

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, 7 класс, 17 февраля 2024**

Вариант 1.

1. Петя написал на доске семь последовательных натуральных чисел, а потом стер одно из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 1186. Какое число стер Петя?
2. Является ли число $a = 3^{18} + 10 \cdot 15^9 + 5^{20}$ простым?
3. Натуральное число на 3024 больше суммы своих цифр. Найти наибольшее такое число.
4. На доске по кругу написаны 60 чисел. Каждое число равно абсолютному значению разности двух соседних чисел, следующих за ним в направлении по часовой стрелке. Наибольшее из чисел равно 5. Найти сумму всех чисел, написанных на доске.
5. Петя поместил точку A на отрезок MN так, что $MA : AN = 1 : 3$. Вася поставил точку B на отрезок AN так, что $AB : BN = 1 : 3$, а Маша – точку C на отрезок AB так, что $AC : CB = 1 : 3$. Найти длину отрезка MN , если длина отрезка AC равна 3.

Ответы и решения

Задача 1. Пусть $n - 3$ первое из написанных чисел, тогда числа представим в виде $n - 3, n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2, n + 3$, где n – натуральное число. Их сумма равна $7n$. Число, стертое с доски Петей, равно $n - x$ с целым $x \in [-3; 3]$. По условию задачи

$$7n - (n + x) = 1186.$$

Отсюда получаем

$$6n - x = 1186, \quad x = 6n - 1186. \quad -3 \leq 6n - 1186 \leq 3, \quad 1183 \leq 6n \leq 1189,$$

$$\frac{1183}{6} \leq n \leq \frac{1189}{6}, \quad n = 198, \quad x = -2, \quad \text{число } 198 - (-2) = 200.$$

Ответ: 200.

Задача 2. Число преобразуем к виду $a = (3^9 + 5^{10})^2$. Данное число делится на 1, само себя и $(3^9 + 5^{10})$, то есть не является простым.

Ответ: нет.

Задача 3. Пусть данное число пятизначное \overline{abcde} , где a, b, c, d, e – его цифры ($a \neq 0$). Тогда сумма цифр этого числа изменяется от 1 (наименьшее пятизначное число 10000) до 45 (наибольшее пятизначное число 99999). Значит, разность числа и его суммы цифр не может быть 3024.

Число a может быть только четырехзначным. a, b, c, d – его цифры

$$(a \neq 0). \quad 1000a + 100b + 10c + d = 3024 + a + b + c + d, \quad 999a + 99b + 9c = 3024.$$

Разделив всё выражение на 9, получим: $111a + 11b + 1c = 336$,

Случай 1. $a = 2$

$$11b + c = 114 \rightarrow b \geq 10 \rightarrow \emptyset$$

Случай 2. $a = 3$

$$11b + c = 3 \rightarrow b = 0 \rightarrow c = 3 \rightarrow A = 3030 + d$$

Число A удовлетворяет условию при любой цифре d , поэтому наибольшим оно будет при $d = 9$.

Ответ: 3039.

Задача 4. Все написанные числа неотрицательные, так как каждое число – абсолютная величина разности.

Пусть $a = 5$ – наибольшее из них, а $b \geq 0, c \geq 0$ – числа, стоящие за ним по часовой стрелке.

Случай 1. $b \geq c$.

$a = b - c, a = 5$, тогда $b = c + 5$, но $a = 5$ – наибольшее, значит $c = 0, b = 5$ – верно.

$a = b - c, a = 5$, тогда $b = c + 5$, но $a = 5$ – наибольшее, значит $c = 1, b \neq 6$ и т. д..

Поэтому, число c не может быть не нулём.

Случай 2. $b < c$.

$a = c - b, a = 5$, тогда $c = b + 5$, но $a = 5$ – наибольшее, значит $b = 0, c = 5$ – верно.

$a = c - b, a = 5$, тогда $c = b + 5$, но $a = 5$ – наибольшее, значит $b = 1, c \neq 6$ и т. д..

Поэтому порядок следования чисел по окружности в направлении по часовой стрелке, начиная с пятёрки, может быть одним из двух:

5, 5, 0, 5, 5, 0, 5, 5, 0, ..., 5, 5, 0 или 5, 0, 5, 5, 0, 5, 5, 0, ..., 5, 0, 5

В обоих случаях, количество пятёрок равно 40, а сумма 200.

Ответ: 200.

Задача 5. Запишем все полученные соотношения $\frac{MA}{AN} = \frac{1}{3}$, тогда $MA = \frac{1}{4} MN, NA = \frac{3}{4} MN$.

Аналогично, $\frac{BA}{BN} = \frac{1}{3}$, тогда $BA = \frac{1}{4} AN, NB = \frac{3}{4} AN$.

