Критерии проверки работ заключительного тура Олимпиады Росатом по математике, 11 класс, Регионы, 17 февраля 2024

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1.

0 б – Не введены обозначения или неверно составлено хотя бы одно из уравнений.

1 б – Верно составлены оба уравнения.

2б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2.

0 б – Не получено верное упрощённое уравнение.

1 б – Получено верное упрощенное уравнение и верно указано ОДЗ.

2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3.

0 б – Нет никаких верных утверждений

1 б – Верно выражено n через p.

2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.

Задача 4.

0 б –Нет никаких соображений по ходу решения задачи.

1 б –Правильно выписана формула для вычисления площади области G.

2 б – Верно нашёл p. а при вычислении q допустил арифметическую ошибку, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочёты.

3 б - Задача решена верно.

Задача 5.

0 б –Не введены обозначения и нет пояснений по составлению уравнений, необходимых для решения задачи.

1 б –Ввёл обозначения и верно нашёл расстояние между двумя точками.

2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.

Задача 6.

0 б – Неверно нарисован чертёж.

1б – Ввёл обозначения и правильно построил чертёж (правильно определил прямая QP пересекает ребро BB_1 или нет, т.е. будет 1-ый случай или 2-ой).

2 б – Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б – Задача решена верно.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11класс, 17 февраля 2024, Регионы

Вариант 1.

1. У Пети в семье, помимо папы, мамы и бабушки, есть еще братья и сестры. Средний возраст папы, мамы и бабушки на 20 лет больше среднего возраста детей и на 10 лет больше среднего возраста всех членов семьи. Сколько сестер у Пети?

2. Решить уравнение

$$2\sin \pi x = \left[\lg \frac{2^x}{10}\right] - \left[\lg\left[2^x\right]\right].$$

Здесь $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Натуральное число $n \geq 2024$ имеет простой делитель $p > 3$ и другой делитель q, связанный с p соотношением $(p-1)(q+3) = n-3$. Найти наименьшее возможное при эти этих условиях число n.

4. Область G на плоскости, ограниченная двумя параболами $y = -2x^2 + x$ и $y = x^2 + px + q$, имеет площадь 112. Вертикальная прямая $x = 2$ разбивает ее на две равновеликие части. Найти p и q.

5. На графике приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целочисленными координатами. Найти расстояние между этими точками, если известно, что оно выражается целым числом, а дискриминант квадратного трехчлена равен 4.

6. Медианы оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно. На отрезке OO_1 взята точка P так, что $O_1P : PO = 1:3$. Через точку P проведена прямая параллельная диагонали A_1C боковой грани призмы. Найти длину отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы, если длина диагонали A_1C равна 2.

Ответы и решения.

Задача 1. Введем обозначения: n – число детей в семье, включая Петю; u, v, w – возраст папы, мамы и бабушки, соответственно; Σ – сумма возрастов детей. Тогда по условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{u+v+w}{3} - \dfrac{\Sigma}{n} = 20 \\ \dfrac{u+v+w}{3} - \dfrac{\Sigma+u+v+w}{n+3} = 10 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} n(u+v+w) - 3\Sigma = 60n \\ (n+3)(u+v+w) - 3\Sigma - 3(u+v+w) = 30(n+3) \end{cases} \to 60n = 30(n+3) \to n = 3$$

Братьев и сестер двое. Поскольку по условию есть брат и сестра, то сестра одна.

Ответ: одна сестра.

Задача 2. Преобразуем уравнение:

$$\left[\lg \frac{2^x}{10}\right] = \left[\lg 2^x - 1\right] = \left[\lg 2^x\right] - 1 \to 2\sin \pi x + 1 = \left[\lg 2^x\right] - \left[\lg\left[2^x\right]\right].$$

Область допустимых значений: $\left[2^x\right] > 0 \to 2^x \geq 1 \to x \geq 0$.

Для любого $x \geq 0$ существует целое число $n_x \geq 0$ такое, что

$$10^{n_x} \le 2^x < 10^{n_x+1} \to 10^{n_x} \le \left[2^x\right] < 10^{n_x+1} \to \left[\lg 2^x\right] = n_x \text{ и } \left[\lg\left[2^x\right]\right] = n_x$$

Отсюда правая часть преобразованного уравнения при всех допустимых x равна нулю.

