

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика
11 класс, Москва

Вариант № 1

1. Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рождения в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 60. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

2. Решить уравнение $(\sin^4 5x + 1)(\sin^4 3x + 1) = 4\sin^2 5x \cdot \sin^2 3x$.

3. Найти все целые решения уравнения $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{2} - 1)^{2022}$.

4. Решить уравнение $(\log_2 x + \sqrt{\log_2^2 x + 1})(\log_2(x-2) + \sqrt{\log_2^2(x-2) + 1}) = 1$.

5. На клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом расставлены 4 одинаковых фигуры. Найти вероятность того, что три из них будут находиться либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, либо на одной из двух главных диагоналей.

6. На ребре AC основания треугольной пирамиды $ABCD$ расположена точка M так, что $AM : MC = 1 : 2$. Через середину ребра BC основания пирамиды проведена плоскость P , проходящая через точку M и параллельная боковому ребру CD . В каком отношении плоскость P делит объем пирамиды?

Вариант № 2

1. Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рождения в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 75. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

2. Решить уравнение $(\cos^4 5x + 1)(\cos^4 7x + 1) = 4\cos^2 5x \cdot \cos^2 7x$.

3. Найти все целые решения уравнения $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{2} - 1)^{2023}$.

4. Решить уравнение $(\log_3(2x+1) + \sqrt{\log_3^2(2x+1) + 1})(\log_3(3x+2) + \sqrt{\log_3^2(3x+2) + 1}) = 1$

5. На клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом расставлены 5 одинаковых фигур. Найти вероятность того, что четыре из них будут находиться либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, либо на одной из двух главных диагоналей.

6. На ребре AC основания треугольной пирамиды $ABCD$ расположена точка M так, что $AM : MC = 1 : 3$. Через середину ребра BC основания пирамиды проведена плоскость P , проходящая через точку M и параллельная боковому ребру CD . В каком отношении плоскость P делит объем пирамиды?

Вариант № 3

1. Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рождения в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 95. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

2. Решить уравнение $(\operatorname{tg}^4 3x + 1)(\operatorname{tg}^4 7x + 1) = 4\operatorname{tg}^2 3x \cdot \operatorname{tg}^2 7x$.

3. Найти все целые решения уравнения $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{2} - 1)^{2024}$.

4. Решить уравнение $(\log_4(x+1) + \sqrt{\log_4^2(x+1) + 1})(\log_4(3x+5) + \sqrt{\log_4^2(3x+5) + 1}) = 1$.

5. На клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом расставлены 6 одинаковых фигур. Найти вероятность того, что пять из них будут находиться либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, либо на одной из двух главных диагоналей.

6. На ребре AC основания треугольной пирамиды $ABCD$ расположена точка M так, что $AM : MC = 2 : 3$. Через середину ребра BC основания пирамиды проведена плоскость P , проходящая через точку M и параллельная боковому ребру CD . В каком отношении плоскость P делит объем пирамиды?

Вариант № 4

1. Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рождения в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 114. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

2. Решить уравнение $(\operatorname{ctg}^4 5x + 1)(\operatorname{ctg}^4 9x + 1) = 4\operatorname{ctg}^2 5x \cdot \operatorname{ctg}^2 9x$.

3. Найти все целые решения уравнения $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{2} - 1)^{2021}$.

4. Решить уравнение $(\log_5(x+2) + \sqrt{\log_5^2(x+2) + 1})(\log_5(2x+3) + \sqrt{\log_5^2(2x+3) + 1}) = 1$.

5. На клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом расставлены 7 одинаковых фигур. Найти вероятность того, что шесть из них будут находиться либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, либо на одной из двух главных диагоналей.

6. На ребре AC основания треугольной пирамиды $ABCD$ расположена точка M так, что $AM : MC = 3 : 4$. Через середину ребра BC основания пирамиды проведена плоскость P , проходящая через точку M и параллельная боковому ребру CD . В каком отношении плоскость P делит объем пирамиды?

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, выезд
11 класс.

