Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс

Вариант № 1

1. В районе расположено несколько жилых домов, общее число этажей в которых равно 50. Петя поднимался на крышу каждого из домов района, подсчитывал число домов меньшей этажности, которые он мог наблюдать, и складывал полученные результаты. Какое наибольшее возможное число он мог получить?

2. Сколько решений имеет уравнение $(\cos x-\cos 2x+\cos 3x)^2=\cos^2 x-\cos^2 2x+\cos^2 3x$ на отрезке $[0;100\pi]$?

3. На интервале $\left(\frac{1}{2023};\frac{1}{2022}\right)$ отмечены все несократимые обыкновенные дроби вида $\frac{231}{q}$. Найти сумму обратных величин таких дробей.

4. Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{64}{\sqrt{x-3}}+\frac{36}{\sqrt{y-4}}=44-4\sqrt{x-3}-\sqrt{y-4}\ .$$

5. Найти коэффициент при x^{50} многочлена $P(x)=\left(1+x+x^2+...+x^{20}\right)^4$.

6. Через середины сторон AB и AD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная медиане боковой грани SDC, проведенной из вершины D. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если сторона основания пирамиды 1, а боковое ребро 2.

Вариант № 2

1. В районе расположено несколько жилых домов, общее число этажей в которых равно 40. Петя поднимался на крышу каждого из домов района, подсчитывал число домов меньшей этажности, которые он мог наблюдать, и складывал полученные результаты. Какое наибольшее возможное число он мог получить?

2. Сколько решений имеет уравнение $(\sin x-\cos 2x+\sin 3x)^2=\sin^2 x-\cos^2 2x+\sin^2 3x$ на отрезке $[0;20\pi]$?

3. На интервале $\left(\frac{1}{2022};\frac{1}{2021}\right)$ отмечены все несократимые обыкновенные дроби вида $\frac{105}{q}$. Найти сумму обратных величин таких дробей.

4. Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{4}{\sqrt{x-2}}+\frac{9}{\sqrt{y-3}}=10-\sqrt{x-2}-\sqrt{y-3}\ .$$

5. Найти коэффициент при x^{20} многочлена $P(x)=\left(1+x+x^2+...+x^{10}\right)^3$.

6. Через середины сторон AB и AD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная медиане боковой грани SDC, проведенной из вершины D. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если сторона основания пирамиды $\sqrt{2}$, а боковое ребро 4.

Вариант № 3

1. В районе расположено несколько жилых домов, общее число этажей в которых равно 60. Петя поднимался на крышу каждого из домов района, подсчитывал число домов меньшей этажности, которые он мог наблюдать, и складывал полученные результаты. Какое наибольшее возможное число он мог получить?

2. Сколько решений имеет уравнение
$(\cos 2x - \sin 3x + \cos 4x)^2 = \cos^2 2x - \sin^2 3x + \cos^2 4x$ на отрезке $[0;10\pi]$?

3. На интервале $\left(\frac{1}{2021};\frac{1}{2020}\right)$ отмечены все несократимые обыкновенные дроби вида $\frac{385}{q}$. Найти сумму обратных величин таких дробей.

4. Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{9}{\sqrt{x-5}}+\frac{16}{\sqrt{y-4}}=22-\sqrt{x-5}-4\sqrt{y-4}\ .$$

5. Найти коэффициент при x^{30} многочлена $P(x)=\left(1+x+x^2+\ldots+x^{15}\right)^4$.

6. Через середины сторон AB и AD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная медиане боковой грани SDC, проведенной из вершины D. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если сторона основания пирамиды 2, а боковое ребро 8.

Вариант № 4

1. В районе расположено несколько жилых домов, общее число этажей в которых равно 70. Петя поднимался на крышу каждого из домов района, подсчитывал число домов меньшей этажности,
которые он мог наблюдать, и складывал полученные результаты. Какое наибольшее возможное число он мог получить?

2. Сколько решений имеет уравнение
$(\sin 3x - \cos 4x + \cos 5x)^2 = \sin^2 3x - \cos^2 4x + \cos^2 5x$ на отрезке $[0;30\pi]$?

3. На интервале $\left(\frac{1}{2020};\frac{1}{2019}\right)$ отмечены все несократимые обыкновенные дроби вида $\frac{429}{q}$. Найти сумму обратных величин таких дробей.

4. Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{4}{\sqrt{x+1}}+\frac{16}{\sqrt{y+3}}=20-\sqrt{x+1}-4\sqrt{y+3}\ .$$

5. Найти коэффициент при x^{40} многочлена $P(x)=\left(1+x+x^2+\ldots+x^{18}\right)^3$.

6. Через середины сторон AB и AD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная медиане боковой грани SDC, проведенной из вершины D. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если сторона основания пирамиды 2, а
боковое ребро 6.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс, выезд 1

Вариант № 1

1. В школе три девятых класса. В каждом из них обучаются по 25 учеников. Нужно собрать из учеников этих классов команду для участия в городской олимпиаде по математике с условием того, что 1) сумма возрастов (полных лет) представителей одного класса в команде кратна 25; 2) сумма возрастов всех членов команды кратна 75. Ученик 7 класса Петя подумал и сказал, что собрать такую команду возможно. Почему он в этом уверен?