Искомое уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2\sin\pi x + 1 = 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} x_1 = 2m - \dfrac{1}{6}, m = 1, 2, \ldots \\ x_2 = 2k - \dfrac{5}{6}, k = 1, 2, \ldots \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 2m - \dfrac{1}{6}, m = 1, 2, \ldots \\ x_2 = 2k - \dfrac{5}{6}, k = 1, 2, \ldots \end{array}\right.$

Задача 3. Раскроем скобки:

$$pq - q + 3p = n \quad (*)$$

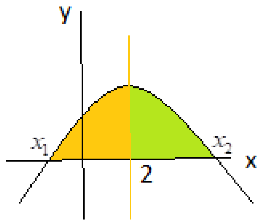
По условию, p – делитель числа n, поэтому из (*) следует, что q делится на $p \to q = kp$. q – делитель n, поэтому из (*) следует, что $3p$ делится на $q = kp \to k = 3 \to q = 3p$ (случай $k = 1$ не подходит, так как $p \ne q$). Тогда, следуя (*), получаем, что $n = 3p^2$. Теперь следует выбрать минимальное простое число p, для которого $3p^2 \ge 2024$. Таким простым числом является $p = 29 \to n = 2523$

Ответ: 2523.

Задача 4. Пусть $x_1, x_2, x_1 < x_2$ – корни квадратного уравнения

$$-2x^2 + x = x^2 + px + q: 3x^2 + (p-1)x + q = 0 \to D = (p-1)^2 - 12q > 0, \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{1-p}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{q}{3} \end{cases}$$

Тогда площадь области G $\quad S_G = -\int\limits_{x_1}^{x_2}(3x^2 + (p-1)x + q)dx$



Прямая $x = 2$ делит площадь под параболой $y = -3x^2 - (p-1)x - q$ пополам:

$$\to \frac{x_1 + x_2}{2} = 2 \to \frac{1-p}{6} = 2 \to p = -11$$

$$3x^2 - 12x + q = 0 \to x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-3q}}{3} \to x_2 - x_1 = \frac{2\sqrt{36-3q}}{3}, q < 12$$

$$x_1 + x_2 = 4,\ x_1 \cdot x_2 = \frac{q}{3}$$

По теореме Ньютона-Лейбница:

$$S_G = -\int\limits_{x_1}^{x_2}(3x^2 - 12x + q)dx = -\left((x_2^3 - x_1^3) - 6(x_2^2 - x_1^2) + q(x_2 - x_1)\right) =$$

$$= -(x_2 - x_1)\left(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 6(x_1 + x_2) + q\right) =$$

$$= -(x_2 - x_1)\left((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + q\right) = -(x_2 - x_1)\left(-8 + \frac{2q}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{9}\sqrt{36 - 3q}(12 - q) = 112 \to (12 - q)^{\frac{3}{2}} = 28 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \to q = 12 - 3 \cdot 28^{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $p = -11, q = 12 - 3 \cdot 28^{\frac{2}{3}}$.

Задача 5. Пусть приведенный трехчлен имеет вид $x^2 + ax + b$. Обозначим: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in Z$ – координаты выбранных точек. Имеем:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 + ax_1 + b \\ y_2 = x_2^2 + ax_2 + b \end{cases} \to y_1 - y_2 = (x_1 - x_2)\underbrace{((x_1 + x_2) + a)}_{k} = k(x_1 - x_2), k \in Z$$

Квадрат расстояния между точками:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2(1 + k^2)$$

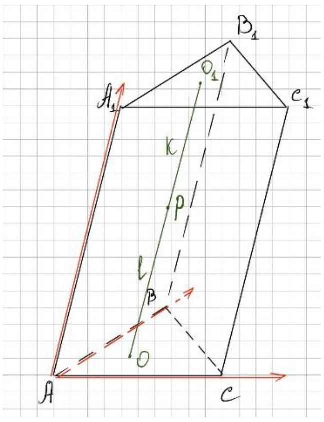
является квадратом целого числа, поэтому $1 + k^2$ также квадрат целого числа

$$1 + k^2 = m^2 \to (m - k)(m + k) = 1 \to k = 0,\ m = 1.$$

Поэтому $y_1 = y_2$. То есть абсциссы выбранных точек симметричны относительно абсциссы вершины параболы. Поскольку $a^2 - 4b$ – чётное число, то a – тоже чётное число, поэтому абсцисса вершины параболы ($x_0 = -\frac{a}{2}$) – целое число. Таким образом абсциссы выбранных точек имеют вид: $x_0 - s$ и $x_0 + s$, где s – неотрицательное целое число, а расстояние между ними - $2s$.

