Критерии проверки работ заключительного тура Олимпиады Росатом по математике, 10 класс, 17 февраля 2024

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

Если задача решалась через введение производительностей и составления уравнений.

0 б – разрозненные попытки что-то выразить.

1 б – Получены выражения для двух времен и условие выполнения работы.

2б – Найдено отношение времен и оно упрощено до выражения, содержащего только известные величины.

3 б – Получен полностью верный ответ в виде формулы и численного значения.

Если задача решалась через гипотетическую совместную работу.

2б – Небольшие погрешности в обосновании или финальная арифметическая ошибка.

3 б – Задача решена качественно (когда работают все вместе) с полным обоснованием и верным ответом.

Задача 2:

0 б – Выведена сумма квадратов, которая далее заменена равносильной системой.

1 б – На основе предыдущих шагов составлены и верно решены **все** тригонометрические уравнения, без отбора корней.

2 б – Потеря одного корня при отборе корней (потеря большего числа корней – не более 1 б).

3 б - На основе предыдущих шагов верно отобраны все корни.

Задача 3:

Если задача решается на основании делителей числа монет.

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Верно полученный ответ без примера.

2 б -- Незначительные арифметические ошибки.

3 б - Полностью верное решение на основе делителей с примером реализации.

Если задача решается путем перебора стратегий.

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Перебраны некоторые стратегии ходов Пети, но не доказано, что иных (не эквивалентных рассмотренным) нет .

2 б -- Незначительные арифметические ошибки.

3 б - Рассмотрены **все** возможные стратегии ходов Пети (доказано, что иных, не эквивалентных рассмотренным, нет), получен верный ответ с примером стратегии, приводящей к требуемому результату.

В обоих случаях

значительные арифметические и\или логические ошибки в рассуждениях – не более 1 балла.

Задача 4:

1 б – Тем или иным способом обоснованы условия существования корней.

2 б – Произведены преобразования коэффициентов уравнения, позволяющие оценить экстемальное значение параметра b, (пример реализации не приведен) .

2 б – Приведен пример реализации, но не доказано, что b при этом принимает экстремальное значение.

3 б - Найдено верное значение параметра b и приведен пример реализации.

Арифметические и тригонометрические ошибки в этой задаче – не более 1 балла.

Задача 5:

0 б – Нарисован рисунок, отражающий все условия задачи.

1 б – Сделаны дополнительные построения, позволяющие получить подобные треугольники, для которых можно использовать данные задачи.

2 б - Приведено полное обоснование равенства соответствующих углов в треугольниках, выписаны верные пропорции, на основании которых получен правильный буквенный ответ.

2 б - небольшие арифметические ошибки или небольшие погрешности в обосновании.

3 б - На основе предыдущих шагов верно найдено числовое значение величины требуемого угла.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 10 класс, 17 февраля 2024

Вариант 1

1. Бригаду, состоящую из 4 землекопов, подрядили копать яму под фундамент жилого дома, но выдали только одну лопату. Чтобы все могли заработать, договорились копать по очереди: каждый член бригады работает столько времени, сколько копали бы $\frac{1}{4}$ часть ямы все остальные землекопы одновременно, при наличии у всех лопат. Работа на этих условиях была выполнена полностью. Во сколько раз работа могла быть выполнена быстрее, если изначально каждому дали по лопате.

2. Найти все пары чисел $(x;y)$ в прямоугольнике $0\le x\le 2\pi, 0\le y\le 1$, для которых

$$(\cos^4 x+1)(\cos^4(xy)+1)=4\cos^2 x\cos^2(xy).$$

3. В центре стола находятся 600 фишек, и Петя готовится играть на нем в игру под названием «Забери больше фишек». Цель игры – убрать со стола как можно больше фишек, соблюдая правило: за один ход можно убрать со стола ровно 154 фишки (или не брать ни одной), а вернуть на стол только 105 (или не возвращать ни одной). Какое наибольшее число фишек может убрать со стола Петя, соблюдая правила? Своих фишек в карманах Пети нет.

4. Найти наименьшее значение числа b, при котором уравнение $x^2+ax+a+b=0$ имеет два решения вида $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для некоторого $\alpha\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 75^0. На высоте BH выбрана точка D так, что угол ADC равен 105^0. Отношение $AD:BC=1:\sqrt{3}$. Найти угол при вершине C треугольника.