2. Вычислить $11211-112211+1122211-\ldots-11\underbrace{22\ldots2}_{2020}11$ (знаки чередуются).

3. Даны сто различных натуральных чисел, 50 из которых не больше 100, а другие – больше 100, но не больше 200. Среди предложенных чисел нет двух, отличающихся на 100. Найти сумму всех чисел.

4. При каких a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \arcsin x+\arccos y=a \end{cases}$ имеет бесконечное число решений? Найти эти решения.

5. В произвольной треугольной пирамиде $ABCD$ произведено ее сечение плоскостью, пересекающей ребра AB, DC и DB в точках M, N, P соответственно. Точка M делит ребро AB в отношении $AM:MB=2$. Точка N делит ребро DC в отношении $DN:NC=3$. Точка P делит ребро DB в отношении $DP:PB=1:2$. Найти отношение, $AQ:QC$.

Вариант № 2

1. В школе четыре десятых класса. В каждом из них обучаются по 23 ученика. Нужно собрать из учеников этих классов команду для участия в городской олимпиаде по математике с условием того, что 1) сумма возрастов (полных лет) представителей одного класса в команде кратна 23; 2) сумма возрастов всех членов команды кратна 92. Ученик 7 класса Петя подумал и сказал, что собрать такую команду возможно. Почему он в этом уверен?

2. Вычислить $132-1332+13332-\ldots-1\underbrace{333\ldots3}_{2020}2$ (знаки чередуются).

3. Даны 80 различных натуральных чисел, 40 из которых не больше 80, а другие – больше 80, но не больше 160. Среди предложенных чисел нет двух, отличающихся на 80. Найти сумму всех чисел.

4. Решить систему $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \arccos x-\arcsin y=a \end{cases}$ при любых a.

5. В произвольной треугольной пирамиде $ABCD$ произведено ее сечение плоскостью, пересекающей ребра AB, DC и DB в точках M, N, P соответственно. Точка M делит ребро AB в отношении $AM:MB=1:2$. Точка N делит ребро DC в отношении $DN:NC=3:2$. Точка P делит ребро DB в отношении $DP:PB=2$. Найти отношение $AQ:QC$.

Вариант № 3

1. В школе два одиннадцатых класса. В каждом из них обучаются по 27 учеников. Нужно собрать из учеников этих классов команду для участия в городской олимпиаде по математике с условием того, что 1) сумма возрастов (полных лет) представителей одного класса в команде кратна 27; 2) сумма возрастов всех членов команды кратна 54. Ученик 7 класса Петя подумал и сказал, что собрать такую команду возможно. Почему он в этом уверен?

2. Вычислить $143-1443+14443-\ldots-1\underbrace{44\ldots4}_{2020}3$ (знаки чередуются).

3. Даны 60 различных натуральных чисел, 30 из которых не больше 60, а другие – больше 60, но не больше 120. Среди предложенных чисел нет двух, отличающихся на 60. Найти сумму всех чисел.

4. При каких a система $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 3\arcsin x - 2\arccos y = a \end{cases}$ совместна?

5. В произвольной треугольной пирамиде $ABCD$ произведено ее сечение плоскостью, пересекающей ребра AB, DC и DB в точках M, N, P соответственно. Точка M делит ребро AB в отношении $AM:MB=1:3$. Точка N делит ребро DC в отношении $DN:NC=4:3$. Точка P делит ребро DB в отношении $DP:PB=3$. Найти отношение $AQ:QC$.

Вариант № 4

1. В школе пять восьмых классов. В каждом из них обучаются по 21 ученику. Нужно собрать из учеников этих классов команду для участия в городской олимпиаде по математике с условием того, что 1) сумма возрастов (полных лет) представителей одного класса в команде кратна 21; 2) сумма возрастов всех членов команды кратна 105. Ученик 7 класса Петя подумал и сказал, что собрать такую команду возможно. Почему он в этом уверен?

2. Вычислить $154-1554+15554-\ldots-1\underbrace{55\ldots5}_{2020}4$ (знаки чередуются).

3. Даны 40 различных натуральных чисел, 20 из которых не больше 40, а другие – больше 40, но не больше 80. Среди предложенных чисел нет двух, отличающихся на 40. Найти сумму всех чисел.

4. Найти наибольшее значение a, при котором система $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \arcsin x + 4\arccos y = a \end{cases}$ имеет решение.

