Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 8 класс, 17 февраля 2024 года

Вариант № 1

1. В $8^{\underline{a}}$ классе не более 30 учеников: мальчиков и девочек. Известно, что $2/3$ мальчиков дружат с девочками и $3/5$ девочек дружат с мальчиками. Сколько в классе мальчиков и девочек?

2. Оказалось, что число 465 при делении на целое число a имеет остаток, равный частному. Найдите все такие числа a.

3.Найдите все тройки чисел, для которых

$$\begin{cases} x + 2y \geqslant z, \\ x^2 + 36y^2 + 10 = 6z. \end{cases}$$

4. Найдите натуральные числа x, удовлетворяющие уравнению $x^{x-2} + x^{3-x} = x + 1$.

5. В основании пирамиды лежит выпуклый многоугольник, имеющий 2024 вершины. Какое наибольшее число вершин может иметь многоугольник, полученный сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через вершины пирамиды?

Ответы и решения

1. Обозначим x количество мальчиков и y — количество девочек в $8^{\underline{a}}$ классе. В задаче предполагается, что количество мальчиков, которые дружат с девочками равно количеству девочек, которые дружат с мальчиками. Тогда условие задачи запишется в виде системы $\begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{3}{5}y, \\ x + y \leqslant 30. \end{cases}$ Отсюда

$$y = \frac{10}{9}x \Rightarrow x + y = x + \frac{10}{9}x = \frac{19}{9}x \leqslant 30 \Rightarrow x \leqslant \frac{270}{19} = 14\frac{4}{19}.$$

По смыслу задачи $\frac{2}{3}x$ и $y = \frac{10}{9}x$ являются натуральными числами, поэтому x должно быть кратно 9. Едиственным натуральным числом, не превосходящим 14 и кратным 9 является 9. Поэтому $x = 9$, а $y = 10$.

Ответ. 9 мальчиков и 10 девочек.

2. Обозначим q целую часть частного $\dfrac{465}{a}$, тогда по условию задачи $\dfrac{465}{a} = q + \dfrac{q}{a}$, где остаток q положителен и $q < a$. Поэтому, в частности, целое число a яваляется натуральным. Значит, задача формулируется так: надо найти натуральные значения a при которых $465 = q(a + 1)$, где число q натуральное и $q < a$. Разложение числа 465 на простые множители имеет вид: $465 = 3 \cdot 5 \cdot 31$. Пользуясь разложением 465 на простые множители переберём все возможные значения $a + 1$:

1. $a + 1 = 3 \Rightarrow q = 155$;
2. $a + 1 = 5 \Rightarrow q = 93$;
3. $a + 1 = 15 \Rightarrow q = 31$;
4. $a + 1 = 31 \Rightarrow q = 15$;
5. $a + 1 = 93 \Rightarrow q = 5$;

6. $a+1=155 \;\Rightarrow\; q=3$;

7. $a+1=465 \;\Rightarrow\; q=1$;

Случаи 1, 2 и 3 не удовлетворяют условию $q<a$.

Ответ. 30, 92, 154, 464.

3. Подставляя неравенство $z \leqslant x+2y$ во второе соотношение системы получаем

$$x^2+36y^2+10=6z \leqslant 6(x+2y) \iff [x^2-6x]+[36y^2-12y]+10 \leqslant 0 \iff$$
$$\big[(x-3)^2-9\big]+\big[(6y-1)^2-1\big]+10 \iff (x-3)^2+(6y-1)^2 \leqslant 0.$$

Отсюда $x=3$ и $y={}^1\!/_6$. Подставляя эти значения x и y во второе соотношение системы получаем $6z=20$.

Ответ. $\left(3;\dfrac{1}{6};\dfrac{10}{3}\right)$.

4. Дадим два решения этой задачи.

1*решение: разложение на множители.*

$$x^{x-2}+x^{3-x}=x+1. \text{ Тогда } (x^{x-2}-1)+(x^{3-x}-x)=(x^{x-2}-1)+x(x^{2-x}-1)=$$
$$=(x^{x-2}-1)+x\left(\frac{1}{x^{x-2}}-1\right)=(x^{x-2}-1)+\frac{x(1-x^{x-2})}{x^{x-2}}=$$
$$=(x^{x-2}-1)+x^{3-x}(x^{x-2}-1)=(x^{x-2}-1)(1-x^{3-x}).$$

При натуральных значениях x выражение $x^{x-2}-1=0$ только при $x=1$ или $x=2$, а $x^{3-x}-1=0$ только при $x=1$ или $x=3$.

2*решение*. Правая часть уравнения целая при любом натуральном значении x. При $x>3$ слагаемое x^{x-2} целое, а слагаемое x^{3-x} дробное, поэтому натуральных решений больше, чем 3 быть не может. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=1$, $x=2$ и $x=3$ являются решениями.

Ответ. 1, 2, 3.

5. Пирамида выпуклая и содержит 2025 граней, поэтому в сечении никакой плоскостью не может быть многоугольник больше, чем со 2025 вершинами. Чтобы получить сечение, пересекающее все грани пирамиды проведём секущую плоскость так, чтобы с одной стороны от неё целиком находилось только одно боковое ребро, обозначим его ℓ. Такая секущая плоскость пересекает все боковые рёбра кроме одного и две стороны основания, примыкающие к ℓ, всего 2025 рёбер.