Ответы и решения

Задача 1. Пусть p_k – производительность k - го землекопа в долях от единицы в час, тогда общая производительность бригады будет $p=p_1+p_2+p_3+p_4$. Время работы k - го землекопа составит $\frac{1}{4(p-p_k)}$ часов, при этом он выполнит долю работы, равную $\frac{p_k}{4(p-p_k)}$. Запишем условие выполнения полной работы:

$$\frac{p_1}{4(p-p_1)}+\frac{p_2}{4(p-p_2)}+\frac{p_3}{4(p-p_3)}+\frac{p_4}{4(p-p_4)}=1,$$

и время выполнения работы бригадой в этом режиме (одна лопата на всех):

$$T_1=\frac{1}{4(p-p_1)}+\frac{1}{4(p-p_2)}+\frac{1}{4(p-p_3)}+\frac{1}{4(p-p_4)}.$$

Время копания ямы при условии одновременной работы всей бригады будет $T_2=\frac{1}{p}$.

Тогда искомое отношение $n=\dfrac{T_1}{T_2}$. Таким образом,

$$n=\frac{p}{4(p-p_1)}+\frac{p}{4(p-p_2)}+\frac{p}{4\left(p-p_3\right)}+\frac{p}{4(p-p_4)}=$$
$$=\frac{p-p_1+p_1}{4(p-p_1)}+\frac{p-p_2+p_2}{4(p-p_2)}+\frac{p-p_3+p_3}{4\left(p-p_3\right)}+\frac{p-p_4+p_4}{4(p-p_4)}=$$
$$=\frac{1}{4}\left(4+\frac{p_1}{(p-p_1)}+\frac{p_2}{(p-p_2)}+\frac{p_3}{\left(p-p_3\right)}+\frac{p_4}{(p-p_4)}\right).$$

С учетом условия выполнения полной работы получаем $n=\dfrac{4+4}{4}=2.$

Второй вариант решения. Пусть во время того, как очередной член бригады копает, остальным также выдали лопаты, и они также копают. По условию задачи, за время копания одним землекопом, остальные выкопали бы $\dfrac{1}{4}$ часть ямы. Когда все члены бригады отработают каждый свою часть, будет выкопана дополнительно $\dfrac{1}{4}\cdot 4,$ то есть еще одна яма. Тогда всего за то же время будет выкопаны две ямы, поэтому работа могла быть закончена в два раза раньше.

Ответ: в 2 раза.

Задача 2. Введем обозначения: $u=\cos x,\ v=\cos xy$, тогда исходное уравнение примет вид

$$(u^4+1)(v^4+1)=4u^2v^2.$$

Раскроем скобки и преобразуем его к сумме квадратов

$$u^4v^4+u^4+v^4+1-4u^2v^2=0\Leftrightarrow(u^2v^2-1)^2+(u^2-v^2)^2=0.$$

Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю тогда и только тогда, когда они оба равны нулю. Следовательно,

$$\begin{cases}u^2v^2=1\\ u^2=v^2\end{cases}\Leftrightarrow|u|=|v|=1.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\begin{cases}|\cos x|=1\\ |\cos xy|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pi m\\ xy=\pi k\end{cases},\ k,m\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку по условию $0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le 1$, то $m=0,1,2,$ таким образом, возможны случаи:

Случай 1. $x=0$, $y=t\in\left[0;1\right]$

Случай 2. $x=\pi,\ y=0;\ 1.$

Случай 3. $x=2\pi,\ y=0;\ 0{,}5;\ 1.$

Ответ: 1) $(x;y)=(0;t),t\in\left[0;1\right]$, 2) $(x;y)=\left(\pi;0\right),(\pi;1),$

3) $(x;y)=\left(2\pi;0\right),\ \left(2\pi;0{,}5\right),\ (2\pi;1).$

Задача 3. Поскольку $154=2\cdot7\cdot11$, а $105=3\cdot5\cdot7$, то числа 154 и 105 имеют общий делитель 7. Таким образом, общее число фишек, которое Петя уберет со стола, делится на 7. Наибольшее число, делящееся на 7, и не превосходящее 600 равно 595 $\left(600=7\cdot85+5\right)$. Значит, более 595 фишек Петя забрать не сможет.

Покажем, что собрать 595 фишек возможно. Пусть для этого ему придется k раз забрать 154 фишки и m раз вернуть на стол 105 фишек. Имеем, $154k-105m=595\Leftrightarrow 22k-15m=85$.

Из уравнения видно, что k делится на 5, поэтому $k = 5s$, тогда

$$22s - 3m = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 + 3t \\ m = 9 + 22t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 10 + 15t \\ m = 9 + 22t \end{cases},$$

где t может принимать значения 0,1,2,…22. Видим, что убрать со стола 595 фишек можно различными способами. Например, как это можно сделать за 19 ходов:

$$\underbrace{(154-105)+(154-105)+...+(154-105)}_{9\ раз}+154=595$$

Этот вариант возможен: после каждой пары ходов число фишек на столе монотонно уменьшается на 49, а после последнего снятия на столе останется 5 фишек.