Ответ: d – любое четное неотрицательное число.

Задача 6. Решим задачу в общей постановке.



Медианы оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точках O и O_1, соответственно. На отрезке OO_1 взята точка P так, что $O_1P : PO = k : l$. Через точку P проведена прямая параллельная диагонали A_1C боковой грани призмы. Найти длину отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы, если длина диагонали A_1C равна a.

Решение. Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{AC},\ \vec{b} = \overrightarrow{AB},\ \vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$. Введём систему координат с началом в точке A и координатными осями, направленными по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Так как медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, то есть точка O имеет координаты $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$.

Аналогично, точка O_1 имеет координаты $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1\right)$. Тогда координаты точки P равны $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{l}{k+l}\right)$.

Координаты вектора $\overrightarrow{A_1C} = (1; 0; -1)$.

Проведем прямую, параллельную A_1C, проходящую через точку P. Координаты точек на этой прямой имеют вид: $P + \mu \cdot \overrightarrow{A_1C} = \left(\frac{1}{3} + \mu; \frac{1}{3}; \frac{l}{k+l} - \mu\right)$.

Точка с координатами (x, y, z)принадлежит внутренности призмы тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Таким образом получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \mu \geq 0 \\ \frac{2}{3} + \mu \leq 1 \\ 0 \leq \frac{l}{k+l} - \mu \leq 1 \end{cases}$$

Значит $\mu \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right] \cap \left[\frac{-k}{k+l}; \frac{l}{k+l}\right]$. Таким образом получаем ответ:

$$\left|\overrightarrow{A_1C}\right| \cdot \left(\min\left(\frac{1}{3}, \frac{l}{k+l}\right) - \max\left(-\frac{1}{3}, -\frac{k}{k+l}\right)\right), \left|\overrightarrow{A_1C}\right| = a.$$

В варианте 1 $A_1C = 2$ равна 2 и, следовательно, длина отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы равна $\frac{7}{6}$.

Ответ: $\frac{7}{6}$.

Вариант 2.

1. У Пети в семье, помимо папы, мамы и бабушки, есть еще братья и сестры. Средний возраст папы, мамы и бабушки на 15 лет больше среднего возраста детей и на 10 лет больше среднего возраста всех членов семьи. Сколько в семье детей?

Ответ: шесть детей.

2. Решить уравнение

$$4\cos \pi x = \left[\lg(100 \cdot 3^x)\right] - \left[\lg\left[3^x\right]\right].$$

Здесь $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a .

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 2m - \frac{1}{3}, m = 1, 2, \ldots \\ x_2 = 2k + \frac{1}{3}, k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right.$

3. Натуральное число $n \geq 2023$ имеет простой делитель $p > 2$ и другой делитель q, связанный с p соотношением $(p-1)(q+2) = n-2$. Найти наименьшее возможное при эти этих условиях число n.

Ответ: 2738.

4. Область G на плоскости, ограниченная двумя параболами $y = -2x^2 + 3x$ и $y = x^2 + px + q$, имеет площадь 32. Вертикальная прямая $x = 1$ разбивает ее на две равновеликие части. Найти p и q.

Ответ: $p = -3, q = -9$.

5. На графике приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целочисленными координатами. Найти расстояние между этими точками, если известно, что оно выражается целым числом, а дискриминант квадратного трехчлена равен 9.

Ответ: любое положительное нечетное число.

6. Медианы оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно. На отрезке OO_1 взята точка P так, что $O_1P : PO = 3:5$. Через точку P проведена прямая параллельная диагонали A_1C боковой грани призмы. Найти длину отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы, если длина диагонали A_1C равна 2.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Вариант 3.

1. У Пети в семье, помимо папы, мамы и бабушки, есть еще братья и сестры. Средний возраст папы, мамы и бабушки на 16 лет больше среднего возраста детей и на 8 лет больше среднего

возраста всех членов семьи. На сколько лет суммарный возраст папы, мамы и бабушки больше суммы возрастов детей?
Ответ: на 48 лет.
2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\pi x = \left[\lg\frac{4^x}{10}\right] - \left[\lg\left[4^x\right]\right].$$

Здесь $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a.

