Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 9 класс

Вариант № 1

1. Петя не заметил знака умножения, стоящего между двумя натуральными числами: двузначным a и трехзначным b. В результате этой ошибки он записал в тетрадь пятизначное число $\overline{ab}$, которое оказалось в три раза больше произведения чисел a и b. Найти наибольшее возможное число, которое мог записать Петя в свою тетрадь.

2. Сколько существует целых чисел на отрезке $\left[-8^3;3^6\right]$ не являющихся ни квадратами, ни кубами других целых чисел?

3. Вычислить значение произведения $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2022^2}\right)$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x+y$, если $(x;y)$ связаны соотношением $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$. При каких $(x;y)$ они достигаются?

5. На дуге AC окружности описанной около равностороннего треугольника ABC выбрана точка M так, что длины отрезков MA и MC равны 1 и 2. Прямая BM пересекает сторону AC в точке N. Найти длину отрезка MN и сторону треугольника ABC.

Приведём решение этого варианта.

1. Решение. Обозначим через a первое число, а через b – второе число. Тогда $\overline{ab}=1000a+b$. По условию, $1000a+b=3a\cdot b\to(3a-1)b=1000a$. Числа a и $3a-1$ не имеют общих делителей. Действительно, если m – общий делитель, то $a=ml$ и $3a-1=mk$, тогда $3ml-1=mk$, $m(3l-k)=1$. Значит, m является делителем 1. Таким образом, $(3a-1)$ – делитель 1000.

Поскольку $10\le a\le 99\to 29\le 3a-1\le 296$. Среди делителей 1000 этому условию удовлетворяют (в порядке убывания): 250, 200, 125, 100, 50 и 40.

Случай 1. $3a-1=250\to 3a=251\to\varnothing$.

Случай 2. $3a-1=200\to 3a=201\to a=67\to b=5a=335\to\overline{ab}=67335$.

Чем больше делитель, тем больше a и записанное число $\overline{ab}$.

Ответ: 67335.

2. Решение. Число положительных целых чисел, являющимися квадратами целых чисел и не превосходящих числа $3^6=27^2=9^3$, равно 27, число положительных целых чисел, являющимися кубами целых чисел, равно 9, чисел, являющихся квадратами и кубами одновременно, т.е. шестых степеней целых чисел ровно 3. Тогда количество положительных целых чисел, являющимися квадратами или кубами целых чисел, равно $27+9-3=33$ числа.

Число отрицательных целых, кубы которых не меньше -8^3 равно 8. Целых чисел, квадраты которых отрицательны, не бывает. Таким образом, включая ноль, общее число целых чисел на отрезке $\left[-8^3;3^6\right]$, являющимися квадратами или кубами целых чисел, равно $33+8+1=42$. Всего целых чисел на отрезке $3^6+8^3+1=1242$, из них 42 не удовлетворяют условию задачи, т.е. искомых чисел $1242-42=1200$.

Ответ: 1200.

3. Решение. Поскольку $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$, то

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2021^2}\right)\left(1-\frac{1}{2022^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\boxed{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}\cdot\boxed{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2020}{2021}\cdot\boxed{\frac{2022}{2021}\cdot\frac{2021}{2022}}\cdot\frac{2023}{2022}.$$

Нетрудно заметить, что все дроби встречаются парами: $\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k+1}$. Каждая пара в произведении даёт 1. Таким образом, искомое произведение равно $\frac{1}{2}\cdot\frac{2023}{2022}=\frac{2023}{4044}$.

Ответ: $\frac{2023}{4044}$.

4. Решение. Сначала определим какие значения могут принимать x и y:

$$1-\sqrt{x-1}=\sqrt{y-1},$$

откуда $\begin{cases} x\geq 1, \\ 1-\sqrt{x-1}\geq 0. \end{cases} \to x\in[1,2]$. Аналогично, $y\in[1,2]$.

