**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, 9 класс, 17 февраля 2024**

**Вариант 1**

**1.** Квадратное поле размером $1100 \times 1100$ метров разделено на 121 огороженных загонов в форме квадратов со стороной 100 м. В каждом из загонов поселились зайцы. Количество зайцев, живущих в соседних (имеющих общую сторону) загонах отличается не более, чем на 5. Докажите, что есть на поле загоны с одинаковым числом, проживающих на них зайцев.

**2.** В дом Пети, на елку, пришли его друзья. Каждый из них и Петя получили от Деда Мороза более одного подарка. В конце праздника оказалось, что каждый ребенок, включая Петю, получил на 7 подарков меньше, чем все остальные дети вместе взятые. Сколько друзей пришло к Пете на елку?

**3.** Каждое из десяти положительных чисел равно квадрату суммы остальных девяти. Найти сумму этих чисел.

**4.** Квадратный трехчлен $y = x^2 + bx + c$ назовем совершенным, если $b$ и $c$ являются его корнями. Найти все совершенные квадратные трехчлены.

**5.** Точки $A, B, C$ и $D$ окружности являются вершинами четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Длина сторон $AB, BC, CD$ и $DA$ четырехугольника равны $\sqrt{21}$, 3, 2 и 4 соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**Ответы и решения**

**Задача 1**. Всего по условию имеется 121=11x11 загонов. Пусть $a$ - наименьшее, а $b$ – наибольшее число зайцев, проживающих в загонах. Предположим, что *кратчайший* (по количеству пересекаемых границ соседних загонов) путь, по которому можно попасть из загона, где живут $a$ зайцев, в загон с $b$ зайцами, проходя только через прямолинейные участки границ соседних участков, пересекает $n$ сторон квадратов. Наибольшее значение $n = (11-1) + (11-1) = 20$ достигается, когда загоны с $a$ и $b$ зайцами находятся в противоположных углах квадрата поля. Пересекая границу загона, количество находящихся на нем зайцев может увеличится не более, чем на 5 . Поэтому $b \le a + 5 \cdot n \le a + 100$. На отрезке $[a; a+100]$ находится не более 101 различных целых чисел. Таким образом, количество загонов, с различным числом находящихся на них зайцев, не превосходит 101. *Ключевым моментом доказательства является именно сравнение этого числа с общим числом загонов.* Всего загонов 121. Так как $101 < 121$, обязательно найдутся загоны с одинаковым числом зайцев.
**Ответ:** ч.т.д.
**Задача 2**. Пусть общее число врученных подарков S. Пусть Петя получил $a_0$ подарков , а пришедшие $k$ гостей , соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_k$ подарков. По условию задачи можно составить систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= S - a_0 - 7 \\
a_1 &= S - a_1 - 7 \\
&\vdots \\
a_k &= S - a_k - 7
\end{aligned}
$$

Таким образом, для любого $i$ из интервала $0 \le i \le k$ верно , что $a_i = \dfrac{S-7}{2}$, и, следовательно, каждый ребенок получил равное число подарков $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_k$.

Тогда $S = (k+1)\cdot a_0$ и $2a_0 + 7 = (k+1)\cdot a_0$. При этом $k$ и $a_0$ - натуральные числа, причем по условию $a_0 > 1$. Из последнего уравнения легко получаем $(k-1)\cdot a_0 = 7$, и именно такого типа уравнение в натуральных числах является основой решения задачи. Так как 7 - простое число, множитель $(k-1)$ может быть равен только 1 или 7 ( и соответственно, $a_0$=7 или 1). По условию подходит только $a_0 = 7$ и $k = 2$, что и является решением задачи.

Примечание. В зависимости от начальных обозначений возможны и другие соотношения в натуральных числах с отбором решений, которые, естественно, не меняют итогового ответа.