А также, $\frac{CA}{BC} = \frac{1}{3}$, тогда $CA = \frac{1}{4} AB, CB = \frac{3}{4} AB$.

Или $CA = \frac{1}{4} AB = 3$, получим $AB = 12, AB = \frac{1}{4} AN$, откуда $NA = 48 = \frac{3}{4} MN, MN = 64$.

Ответ: 64.

Вариант 2

1. Петя написал на доске восемь последовательных натуральных чисел, а потом стер одно из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 1045. Какое число стер Петя?

Ответ: 151.

2. Является ли число $a = 16^5 - 2^{11} \cdot 3^{20} + 81^{10}$ простым?

Ответ: не является.

3. Натуральное число на 324 больше суммы своих цифр. Найти наибольшее такое число.

Ответ: 339.

4. На доске по кругу написаны 90 чисел. Каждое число равно абсолютному значению разности двух соседних чисел, следующих за ним в направлении по часовой стрелке. Сумма всех чисел, написанных на доске, равна 180. Найти наибольшее из них.

Ответ: 3.

5. Петя поместил точку A на отрезок MN так, что $MA : AN = 1 : 4$. Вася поставил точку B на отрезок AN так, что $AB : BN = 1 : 4$, а Маша – точку C на отрезок AB так, что $AC : CB = 1 : 4$. Найти длину отрезка MN , если длина отрезка AC равна 4.

Ответ: 125.

Вариант 3

1. Петя написал на доске девять последовательных натуральных чисел, а потом стер одно из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 959. Какое число стер Петя?

Ответ:121.

2. Является ли число $a = 9^{15} + 24 \cdot 2^{22} \cdot 3^{14} + 64^8$ простым?

Ответ: не является.

3. Натуральное число на 2007 больше суммы своих цифр. Найти наибольшее такое число.

Ответ:2019.

4. На доске по кругу написаны 120 чисел. Каждое число равно абсолютному значению разности двух соседних чисел, следующих за ним в направлении по часовой стрелке. Наибольшее из чисел равно 6. Найти сумму всех чисел, написанных на доске.

Ответ:480.

5. Петя поместил точку A на отрезок MN так, что $MA : AN = 2 : 3$. Вася поставил точку B на отрезок AN так, что $AB : BN = 2 : 3$, а Маша – точку C на отрезок AB так, что $AC : CB = 2 : 3$. Найти длину отрезка MN , если длина отрезка AC равна 24.

Ответ:250.

Вариант 4

1. Петя написал на доске десять последовательных натуральных чисел, а потом стер одно из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 1630. Какое число стер Петя?

Ответ:185.

2. Является ли число $a = 5^{14} - 6 \cdot 15^7 + 9^8$ простым?

Ответ: не является.

3. Натуральное число на 522 больше суммы своих цифр. Найти наибольшее такое число.

Ответ:539.

4. На доске по кругу написаны 45 чисел. Каждое число равно абсолютному значению разности двух соседних чисел, следующих за ним в направлении по часовой стрелке. Сумма всех чисел, написанных на доске, равна 240. Найти наибольшее из них.

Ответ:8.

5. Петя поместил точку A на отрезок MN так, что $MA : AN = 1 : 2$. Вася поставил точку B на отрезок AN так, что $AB : BN = 1 : 2$, а Маша – точку C на отрезок AB так, что $AC : CB = 1 : 2$. Найти длину отрезка MN , если длина отрезка AC равна 2.

Ответ:27.

Критерии проверки работ заключительного тура Олимпиады Росатом по математике, 7 класс, 17 февраля 2024

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Верно составлена математическая модель (верно составлено уравнение и введены все переменные).

2 б -- Задача решена с арифметической ошибкой в последней цифре числа, или нет полного обоснованного решения составленного уравнения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Выписано выражение или ответ без решения.

1 б – Верно найдены последние цифры каждого слагаемого в выражении, или записан полный квадрат выражения.

2 б – Записан полный квадрат, но не указано, почему это не простое число, или нет полного обоснованного решения.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Верно составлено выражение с 4-мя и более цифрами, есть обоснование рассмотрения трёхзначного числа, или сделана попытка проанализировать сумму цифр.

2 б -- Верное завершённое решение с арифметической ошибкой при нахождении последней цифры, или нет полного обоснования решения уравнения.

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б – Выписано выражение или ответ без решения.

1 б – Есть обоснование, что надо рассмотреть только неотрицательные числа, указаны закономерности при вычислении суммы чисел.

2 б – Рассмотрены оба случая раскрытия модуля при решении задачи, или нет полного обоснования решения уравнения;

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б – Нарисован чертёж или ответ без решения.

1 б – Найдена из верного уравнения или выражения длина АВ.

2 б - Найдена из верного уравнения или выражения длина AN.

3 б - Задача решена верно.