Решаем уравнение:

$$1-\sqrt{x-1}=\sqrt{y-1},\ \to y-1=1-2\sqrt{x-1}+x-1,\ \text{т.е. } y=1-2\sqrt{x-1}+x.$$

Обозначим $\sqrt{x-1}=t$, тогда имеем $\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=1-2t+t^2+1. \end{cases} \to x+y=2t^2-2t+3.$

Поскольку $x\in[1,2]$, то $t\in[0,1]$. Таким образом, мы пришли к исследованию квадратичной функции $f(t)=2t^2-2t+3$ на максимальное и минимальное значения на отрезке $t\in[0,1]$. Запишем функцию в виде

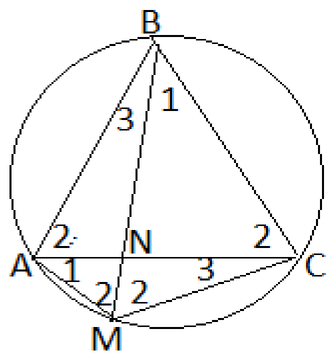
$$f(t)=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}.$$

График этой функции – парабола, ветви которой направлены вверх, с вершиной в точке $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. Значит, минимальное значение она принимает при $t=\frac{1}{2}$ (при $x=y=\frac{5}{4}$), а максимальное – при $t=0$ и $t=1$ $f(0)=f(1)=3$ (при $x=2, y=1$ или $x=1, y=2$).

Ответ: $(x+y)_{\max}=3$ при $x=2, y=1$ или $x=1, y=2$, $(x+y)_{\min}=\dfrac{5}{2}$ при $x=y=\dfrac{5}{4}$.

5. Решение. Пусть $MA=1=a$, $MC=2=b$. Угол $\angle AMC$ равен 120^0, поэтому по теореме косинусов

$$AC^2=a^2+b^2+ab.$$



На рисунке равные углы обозначены одинаковыми цифрами. Треугольники ANM и BNC подобные (по двум равным углам), поэтому $\dfrac{BC}{AM}=\dfrac{NC}{MN}$. Треугольники CNM и BNA подобны (по двум равным углам), поэтому $\dfrac{AB}{MC}=\dfrac{AN}{MN}$.

Складываем полученные соотношения:

$$\frac{BC}{AM}+\frac{AB}{MC}=\frac{AN}{MN}+\frac{NC}{MN}=\frac{AC}{MN}\to\frac{1}{AM}+\frac{1}{MC}=\frac{1}{MN}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{MN}\to MN=\frac{ab}{a+b}.$$

Ответ: $AB=\sqrt{7}$; $MN=\frac{2}{3}$.

Вариант № 2

1. Петя не заметил знака умножения, стоящего между двумя натуральными числами: трехзначным a и четырехзначным b. В результате этой ошибки он записал в тетрадь семизначное число $\overline{ab}$, которое оказалось в три раза больше произведения чисел a и b. Найти наибольшее возможное число, которое мог записать Петя в свою тетрадь.

Ответ: 6673335.

2. Сколько существует целых чисел на отрезке $\left[-4^5;3^{10}\right]$ являющихся квадратами или пятыми степенями других целых чисел?

Ответ: 254.

3. Вычислить значение произведения $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2023^2}\right)$.

Ответ: $\frac{1012}{2023}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $2x+y$, если $(x;y)$ связаны соотношением $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-4}=2$. При каких $(x;y)$ они достигаются?

Ответ: $(2x+y)_{\max}=14$ при $x=5, y=4$, $(2x+y)_{\min}=\frac{26}{3}$ при $x=\frac{13}{9}$ $y=\frac{52}{9}$.

5. На дуге AC окружности описанной около равностороннего треугольника ABC выбрана точка M так, что длины отрезков MA и MC равны 2 и 3. Прямая BM пересекает сторону AC в точке N. Найти длину отрезка MN и сторону треугольника ABC.

Ответ: $AB=\sqrt{19}$; $MN=\frac{6}{5}$.

