$, затем $\overline{\text{СБ}} - \overline{\text{БС}} = (10\text{С} + \text{Б}) - (10\text{Б} + \text{С}) = 9(\text{С} - \text{Б})$. Поэтому разность прогрессии кратна трём.

Теперь для разности $\overline{\text{АВ}} - \text{А}$ имеем $\overline{\text{АВ}} - \text{А} = (10\text{А} + \text{В}) - \text{А} = 9\text{А} + \text{В} = 3d$, а так как d кратно трём, то В кратно 9. В это цифра, поэтому либо $\text{В} = 0$, либо $\text{В} = 9$.

Предположим, что $\text{В} = 0$. Тогда $3d = 9\text{А} + \text{В} = 9\text{А}$, т.е. $d = 3\text{А}$ и члены прогрессии равны соответственно А, $\overline{\text{БС}} = 4\text{А}$, $\overline{\text{ДЕ}} = 7\text{А}$, $\overline{\text{АВ}} = 10\text{А}$, $\overline{\text{СБ}} = 13\text{А}$. Поэтому $\overline{\text{БС}} + \overline{\text{СБ}} = 4\text{А} + 13\text{А} = 17\text{А}$, с другой стороны $\overline{\text{БС}} + \overline{\text{СБ}} = (10\text{Б} + \text{С}) + (10\text{С} + \text{Б}) = 11(\text{Б} + \text{С})$. Так как числа 11 и 17 простые, то из равенства $11(\text{Б} + \text{С}) = 17\text{А}$ следует, что цифра А кратна 11, что невозможно.

Осталось рассмотреть случай, когда $\text{В} = 9$. В этом случае $3d = 9\text{А} + \text{В} = 9\text{А} + 9$, т.е. $d = 3\text{А} + 3$, и члены прогрессии равны соответственно А, $\overline{\text{БС}} = 4\text{А} + 3$, $\overline{\text{ДЕ}} = 7\text{А} + 6$, $\overline{\text{АВ}} = 10\text{А} + 9$ и $\overline{\text{СБ}} = 13\text{А} + 12$. Значит, $\overline{\text{БС}} + \overline{\text{СБ}} = (10\text{Б} + \text{С}) + (10\text{С} + \text{Б}) = 11(\text{Б} + \text{С}) = (4\text{А} + 3) + (13\text{А} + 12) = 17\text{А} + 15 = 11(\text{А} + 1) + 2(3\text{А} + 2)$. Так как 11 — простое число, то из равенства $11(\text{Б} + \text{С}) = 11(\text{А} + 1) + 2(3\text{А} + 2)$ следует, что $3\text{А} + 2$ кратно 11. Поэтому, поскольку А — цифра, то $\text{А} = 3$, $\overline{\text{БС}} = 4\text{А} + 3 = 15$, $\overline{\text{ДЕ}} = 7\text{А} + 6 = 27$, $\overline{\text{АВ}} = 10\text{А} + 9 = 39$ и $\overline{\text{СБ}} = 13\text{А} + 12 = 51$. Эти числа удовлетворяют условию задачи.

3. Петя написал на доске 9 последовательных натуральных чисел, а Вася стер два из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 2021. Какое наименьшее возможное число мог написать Петя?

Ответ: 284.

4. Доказать, что существует более 2023 различных троек целых чисел $(x; y; z)$, для которых $x^{2021} + y^{2021} = z^{2022}$.

Ответ: доказательство.

5. Точка M делит сторону BC параллелограмма $ABCD$ в отношении $BM : MC = 1:2$. Прямая AM пересекает диагональ BD в точке K. Найти площадь четырехугольника $CMKD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

Ответ: $\frac{11}{24}$.

Вариант № 3

1. Петя считал для себя счастливыми моменты жизни, когда его электронные часы показывали количество часов в пять раз большее, чем минут или наоборот. Петя заснул и проснулся в счастливые момент своей жизни, при этом ни одного такого момента не проспал. Какое максимальное целое число минут мог длиться сон Пети?

Ответ: 301 минута.

2. Петя написал пять последующих членов арифметической прогрессии и зашифровал их по принципу: каждую цифру заменил на букву, разным цифрам – разные буквы и наоборот. Вот что получилось: А, БВ, ДС, ЕЕ, СД. Какие числа написал Петя?