Ответ: $x = m - \frac{1}{6}, m = 1, 2, \ldots$

3. Натуральное число $n \geq 1947$ имеет простой делитель $p > 5$ и другой делитель q, связанный с p соотношением $(p-2)(q+5) = n-10$. Найти наименьшее возможное при эти этих условиях число n.
Ответ: 2530.
4. Область G на плоскости, ограниченная двумя параболами $y = -2x^2 - 6x$ и $y = x^2 + px + q$, имеет площадь 108. Вертикальная прямая $x = -2$ разбивает ее на две равновеликие части. Найти p и q.
Ответ: $p = 6, q = -15$.
5. На графике приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целочисленными координатами. Найти расстояние между этими точками, если известно, что оно выражается целым числом, а дискриминант квадратного трехчлена равен 16.
Ответ: любое четное неотрицательное число.
6. Медианы оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно. На отрезке OO_1 взята точка P так, что $O_1P : PO = 1:4$. Через точку P проведена прямая параллельная диагонали A_1C боковой грани призмы. Найти длину отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы, если длина диагонали A_1C равна 5.
Ответ: $\frac{8}{3}$.

Вариант 4.

1. У Пети в семье, помимо папы, мамы и бабушки, есть еще братья и столько же сестер. Средний возраст папы, мамы и бабушки на 18 лет больше среднего возраста детей и на 12 лет больше среднего возраста всех членов семьи. Сколько у Пети братьев?
Ответ: 2 брата. Если считаем, что всего нечетное число детей, то задача решений не имеет (2,5 брата).
2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\pi x = \left[\lg(10\cdot 5^x)\right] - \left[\lg\left[5^x\right]\right].$$

Здесь $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a.

Ответ: $x = m + \frac{1}{3}, m = 0, 1, 2, \ldots$

3. Натуральное число $n \geq 1944$ имеет простой делитель $p > 7$ и другой делитель q, связанный с p соотношением $(p-3)(q+7) = n-21$. Найти наименьшее возможное при эти этих условиях число n.
Ответ: 2261.
4. Область G на плоскости, ограниченная двумя параболами $y = -2x^2 - 8x$ и $y = x^2 + px + q$, имеет площадь 32. Вертикальная прямая $x = -3$ разбивает ее на две равновеликие части. Найти p и q.

Ответ: $p = 10, q = 15$.

5. На графике приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целочисленными координатами. Найти расстояние между этими точками, если известно, что оно выражается целым числом, а дискриминант квадратного трехчлена равен 25.

Ответ: любое нечетное неотрицательное число.

6. Медианы оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно. На отрезке OO_1 взята точка P так, что $O_1P : PO = 2:3$. Через точку P проведена прямая параллельная диагонали A_1C боковой грани призмы. Найти длину отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы, если длина диагонали A_1C равна 9.

Ответ: 6.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11класс, 17 февраля 2024, Москва

Вариант 1.

1. На стадионе имеются две беговые дорожки. Каждая из них является границей квадрата со сторонами 400м и 600м соответственно. Квадраты имеют общую вершину А и две стороны меньшего квадрата лежат на сторонах большего квадрата. Два друга Петя и Коля решили пробежаться, но выбрали для этого разные дорожки. Стартовали одновременно из точки А и бежали 2 часа в одном направлении с одинаковой скоростью 100 м/мин. Сколько метров дистанции ребята бежали рядом с друг другом?

2. Пары чисел $(x; y)$ связаны соотношениями

$$\frac{\sin x}{1+\sin y-\sin x}=\frac{\sin y}{1+\sin x-\sin y}=\frac{1}{\sin x+\sin y-1}.$$

Найти наименьшее возможное значение величины $\sin^2 x-\frac{1}{6}\cos 2y$.

3. Найти сумму максимальных нечетных делителей каждого из целых чисел на отрезке $[41;80]$.

4. На плоскости нарисовано 100 прямоугольников с вершиной в начале координат, с противоположной вершиной – на гиперболе $y=\frac{2x+3}{x}$ в точках с абсциссой $x=n,\ n=1,2,3,...,100$, со сторонами параллельными координатным осям. Область D содержит те точки плоскости, которые принадлежат только одному из прямоугольников. Найти площадь D.

5. Найти коэффициент a_{2024} многочлена $P(x)=(1+x^{125}+x^{131})^{18}$, если бы он был приведен в форму суммы одночленов вида $a_k x^k,\ k=0,2,3,...,2358$.