Ответ: 595 фишек.

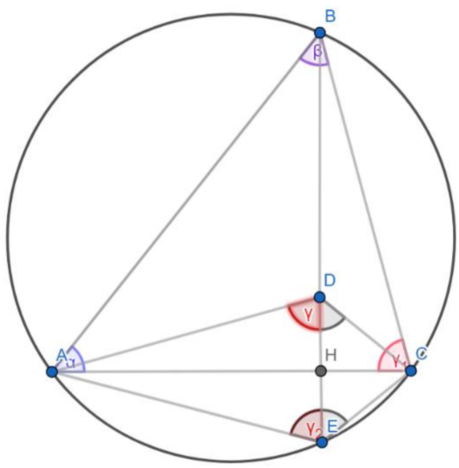
Задача 4. По условию $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, значит, корни $x_1 = \sin\alpha \le 0,\ x_2 = \cos\alpha \ge 0$ разных знаков. По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = \sin\alpha + \cos\alpha = -a \\ x_1 \cdot x_2 = \sin\alpha \cdot \cos\alpha = a + b \end{cases}$, тогда

$$\begin{cases} a + b \le 0 \\ 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a+b) \end{cases}$$

откуда получаем $b = \dfrac{a^2 - 2a - 1}{2} = \dfrac{(a-1)^2}{2} - 1$. При этом $a + b = a + \dfrac{a^2 - 2a - 1}{2} = \dfrac{a^2 - 1}{2} \le 0$, следовательно, $a \in [-1;1]$. Минимальное значение b достигается при $a = 1$ и равно $b_{\min} = -1$. Проверим, что существует $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, на котором реализуется этот минимум. При $a = 1, b = -1$ уравнение примет вид $x^2 + x = 0$, тогда $x_1 = -1 = \sin\frac{3\pi}{2},\ x_2 = 0 = \cos\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $b_{\min} = -1$.

Задача 5. Пусть $\measuredangle BAC = \alpha,\ \measuredangle ABC = \beta = 75^o,\ \measuredangle BCA = \gamma,\ \measuredangle ADC = \delta = 105^o$.



Построим точку E, симметричную точке D относительно прямой AC. Тогда $\measuredangle AEC = \measuredangle DEC = \delta = 105^o$. Сумма противоположных углов четырехугольника $ABCE$ равна $\beta + \delta = 180^o$, значит, четырехугольник $ABCE$ – вписанный. Тогда $\measuredangle BEA = \measuredangle BCA = \gamma$, так как они опираются на одну дугу AB. Кроме того, из симметрии следует, что $\measuredangle BEA = \measuredangle EDA$, значит треугольник ADH подобен треугольнику BCH, так как это прямоугольные треугольники с равным острым углом γ. Тогда имеем пропорцию: $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (последнее равенство следует из условия задачи). Но $\dfrac{AH}{BH} = \operatorname{ctg}\alpha$, значит, $\alpha = 60^o$, тогда

$$\measuredangle BCA = \gamma = 180^o - \beta - \alpha = 180^o - 75^o - 60^o = 45^o.$$

Ответ: $\measuredangle C = 45^0$.

Вариант 2

1. Бригаду, состоящую из 6 землекопов, подрядили копать яму под фундамент жилого дома, но выдали только одну лопату. Чтобы все могли заработать, договорились копать по очереди: каждый член бригады работает столько времени, сколько копали бы $\frac{1}{3}$ часть ямы все остальные землекопы одновременно, при наличии у всех лопат. Работа на этих условиях была выполнена полностью. Во сколько раз работа могла быть выполнена быстрее, если изначально каждому дали по лопате.

Ответ: в 3 раза

2. Найти все пары чисел $(x;y)$ в прямоугольнике $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 2$, для которых

$$(\sin^4 2x+1)(\cos^4(2xy)+1)=4\sin^2 2x\cos^2(2xy).$$

Ответ: 1) $(x;y)=\left(\frac{\pi}{4};0\right),\left(\frac{\pi}{4};2\right)$, 2) $(x;y)=\left(\frac{3\pi}{4};0\right),\left(\frac{3\pi}{4};\frac{2}{3}\right),\left(\frac{3\pi}{4};\frac{4}{3}\right),\left(\frac{3\pi}{4};2\right)$.

3. В центре стола находятся 700 фишек, и Петя готовится играть на нем в игру под названием «Забери больше фишек». Цель игры – убрать со стола как можно больше фишек, соблюдая правило: за один ход можно убрать со стола ровно 396 фишки (или не брать ни одной), а вернуть на стол только 234 (или не возвращать ни одной). Какое наибольшее число фишек может убрать со стола Петя, соблюдая правила? Своих фишек в карманах Пети нет.