5. В произвольной треугольной пирамиде $ABCD$ произведено ее сечение плоскостью, пересекающей ребра AB, DC и DB в точках M, N, P соответственно. Точка M делит ребро AB в отношении $AM:MB=2:3$. Точка N делит ребро DC в отношении $DN:NC=3:5$. Точка P делит ребро DB в отношении $DP:PB=4$. Найти отношение $AQ:QC$.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс, выезд 2

Вариант № 1

1. Поселок А находится на прямолинейном участке дороги с асфальтовым покрытием, а деревня В – на поле, в стороне от дороги. Пете необходимо добраться от А до В как можно быстрее. Он решил, что часть пути он пройдет по дороге до точки С, а потом свернет с нее и пойдет по прямой до В. Скорость его передвижения по дороге в два раза больше чем по полю. Найти значение угла ACB, при котором время в пути будет наименьшим. (А и В точки, дорога – прямая линия)

2. Целое положительное число $a \le 1000$ имеет только два простых делителя: 2 и 3, а число всех его делителей, включая 1 и a, само является делителем a. Сколько существует таких чисел a? Найти наибольшее среди них.

3. Петя написал в тетради 200 последовательных нечетных натуральных чисел и сообщил Васе по телефону, что их сумма делится на 56. Какое наименьшее значение могла иметь эта сумма?

4. При каких q уравнение $\left(q^2-2q-3\right)x^2+qx+p+1=0$ имеет только положительные корни для всех положительных p ?

5. В треугольнике ABC площади 8 проведены медианы AM, BN, CQ. На прямой AC взята точка P так, что $AP:PC=1:3$. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках P, M, N, Q.

Вариант № 2

1. Поселок А находится на прямолинейном участке дороги с асфальтовым покрытием, а деревня В – в поле, на расстоянии 2 км от дороги. Петя решил, что часть пути он пройдет по дороге, а потом свернет с нее и пойдет по прямой до В. Скорость его передвижения по дороге 5 км/ч, по полю – 3 км/ч. Найти длину пути, пройденного Петром по полю, если общее время в пути оказалось минимально возможным. (А и В точки, дорога – прямая линия).

2. Целое положительное число $a \le 2000$ имеет только два простых делителя: 2 и 5, а число всех его делителей, включая 1 и a, само является делителем a. Сколько существует таких чисел a? Найти наименьшее среди них.

3. Петя написал в тетради 301 последовательных четных натуральных чисел и сообщил Васе по телефону, что их сумма делится на 119. Какое наименьшее значение могла иметь эта сумма?

4. При каких q уравнение $\left(q^2+q-2\right)x^2+(q+1)x-2+p=0$ имеет только отрицательные корни для всех отрицательных p ?

5. В треугольнике ABC площади 10 проведены медианы AM, BN, CQ. На прямой AC взята точка P так, что $AP:PC=3:2$. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках P, M, N, Q.

Вариант № 3

1. Поселок А находится на прямолинейном участке дороги с асфальтовым покрытием, а деревня В – в поле, на расстоянии 5 км от дороги и 13 км от А. Петя решил, что часть пути он пройдет по дороге, а потом свернет с нее и пойдет по прямой до В. Скорость его передвижения по дороге 5 км/ч, по полю – 3 км/ч. Найти длину отрезка пути, пройденного Петром по дороге, если общее время в пути оказалось минимально возможным. (А и В точки, дорога – прямая линия).

2. Целое положительное число $a \le 10^5$ имеет только два простых делителя: 3 и 5, а число всех его делителей, включая 1 и a, само является делителем a. Сколько существует таких чисел a? Найти наибольшее среди них.

3. Петя написал в тетради 100 последовательных нечетных натуральных чисел и сообщил Васе по телефону, что их сумма делится на 65. Какое наименьшее значение могла иметь эта сумма?

4. При каких q уравнение $\left(q^2-3q-4\right)x^2+(q-2)x+p+3=0$ имеет только отрицательные корни для всех положительных p?

5. В треугольнике ABC площади 20 проведены медианы AM, BN, CQ. На прямой AC взята точка P так, что $AP:PC=2:3$. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках P, M, N, Q.

Вариант № 4

1. Поселок А находится на прямолинейном участке дороги с асфальтовым покрытием, а деревня В – в поле, на расстоянии 5 км от дороги и 13 км от А. Пете необходимо добраться от А до В как можно быстрее. Сначала Петр хотел идти в деревню В напрямик, но потом решил, что часть пути пройдет по дороге, а затем свернет с нее и пойдет по прямой до В. Скорость его передвижения по дороге 5 км/ч, по полю – 4 км/ч. Какое максимальное время может сэкономить Петр, выбрав такой маршрут? (А и В точки, дорога – прямая линия).

2. Целое положительное число $a \le 50000$ имеет только два простых делителя: 2 и 7, а число всех его делителей, включая 1 и a, само является делителем a. Сколько существует таких чисел a? Найти наименьшее среди них.

3. Петя написал в тетради 153 последовательных четных натуральных чисел и сообщил Васе по телефону, что их сумма делится на 221. Какое наименьшее значение могла иметь эта сумма?

4. При каких q уравнение $\left(q^2-5q+6\right)x^2+(q-4)x+p-1=0$ имеет только отрицательные корни для всех отрицательных p?

5. В треугольнике ABC площади 14 проведены медианы AM, BN, CQ. На прямой AC взята точка P так, что $AP:PC=4:3$. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках P, M, N, Q.