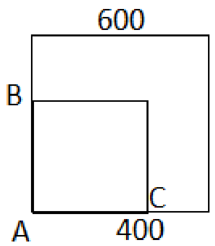
6. Точка O – начало трех отрезков OA, OB и OC лежащих в плоскости P и имеющих длины $1, 2$ и 3 соответственно. На прямой L, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости P, расположена точка D так, что сумма углов, образуемых прямыми DA, DB и DC с прямой L, равна 180^0. Найти длину отрезка OD.

Ответы и решения.

Задача 1. Обозначим точки пересечения дорожек буквами A, B, C, как показано на рисунке. Пусть движение происходит в направлении против часовой стрелки. Петя бежит по большой дорожке, Коля – по малой. Моменты времени, в которые Петя и Коля попадают в точку B за 2 часа бега, описываются сериями:

$t_1=20+24k,\ k=0,1,2,3,4$

$t_2=12+16m,\ m=0,1,2,...6$



Моменты встречи друзей в точке B определяют начало промежутка времени в 8 мин, в течении которого они бегут вместе:

$t_1 = t_2 \to 20 + 24k = 12 + 16m \to 2m - 3k = 1 \to \begin{cases} m = 2 + 3s \\ k = 1 + 2s \end{cases} s = 0,1$

$t_1 = t_2 = 12 + 16(2 + 3s) = 44 + 48s,\ s = 0,1$

Интервалы времени, когда они бегут вместе $[0;4] \cup [44;52] + [92;100]$. Их общая продолжительность 20 мин, за которые они пробегают 2000 метров.

Ответ: 2000 метров.

Задача 2. Заметим, что на допустимых парах $(x; y)$ значения $\sin x \neq 0, \sin y \neq 0$.

Введем следующие обозначения: $a = \sin x, b = \sin y$. В этих обозначениях соотношение примет вид:

$$\frac{a}{1+b-a} = \frac{b}{1+a-b} = \frac{1}{a+b-1}, 0 < |a| \leq 1, 0 < |b| \leq 1 \to$$

$$\frac{1+b-a}{a} = \frac{1+a-b}{b} = a+b-1 \to \frac{1+b}{a} = \frac{1+a}{b} = a+b \to$$

$$\to \begin{cases} 1+b = (a+b)a \\ 1+a = (a+b)b \end{cases}$$

Складывая последние полученные равенства, получим:

$$2 + (a+b) = (a+b)^2 \to \left[\begin{array}{l} a+b = -1 \\ a+b = 2 \end{array} \right.$$

Случай 1. $a + b = -1, 0 < |a| \leq 1, 0 < |b| \leq 1 \leftrightarrow a \in (-1;0)$. Тогда:

$$\sin^2 x - \frac{1}{6}\cos 2y = a^2 - \frac{1}{6}(1-2b^2) = a^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}(a+1)^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{6} \to$$

$$\frac{1}{6}\left(8a^2 + 4a + 1)\right), a \in (-1;0)$$

Наименьшее значение квадратного трехчлена достигается при $a = -\frac{1}{4}$ и равно $\frac{1}{12}$.

Случай 2. $a + b = 2$. Тогда $\sin x = 1, \sin y = 1,$ а $\sin^2 x - \frac{1}{6}\cos 2y = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$.

В ответ пишем наименьшее возможное значение величины $\sin^2 x - \frac{1}{6}\cos 2y$. Оно было получено в случае 1 и равно $\frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Задача 3. Решим задачу в общей постановке.

Для каждого целого числа на отрезке $[n+1, 2n]$ (n – натуральное число) найти наибольший нечетный делитель. Чему равно сумма таких делителей?

Докажем методом математической индукции, что сумма таких делителей равна n^2.

База индукции. $n = 2$.

На отрезке $[3;4]$ нечетными делителями являются $d_1 = 3, d_2 = 1 \to d_1 + d_2 = 1 + 3 = 4 = n^2$.

Индуктивный переход. Предположим, что сумма максимальных нечётных делителей всех целых чисел на отрезке $[n+1, 2n]$ равна n^2. Докажем, что сумма таких делителей для всех целых чисел на отрезке $[n+2; 2(n+1)]$ равна $(n+1)^2$. Введем обозначение: $d(m)$ – наибольший нечетный делитель числа m. Тогда

$$d(n+2)+d(n+3)+...+d(2n)+d(2n+1)+d(2n+2)=$$
$$=\left(d(n+1)+d(n+2)+d(n+3)+...+d(2n)\right)-d(n+1)+d(2n+1)+d(2n+2)=$$
$$=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

(мы учли, что $d(n+1)=d(2(n+1))$.