Вариант № 3

1. Петя не заметил знака умножения, стоящего между двумя натуральными числами: двузначным a и четырехзначным b. В результате этой ошибки он записал в тетрадь шестизначное число $\overline{ab}$, которое оказалось в три раза больше произведения чисел a и b. Найти наибольшее возможное число, которое мог записать Петя в свою тетрадь.

Ответ: 673350.

2. Сколько существует целых чисел на отрезке $\left[-8^5;5^{15}\right]$ являющихся кубами или пятыми степенями других целых чисел?

Ответ: 3284.

3. Вычислить значение произведения $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2021^2}\right)$.

Ответ: $\frac{1011}{2021}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x-2y$, если $(x;y)$ связаны соотношением $\sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}=3$. При каких $(x;y)$ они достигаются?

Ответ: $(x-2y)_{\max}=5$ при $x=11, y=3$, $(x-2y)_{\min}=-22$ при $x=2, y=12$.

5. На дуге AC окружности описанной около равностороннего треугольника ABC выбрана точка M так, что длины отрезков MA и MC равны 3 и 4. Прямая BM пересекает сторону AC в точке N. Найти длину отрезка MN и сторону треугольника ABC.

Ответ: $AB=\sqrt{37}$; $MN=\dfrac{12}{7}$.

Вариант № 4

1. Петя не заметил знака умножения, стоящего между двумя натуральными числами: четырехзначным a и четырехзначным b. В результате этой ошибки он записал в тетрадь восьмизначное число $\overline{ab}$, которое оказалось в три раза больше произведения чисел a и b. Найти наибольшее возможное число, которое мог записать Петя в свою тетрадь.
Ответ: 116673334.

2. Сколько существует целых чисел на отрезке $\left[-3^9;2^{18}\right]$ являющихся квадратами или кубами других целых чисел?
Ответ: 596.

3. Вычислить значение произведения $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{2020^2}\right)$.

Ответ: $\frac{2021}{4040}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $2x+3y$, если $(x;y)$ связаны соотношением $\sqrt{x-3}+\sqrt{y-4}=4$. При каких $(x;y)$ они достигаются?

Ответ: $(2x+3y)_{min}=37{,}2$ при $x=\frac{219}{25}$, $y=\frac{264}{25}$, $(2x+3y)_{max}=66$ при $x=3$, $y=20$.

5. На дуге AC окружности описанной около равностороннего треугольника ABC выбрана точка M так, что длины отрезков MA и MC равны 4 и 5. Прямая BM пересекает сторону AC в точке N. Найти длину отрезка MN и сторону треугольника ABC.

Ответ: $AB=\sqrt{61}$; $MN=\dfrac{20}{9}$.

Критерии проверки работ, 9 класс
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика

Задача 1.

1) Записано уравнение, связывающее a и b – 0,5 балла.

2) Выделил полный квадрат и получил правильный ответ – 2 балла.

3) Арифметическая ошибка – 1,5 балла.

4) Решена верно – 2 балла.

Задача 2.

1) Предпринята попытка вычисления числа полных квадратов или полных кубов и тд, но это число найдено неверно – 0,5 балла.

2) Одно из чисел полных квадратов или полных кубов и тд вычислено верно – 1 балл.

3) Арифметическая ошибка – 1,5 балла.

4) Решена верно – 2 балла.

Задача 3.

1) Выражения в скобках приведены к общему знаменателю – 0,5 балла.

2) Ошибки при упрощении полученного выражения – 1 балл.

3) Арифметическая ошибка – 1,5 балла.

4) Решена верно – 2 балла.

Задача 4.

1) Наибольшее и наименьшее значения заданного выражения найдены подбором – 0,5 балла.

2) Одна из переменных выражена через другую – 1 балл.

3) Арифметическая ошибка – 1,5 балла.

4) Решена верно – 2 балла.

Задача 5.

1) Верный чертеж, есть продвижения в решении – 0,5 балла.

2) Нашел сторону треугольника – 1 балл.

3) При нахождении отрезка допущена арифметическая ошибка– 1,5 балла.

4) Решена верно – 2 балла.