Вариант № 1

1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(17) = P(23) = 2023$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

2. Решить уравнение

$$\log_{\sin x} \sin 2x + \log_{\sin 2x} \sin 3x + \log_{\sin 3x} \sin x = \log_{\sin 2x} \sin x + \log_{\sin 3x} \sin 2x + \log_{\sin x} \sin 3x.$$

3. Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени x равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x-1) = (x-3)P(x)$ по переменной x .

4. При каких тройках чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе $\begin{cases} \sin x - \sin y = y - x \\ \sin y - \sin z = z - y \end{cases}$, выражение

$\left| \frac{z}{1+xy} \right|$ принимает наибольшее возможное значение?

5. Петя записывает на листе бумаги строчку из 7 нулей и 20 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины – числа нулей, записанных до появления первой единицы.

6. Длина стороны AD четырехугольника $ABCD$ вписанного в окружность равна 5. Точка M делит эту сторону в отношении $AM : MD = 1 : 4$, а прямые MC и MB параллельны сторонам AB и CD соответственно. Найти длину стороны BC четырехугольника.

Вариант № 2

1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(29) = P(37) = 2022$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

2. Решить уравнение

$$\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin 2x + \log_{\sin 2x} \sin x = \log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin 2x} \cos x + \log_{\sin x} \sin 2x.$$

3. Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени x равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x-1) = (x-4)P(x)$ по переменной x .

4. При каких тройках чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе $\begin{cases} \sin x - \sin y = 2(y - x) \\ \cos x - \cos z = 2(x - z) \end{cases}$, выражение $xy + xz + yz + 2x + 2y + 2z + 3$ принимает наименьшее возможное значение?

5. Петя записывает на листе бумаги строчку из 5 нулей и 19 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины – числа нулей, записанных до появления первой единицы.

6. Длина стороны AD четырехугольника $ABCD$ вписанного в окружность равна 3. Точка M делит эту сторону в отношении $AM : MD = 1 : 2$, а прямые MC и MB параллельны сторонам AB и CD соответственно. Найти длину стороны BC четырехугольника.

Вариант № 3

1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(11) = P(13) = 2021$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

2. Решить уравнение

$$\log_{\sin x} \cos 2x + \log_{\cos 2x} \sin 3x + \log_{\sin 3x} \sin x = \log_{\cos 2x} \sin x + \log_{\sin 3x} \cos 2x + \log_{\sin x} \sin 3x.$$

3. Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени переменной равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x-1) = (x-5)P(x)$.

4. При каких тройках чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе
$$\begin{cases} \sin 2x - \sin 2y = 3(x - y) \\ \cos 3x - \cos 3z = 4(x - z) \end{cases}$$
,

выражение $\frac{\sin x + \sin y}{2 - \sin z}$ принимает наибольшее возможное значение?

5. Петя записывает на листе бумаги строчку из 6 нулей и 29 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины – числа нулей, записанных до появления первой единицы.

6. Длина стороны AD четырехугольника $ABCD$ вписанного в окружность равна 4. Точка M делит эту сторону в отношении $AM : MD = 1 : 3$, а прямые MC и MB параллельны сторонам AB и CD соответственно. Найти длину стороны BC четырехугольника.

Вариант № 4

1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(19) = P(21) = 2020$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

2. Решить уравнение

$$\log_{\cos x} \sin 2x + \log_{\sin 2x} \cos 3x + \log_{\cos 3x} \cos x = \log_{\sin 2x} \cos x + \log_{\cos 3x} \sin 2x + \log_{\cos x} \cos 3x.$$

3. Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени переменной равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x-1) = (x-6)P(x)$.

4. При каких тройках положительных чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе
$$\begin{cases} \sin 3x - \sin 3y = 3(x - y) \\ \cos 4x - \cos 4z = 5(z - x) \end{cases}$$
, выражение $x + y + z - 2\operatorname{arctg}(x + y + z)$ принимает наименьшее возможное значение?

5. Петя записывает на листе бумаги строчку из 4 нулей и 39 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины – числа нулей, записанных до появления первой единицы.

6. Длина стороны AD четырехугольника $ABCD$ вписанного в окружность равна 6. Точка M делит эту сторону в отношении $AM : MD = 1 : 5$, а прямые MC и MB параллельны сторонам AB и CD соответственно. Найти длину стороны BC четырехугольника.