В варианте 1 $n=40,$ поэтому сумма максимальных нечётных делителей всех целых чисел на отрезке $[41;80]$ равна $40^2=1600$.

Ответ: 1600.

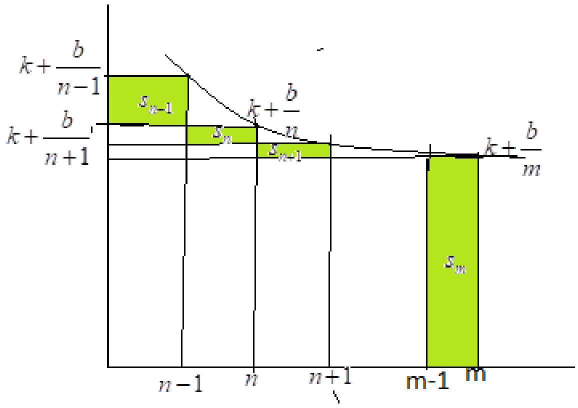
Задача 4. Решим задачу в общей постановке.

На плоскости нарисовано m прямоугольников с вершиной в начале координат, с противоположной вершиной – на гиперболе $y=\dfrac{kx+b}{x}$ в точках с абсциссой $x=n,\ n=1,2,3,...,m$, со сторонами параллельными координатным осям. Область D содержит те точки плоскости, которые принадлежат только одному из прямоугольников. Найти площадь D.

Докажем, что площадь D равна $b+k$.

Введем обозначения: B_n – прямоугольник с вершиной в точке $\left(n,\dfrac{kn+b}{n}\right)$; C_n – часть прямоугольника B_n (также прямоугольник), принадлежащая D, s_n – площадь C_n; $s_n=b\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$. Тогда

$$S_D=\sum_{n=1}^{m-1}s_n+s_m=\left(b\left(1-\frac{1}{2}\right)+b\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+b\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)\right)+\left(k+\frac{b}{m}\right)=b+k.$$



В варианте 1 $y=\dfrac{2x+3}{x}$, следовательно, $b=3,\ k=2$, а $S_D=b+k=5$.

Ответ: 5.

Задача 5. Для того, чтобы получить одночлен x^{2024} с коэффициентом 1 необходимо в m из 18 одинаковых скобок $(1+x^{125}+x^{131})$ выбрать для перемножения слагаемое x^{131}, в n других скобках – слагаемое x^{125}, а в остальных – слагаемое 1. При этом должно соблюдаться условие

$$131m+125n=2024.$$

Полученное уравнение Диофанта имеет в области положительных значений m и n единственное решение $m=4, n=12$. Число различных способов, которыми можно выбрать такие скобки, равно $a_{2024}=C_{18}^4\cdot C_{14}^{12}=278460$.

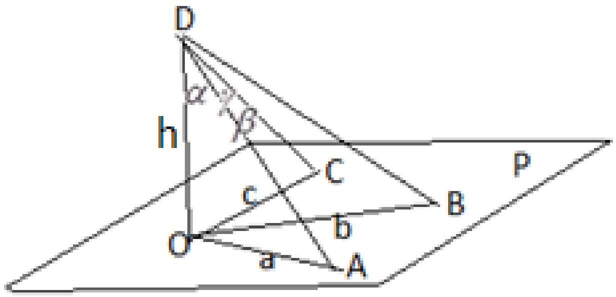
Ответ: $a_{2024}=C_{18}^4\cdot C_{14}^{12}=278460$.

Задача 6. Решим задачу в общей постановке.
Точка $O-$ начало трех отрезков OA, OB и OC лежащих в плоскости P и имеющих длины $1, 2$ и 3 соответственно. На прямой L, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости P, расположена точка D так, что сумма углов, образуемых прямыми DA, DB и DC с прямой L, равна 180^0. Найти длину отрезка OD.
Введем следующие обозначения: $h-$ длина отрезка OD, $\alpha, \beta, \gamma-$ углы ADO, BDO, CDO, $\alpha+\beta+\gamma=180^0$.
Составим систему уравнений для нахождения отрезка OD:

$$\begin{cases} h/a = \operatorname{ctg}\alpha \\ h/b = \operatorname{ctg}\beta \\ h/c = \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}(180^0-\alpha-\beta) = -\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{1-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} \end{cases}$$

$$\frac{h}{c} = \frac{1-h^2/ab}{h(1/a+1/b)} = \frac{ab-h^2}{h(a+b)} \to h^2(a+b+c) = abc \to h^2 = \frac{abc}{a+b+c}.$$

Следовательно, $OD = h = \sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}}$.