Ответ: 6, 15, 24, 33, 42.

3. Петя написал на доске 10 последовательных натуральных чисел, а Вася стер два из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 2020. Какое наименьшее возможное число мог написать Петя?

Ответ: 247.

4. Доказать, что существует более 2025 различных троек целых чисел $(x; y; z)$, для которых $x^{2023} + y^{2023} = z^{2024}$.

Ответ: доказательство.

5. Точка M делит сторону BC параллелограмма $ABCD$ в отношении $BM : MC = 3$. Прямая AM пересекает диагональ BD в точке K. Найти площадь четырехугольника $CMKD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

Ответ: $\frac{19}{56}$.

Вариант № 4

1. Петя считал для себя счастливыми моменты жизни, когда его электронные часы показывали количество часов в шесть раз большее, чем минут или наоборот. Петя заснул и проснулся в счастливые момент своей жизни, при этом ни одного такого момента не проспал. Какое максимальное целое число минут мог длиться сон Пети?

Ответ: 423 минуты или 361 минута.

2. Петя написал пять последующих членов арифметической прогрессии и зашифровал их по принципу: каждую цифру заменил на букву, разным цифрам – разные буквы и наоборот. Вот что получилось: А, БВ, БС, ВД, ЕЕ. Какие числа написал Петя?

Ответ: 5, 12, 19, 26, 33.

Решение. Из условия следует, что члены арифметической последовательности являются натуральными числами и разность прогрессии, обозначим её d, положительна. Буквы А, Б, В, С, Д, Е считаем цифрами или числами, соответствующие двухзначные числа будем обозначать $\overline{\text{БВ}}$ и т.д.

Так как второй и третий члены прогрессии начинаются с одной цифры, то разность прогрессии меньше 10. Поэтому Б $= 1$, В $= 2$, Е $= 3$. С учётом уже найденных цифр члены последовательности запишутся так: А, 12, $1\overline{\text{С}}$, $2\overline{\text{Д}}$, 33. Отсюда $33 - 12 = 21 = 3d$ и, следовательно, члены последовательности равны 5, 12, 19, 26, 33. Эти числа удовлетворяют условию задачи.

3. Петя написал на доске 11 последовательных натуральных чисел, а Вася стер два из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 2019. Какое наименьшее возможное число мог написать Петя?

Ответ: 219.

4. Доказать, что существует более 2022 различных троек целых чисел $(x; y; z)$, для которых $x^{2020} + y^{2020} = z^{2021}$.

Ответ: доказательство.

5. Точка M делит сторону BC параллелограмма $ABCD$ в отношении $BM : MC = 1:3$. Прямая AM пересекает диагональ BD в точке K. Найти площадь четырехугольника $CMKD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

Ответ: $\frac{19}{40}$.

Критерии проверки работ
финального тура олимпиады Росатом 04.03.2023 9 класс

Во всех задачах верный ответ без обоснования 0

1. **Задача.** Считается правильным как считать, так и не считать момент 00:00 счастливым
   - счастливые моменты выписаны с незначительными ошибками **0,5**
   - счастливые моменты выписаны с правильно **1,0**
   - решение с незначительными погрешностями **1,5**
   - правильное решение **2,0**
2. **задача**
   - найдены некоторые ограничения на коды букв **0,5**
   - правильно найдено насколько кодов **1.0**
   - решение с незначительными погрешностями **1,5**
   - правильное решение **2,0**
3. **задача**
   - продемонстрировано знание формулы суммы арифметической прогрессии **0,5**
   - правильно составлено уравнение и сделано что-то разумное **1,0**
   - решение с арифметическими ошибками **1,5**
   - правильное решение **2,0**
4. **задача**
   - сделано что-то разумное **0,5**
   - найдено несколько подходящих троек (x,y,z) **1,0**
   - решение с незначительными погрешностями **1,5**
   - правильное решение **2,0**
5. **задача**
   - правильный чертёж **0,5**
   - найдено отношение в котором делится диагональ **1,0**
   - решение с арифметическими ошибками **1,5**
   - правильное решение **2,0**