Ответ. 2025.

Вариант № 2

1. В $8^{\underline{б}}$ классе учатся мальчики и девочки, всего в классе не более 30, но не менее 20 учеников. Известно, что ${}^1\!/_3$ мальчиков дружат с девочками и ${}^2\!/_5$ девочек дружат с мальчиками. Сколько в классе мальчиков?

Ответ. 12 мальчиков.

2. Оказалось, что число 2002 при делении на целое число a имеет остаток, равный частному. Найдите все такие числа a.

Ответ. 76, 90, 142, 153, 181, 285, 1000, 2001.

3. Найдите все тройки чисел, для которых

$$\begin{cases} x - 3y \geqslant z, \\ x^2 + 9y^2 + 8 = 4z. \end{cases}$$

Ответ. $\left(2; -\dfrac{2}{3}; 4\right)$.

4. Найдите натуральные числа x, удовлетворяющие уравнению $x^{x-1} + x^{2-x} = x + 1$.

Ответ. 1, 2.

5. В основании пирамиды лежит выпуклый многоугольник, имеющий 2023 вершины. Какое наибольшее число вершин может иметь многоугольник, полученный сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через вершины пирамиды?

Ответ. 2024.

Вариант № 3

1. В $8^{\underline{\text{в}}}$ классе учатся мальчики и девочки, всего в классе не более 25 учеников. Известно, что $^3/_4$ мальчиков дружат с девочками и $^1/_5$ девочек дружат с мальчиками. Сколько в классе девочек?

Ответ. 15 девочек.

2. Оказалось, что число 1995 при делении на целое число a имеет остаток, равный частному. Найдите все такие числа a.

Ответ. 56, 94, 104, 132, 284, 398, 664, 1994.

3. Найдите все тройки чисел, для которых

$$\begin{cases} 12y - x \geqslant z, \\ x^2 + 16y^2 + 10 = 2z. \end{cases}$$

Ответ. $\left(-1; \dfrac{3}{10}; 10\right)$.

4. Найдите натуральные числа x, удовлетворяющие уравнению $x^{x-3} + x^{4-x} = x + 1$.

Ответ. 1, 3, 4.

5. В основании пирамиды лежит выпуклый многоугольник, имеющий 2022 вершины. Какое наибольшее число вершин может иметь многоугольник, полученный сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через вершины пирамиды?

Ответ. 2023.

Вариант № 4

1. В $8^{\underline{\text{г}}}$ классе учатся мальчики и девочки. Известно, что $^3/_7$ мальчиков дружат с девочками и $^2/_5$ девочек дружат с мальчиками. Какое наименьшее число учеников может учиться в таком классе?

Ответ. 29 учеников.

2. Оказалось, что число 1785 при делении на целое число a имеет остаток, равный частному. Найдите все такие числа a.

Ответ. 50, 84, 104, 118, 254, 356, 594, 1784.

3. Найдите все тройки чисел, для которых

$$\begin{cases} 15y - 2x \geqslant z, \\ x^2 + 25y^2 + 13 = 2z. \end{cases}$$

Ответ. $\left(-2; \dfrac{3}{5}; 13\right)$.

4. Найдите натуральные числа x, удовлетворяющие уравнению $x^{x-4} + x^{5-x} = x + 1$.

Ответ. 1, 4, 5.

5. В основании пирамиды лежит выпуклый многоугольник, имеющий 2025 вершины. Какое наибольшее число вершин может иметь многоугольник, полученный сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через вершины пирамиды?

Ответ. 2026.

Критерии проверки работ заключительного тура Олимпиады Росатом по математике, 8 класс, 17 февраля 2024

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:
0 б – Математическая модель задачи в виде системы не построена.
1 б – Верно составлена математическая модель (верно составлена система уравнений и введены все переменные).
2б – Задача решена с арифметической ошибкой или нет обоснования единственности.
3 б – Задача решена верно.

Задача 2:
0 б – Попытки угадать ответ.
1 б – Составлено уравнение и выписано условие что, остаток меньше делителя.
2б –Сделана арифметическая ошибка, рассмотрены не все делители или оставлены некоторые лишние делители.
3 б - Задача решена верно.

Задача 3:
0 б – Попытки угадать ответ, грубые алгебраические ошибки.
1 б – Получено неравенство относительно x и y, но полные квадраты не выделены.
2 б – Незначительные арифметические ошибки, рассмотрен только случай равенства в условии на x, y и z .
3 б - Задача решена верно.

Задача 4:
0 б –Ответ без решения.
1 б – Успешный перебор без обоснования единственности.
2б – Решение с незначительными арифметическими ошибками или получено разложение выражения на скобки, но дальнейшего продвижения нет.
3 б - Задача решена верно.

Задача 5:
0 б – Ответ без обоснования.
1 б – Нужное сечение построено, но его максимальность не обоснована.
2 б - Неполное обоснование того, что верно построенное сечение имеет максимально возможное число вершин.
3 б - Полностью обоснованное верное решение исходя из правильного рисунка и правильных рассуждений.