В варианте 1 $a=1, b=2, c=3$ и, следовательно, $OD=1$.
Ответ: 1.

Вариант 2.

1. На стадионе имеются две беговые дорожки. Каждая из них является границей квадрата со сторонами 400м и 800м соответственно. Квадраты имеют общую вершину А и две стороны меньшего квадрата лежат на сторонах большего квадрата. Два друга Петя и Коля решили пробежаться, но выбрали для этого разные дорожки. Стартовали одновременно из точки А и бежали 2,5 часа в одном направлении с одинаковой скоростью 100 м/мин. Сколько метров дистанции ребята бежали рядом с друг другом?
Ответ: 3600 метров.
2. Пары чисел $(x; y)$ связаны соотношениями

$$\frac{\cos x}{1+\cos 2y-\cos x} = \frac{\cos 2y}{1+\cos x-\cos 2y} = \frac{1}{\cos x+\cos 2y-1}.$$

Найти наименьшее возможное значение величины $\cos^2 x - \cos^2 y$.

Ответ: $-\dfrac{1}{16}$.

3. Найти сумму максимальных нечетных делителей каждого из целых чисел на отрезке $[51;100]$.

Ответ: 2500.

4. На плоскости нарисовано 200 прямоугольников с вершиной в начале координат, с противоположной вершиной – на гиперболе $y=\dfrac{x+2}{x}$ в точках с абсциссой $x=n, n=1,2,3,...,200$, со сторонами параллельными координатным осям. Область D содержит те точки плоскости, которые принадлежат только одному из прямоугольников. Найти площадь D.

Ответ: 3.

5. Найти коэффициент a_{59} многочлена $P(x)=(1+x^{11}+x^{13})^9$, если бы он был приведен в форму суммы одночленов вида $a_k x^k$, $k=0,2,3,...,117$.

Ответ: $a_{59}=C_9^3\cdot C_6^2=1260$.

6. Точка O – начало трех отрезков OA, OB и OC лежащих в плоскости P и имеющих длины $2,3$ и 5 соответственно. На прямой L, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости P, расположена точка D так, что сумма углов, образуемых прямыми DA, DB и DC с прямой L, равна 180^0. Найти длину отрезка OD.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Вариант 3.

1. На стадионе имеются две беговые дорожки. Каждая из них является границей квадрата со сторонами 200м и 300м соответственно. Квадраты имеют общую вершину А и две стороны меньшего квадрата лежат на сторонах большего квадрата. Два друга Петя и Коля решили пробежаться, но выбрали для этого разные дорожки. Стартовали одновременно из точки А и бежали 3 часа в одном направлении с одинаковой скоростью 100 м/мин. Сколько минут за время тренировки ребята бежали рядом с друг другом?

Ответ: 30 минут.

2. Пары чисел $(x;y)$ связаны соотношениями

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos y-\sin 2x}=\frac{\cos y}{1+\sin 2x-\cos y}=\frac{1}{\sin 2x+\cos y-1}.$$

Найти наибольшее возможное значение величины $\cos^2 2x+\sin^2 y$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

3. Найти сумму максимальных нечетных делителей каждого из целых чисел на отрезке $[61;120]$.

Ответ: 3600.

4. На плоскости нарисовано 300 прямоугольников с вершиной в начале координат, с противоположной вершиной – на гиперболе $y=\dfrac{3x+5}{x}$ в точках с абсциссой $x=n, n=1,2,3,...,300$, со сторонами параллельными координатным осям. Область D содержит те точки плоскости, которые принадлежат только одному из прямоугольников. Найти площадь D.

Ответ: 8.

5. Найти коэффициент a_{49} многочлена $P(x)=(1+x^{15}+x^{17})^6$, если бы он был приведен в форму суммы одночленов вида $a_k x^k$, $k=0,2,3,...,102$.

Ответ: $a_{49}=C_6^1\cdot C_5^2=60$.