**Ответ:** 2 друга.

**Задача 3.** Пусть общая сумма всех десяти положительных чисел равна *S*:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}.$$

Запишем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (S - a_1)^2 \\
a_2 &= (S - a_2)^2 \\
&\vdots \\
a_{10} &= (S - a_{10})^2
\end{aligned}
$$

При условии, что S больше любого положительного $a_i$, легко показать, что все числа - одинаковые. Например, вычтем из первого уравнения второе. Получим:

$$a_1 - a_2 = (S - a_1)^2 - (S - a_2)^2 \text{ и , } \Rightarrow, \ (a_1 - a_2)\cdot(2S + 1 - a_1 - a_2) = 0.$$

Поскольку вторая скобка заведомо положительна, отсюда следует, что $a_1 = a_2$, и это справедливо для любых других чисел исходного набора. После этого уравнения приобретают вид $a = (9a)^2$, положительное решение $a = \dfrac{1}{81}$. Сумма десяти одинаковых чисел равна $\dfrac{10}{81}$, что и является ответом.

**Ответ:** $\dfrac{10}{81}$.

**Задача 4.** В этой задаче есть определенная особенность. По условию, *не корни равны коэффициентам* b *и с, а именно коэффициенты* b *и с -- являются корнями совершенного многочлена.*

Соответственно , применение теоремы Виета в виде

$$\begin{cases} b+c=-b \\ b\cdot c=c \end{cases}$$

не совсем правомерно и приводит к потере одного из решений. Более правильным подходом является подстановка коэффициентов $b$ и $c$ в исходное квадратное уравнение $x^2+bx+c=0$, что приводит к системе:

$$\begin{cases} 2b^2+c=0 \\ c^2+bc+c=0 \end{cases} \to \begin{cases} c=-2b^2 \\ c(c+b+1)=0 \end{cases}.$$

Из второго уравнения легко находим решения $c=0$ и $c=-b-1$. Подставляем в первое уравнение и получаем пары решений

$$\begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} b=1 \\ c=-2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} b=-\dfrac{1}{2} \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

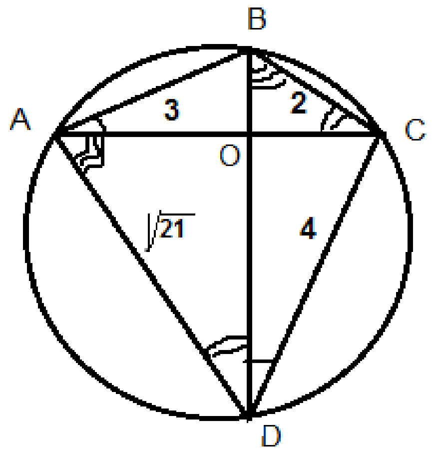
Таким образом, совершенными многочленами являются

$$1)\ y=x^2; \quad 2)\ y=x^2+x-2; \quad 3)\ y=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ .$$

Заметим, что у последнего многочлена есть еще корень 1, что не противоречит условию задачи.

**Ответ:** Три многочлена : $y=x^2$; $y=x^2+x-2$; $y=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

**Задача 5.**




Решать эту задачу можно по-разному. *Первый способ* - самый простой и короткий путь - это использование формулы Брахмагупты:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

где $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ - полупериметр *вписанного* четырехугольника.

Подставляем величины сторон и $p=\frac{1}{2}(2+3+4+\sqrt{21})=\frac{1}{2}(9+\sqrt{21})$ и получаем ответ

$$S=\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})\frac{1}{2}(9-\sqrt{21})\frac{1}{2}(1+\sqrt{21})\frac{1}{2}(3+\sqrt{21})}=\sqrt{(6+\sqrt{21})^2}\ .$$

*Второй способ* -- использовать теорему Птолемея для *вписанного* в окружность четырехугольника.

Теорема гласит: "Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон". Из рисунка очевидно, что площадь заданного четырехугольника равна половине произведения диагоналей (так как они перпендикулярны). Следовательно $S_{ABCD}=(ac+bd)/2$. В варианте 1 $a=3, b=2,\ c=4\ , d=\sqrt{21}.$ Подставляя эти числа в формулу, получаем

$$S_{ABCD}=(3\cdot 4+2\cdot\sqrt{21})/2=6+\sqrt{21}\,.$$

Вывод и доказательство формулы Брахмагупты и теоремы Птолемея несложны , и их легко найти в Интернете. Формула Брахмагупты аналогична более известной формуле Герона для произвольного треугольника.