Ответ: 684 фишки.

4. Найти наибольшее значение числа b, при котором уравнение $x^2+2ax+3a-2b=0$ имеет два решения вида $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для некоторого $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Ответ: $b_{\max}=\frac{3}{4}$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 72^0. На высоте BH выбрана точка D так, что угол ADC равен 108^0. Отношение $AD:BC=\sqrt{3}$. Найти угол при вершине C треугольника.

Ответ: $\measuredangle C=78^0$

Вариант 3

1. Бригаду, состоящую из 6 землекопов, подрядили копать яму под фундамент жилого дома, но выдали только одну лопату. Чтобы все могли заработать, договорились копать по очереди: каждый член бригады работает столько времени, сколько копали бы $\frac{1}{2}$ часть ямы все остальные землекопы одновременно, при наличии у всех лопат. Работа на этих условиях была выполнена полностью. Во сколько раз работа могла быть выполнена быстрее, если изначально каждому дали по лопате.

Ответ: в 4 раза.

2. Найти все пары чисел $(x;y)$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, для которых

$$(\sin^4 3y+1)(\cos^4(4xy)+1)=4\sin^2 3y\cos^2(4xy).$$

Ответ: 1) $(x;y)=\left(0;\frac{\pi}{6}\right),\left(\frac{3}{2};\frac{\pi}{6}\right)$, 2) $(x;y)=\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}\right),\left(1;\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2}\right),\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$.

3. В центре стола находятся 503 фишек, и Петя готовится играть на нем в игру под названием «Забери больше фишек». Цель игры – убрать со стола как можно больше фишек, соблюдая правило: за один ход можно убрать со стола ровно 105 фишки (или не брать ни одной), а вернуть на стол только 110 (или не возвращать ни одной). Какое наибольшее число фишек может убрать со стола Петя, соблюдая правила? Своих фишек в карманах Пети нет.

Ответ: 500 фишек.

4. Найти наименьшее значение числа b, при котором уравнение $x^2 + 3ax + a + 2b = 0$ имеет два решения вида $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для некоторого $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $b_{\min} = \frac{1}{6}$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 81^0. На высоте BH выбрана точка D так, что угол ADC равен 99^0. Отношение $AD : BC = 1 : \sqrt{3}$. Найти угол при вершине C треугольника.

Ответ: $\measuredangle C = 39^0$.

Вариант 4

1. Бригаду, состоящую из 5 землекопов, подрядили копать яму под фундамент жилого дома, но выдали только одну лопату. Чтобы все могли заработать, договорились копать по очереди: каждый член бригады работает столько времени, сколько копали бы $\frac{1}{2}$ часть ямы все остальные землекопы одновременно, при наличии у всех лопат. Работа на этих условиях была выполнена полностью. Во сколько раз работа могла быть выполнена быстрее, если изначально каждому дали по лопате.

Ответ: в 3,5 раза

2. Найти все пары чисел $(x; y)$ в прямоугольнике $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\pi$, для которых

$$(\cos^4 y + 1)(\sin^4(3xy) + 1) = 4\cos^2 y \sin^2(3xy).$$

Ответ: 1) $(x; y) = \left(\frac{1}{6}; \pi\right), \left(\frac{1}{2}; \pi\right), \left(\frac{5}{6}; \pi\right)$,

2) $(x; y) = \left(\frac{1}{12}; 2\pi\right), \left(\frac{1}{4}; 2\pi\right), \left(\frac{5}{12}; 2\pi\right), \left(\frac{7}{12}; 2\pi\right), \left(\frac{3}{4}; 2\pi\right), \left(\frac{11}{12}; 2\pi\right)$.

3. В центре стола находятся 400 фишек, и Петя готовится играть на нем в игру под названием «Забери больше фишек». Цель игры – убрать со стола как можно больше фишек, соблюдая правило: за один ход можно убрать со стола ровно 330 фишки (или не брать ни одной), а вернуть на стол только 234 (или не возвращать ни одной). Какое наибольшее число фишек может убрать со стола Петя, соблюдая правила? Своих фишек в карманах Пети нет.

Ответ: 330 фищек.

4. Найти наибольшее значение числа b, при котором уравнение $x^2 - 2ax + 4a - b = 0$ имеет два решения вида $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для некоторого $\alpha \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: $b_{\max} = -2$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 83^0. На высоте BH выбрана точка D так, что угол ADC равен 97^0. Отношение $AD : BC = \sqrt{3}$. Найти угол при вершине C треугольника.

Ответ: $\measuredangle C = 67^0$.