6. Точка O – начало трех отрезков OA, OB и OC лежащих в плоскости P и имеющих длины $3, 4$ и 7 соответственно. На прямой L, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости P, расположена точка D так, что сумма углов, образуемых прямыми DA, DB и DC с прямой L, равна 180^0. Найти длину отрезка OD.

Ответ: $\sqrt{6}$.

Вариант 4.

1. На стадионе имеются две беговые дорожки. Каждая из них является границей квадрата со сторонами 300м и 400м соответственно. Квадраты имеют общую вершину А и две стороны меньшего квадрата лежат на сторонах большего квадрата. Два друга Петя и Коля решили пробежаться, но выбрали для этого разные дорожки. Стартовали одновременно из точки А и бежали 1,5 часа в одном направлении с одинаковой скоростью 100 м/мин. Сколько минут за время тренировки ребята бежали рядом с друг другом?

Ответ: 9 минут.

2. Пары чисел $(x; y)$ связаны соотношениями

$$\frac{\cos 2x}{1+\sin y-\cos 2x}=\frac{\sin y}{1+\cos 2x-\sin y}=\frac{1}{\cos 2x+\sin y-1}.$$

Найти наибольшее возможное значение величины $\cos^2 y-\sin^2 x$.

Ответ: $\frac{1}{16}$.

3. Найти сумму максимальных нечетных делителей каждого из целых чисел на отрезке $[71;140]$.

Ответ: 4900.

4. На плоскости нарисовано 400 прямоугольников с вершиной в начале координат, с противоположной вершиной – на гиперболе $y=\frac{4x+7}{x}$ в точках с абсциссой $x=n, n=1,2,3,...,400$, со сторонами параллельными координатным осям. Область D содержит те точки плоскости, которые принадлежат только одному из прямоугольников. Найти площадь D.

Ответ: 11.

5. Найти коэффициент a_{67} многочлена $P(x)=(1+x^{11}+x^{15})^8$, если бы он был приведен в форму суммы одночленов вида $a_k x^k$, $k=0,2,3,...,120$.

Ответ: $a_{67}=C_8^2\cdot C_6^3=560$.

6. Точка O – начало трех отрезков OA, OB и OC лежащих в плоскости P и имеющих длины $3, 5$ и 7 соответственно. На прямой L, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости P, расположена точка D так, что сумма углов, образуемых прямыми DA, DB и DC с прямой L, равна 180^0. Найти длину отрезка OD.

Ответ: $\sqrt{7}$.

Критерии проверки работ заключительного тура Олимпиады Росатом по математике, 11 класс, Москва, 17 февраля 2024

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1.
0 б - Сделан рисунок по условию.
1 б - Верно найдены все моменты встречи Пети и Коли.
2б - Задача решена с арифметической ошибкой.
3 б - Задача решена верно.

Задача 2.
0 б - Введены обозначения для тригонометрических функций, преобразована система равенств, но нет существенных продвижений.
1 б - Доказано, что a+b может принимать одно из двух значений, где a и b – тригонометрические функции, стоящие в числителях первых двух дробей соотношения.
2 б - Ошибка при выборе наименьшего/наибольшего возможного значения величины или арифметическая ошибка.
3 б - Задача решена верно.

Задача 3.
0 б - Сделаны некоторые предположения по решению задачи и/или найдена сумма максимальных делителей всех нечетных чисел из отрезка.
1 б - Сделана попытка решить задачу перебором, но ответ неверный.
2 б - Решение верное, но есть не более одной арифметической ошибки, которая не влияет на ход решения.
3 б - Задача решена верно.

Задача 4.
0 б - Сделан рисунок и/или некоторые предположения по решению задачи.
1 б - Объяснено, что D – это объединение прямоугольников, и посчитаны площади некоторых из них.
2 б - Задача решена с одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или есть мелкие недочеты.
3 б - Задача решена верно.

Задача 5.
0 б - Сделаны некоторые предположения по решению задачи.
1 б - Найдены натуральные x и y, которые удовлетворяют уравнению $n = kx + ly$, где $P(x) = (1 + x^k + x^l)^s$, $a_n -$ искомый коэффициент.
2 б - Допущена арифметическая ошибка, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочеты.
3 б - Задача решена верно.

Задача 6.
0 б - Нарисован чертёж, сделаны предположения по решению задачи.
1б - Получено уравнения для нахождения длины отрезка OD, но оно не решено.
2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.
3 б - Задача решена верно.