И , наконец , рассмотрим *третий способ*, основанный на подобии треугольников .

Очевидно, противолежащие прямоугольные треугольники подобны (один угол - прямой, другой угол- вписанный и опирается на общую дугу). Обозначим $OB=x.$

$\triangle AOD\sim\triangle BOC$, коэффициент подобия $k_1=\frac{\sqrt{21}}{2},\ \Rightarrow OA=k_1\cdot x=\frac{\sqrt{21}}{2}x$ .

$\triangle AOB\sim\triangle COD$, коэффициент подобия $k_2=\frac{4}{3}, \Rightarrow OC=k_2\cdot x=\frac{4}{3}x$ .

Применив к $\triangle BOC$ теорему Пифагора, получаем $x^2+(\frac{4}{3}x)^2=4$, и $x=\frac{6}{5}.$

Тогда $OC=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{8}{5}$, а $OD=\frac{\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4\sqrt{21}}{5}$ и $OA=\frac{\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3\sqrt{21}}{5}$. В итоге искомая площадь

$$S_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{(8+3\sqrt{21})\cdot(6+4\sqrt{21})}{50}=\frac{150+25\sqrt{21}}{25}=6+\sqrt{21}$$

Примечание. Рисунок может отличаться от приведенного, но при сохранении обозначений все рассуждения и ответ сохраняются. Также возможны и другие способы решения.

**Ответ :** $S_{ABCD}=6+\sqrt{21}$

## Вариант 2

**1**. Квадратное поле размером $1200\times 1200$ метров разделено на 144 огороженных загонов в форме квадратов со стороной 100 м. В каждом из загонов поселились зайцы. Количество зайцев, живущих в соседних (имеющих общую сторону) загонах отличается не более, чем на 6. Докажите, что есть на поле загоны с одинаковым числом, проживающих на них зайцев.

**Ответ:** ч.т.д.

**2.** В дом Пети, на елку, пришли его друзья. Каждый из них и Петя получили от Деда Мороза более одного подарка. В конце праздника оказалось, что каждый ребенок, включая Петю, получил на 6 подарков меньше, чем все остальные дети вместе взятые. Какое наибольшее число друзей могло при этих условиях прийти к Пете на елку?

**Ответ:** 4 друга

**3.** Каждое из одиннадцати положительных чисел равно квадрату суммы остальных десяти. Найти сумму квадратов этих чисел.

**Ответ:** $\dfrac{11}{10000}$.

**4.** Квадратный трехчлен $y = x^2 + bx + c$ назовем совершенным, если $b$ и $c$ являются его корнями. Какое наименьшее значение может принимать квадратный трехчлен, если он совершенный?

**Ответ:** $y_{\min} = -\dfrac{9}{4}$.

**5.** Точки $A, B, C$ и $D$ окружности являются вершинами четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Длина сторон $AB, BC, CD$ и $DA$ четырехугольника равны $4,\ 5, \sqrt{45}$ и $6$ соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**Ответ :** $S_{ABCD} = 6\sqrt{5} + 15.$

## Вариант 3

**1.** Квадратное поле размером $1300 \times 1300$ метров разделено на 169 огороженных загонов в форме квадратов со стороной 100 м. В каждом из загонов поселились зайцы. Количество зайцев, живущих в соседних (имеющих общую сторону) загонах отличается не более, чем на 6. Докажите, что есть на поле загоны с одинаковым числом, проживающих на них зайцев.

**Ответ:** ч.т.д.

**2.** В дом Пети, на елку, пришли его друзья. Каждый из них и Петя получили от Деда Мороза более одного подарка. В конце праздника оказалось, что каждый ребенок, включая Петю, получил на 8 подарков меньше, чем все остальные дети вместе взятые. Какое наибольшее число друзей могло при этих условиях прийти к Пете на елку?

**Ответ:** 5 друзей **.**

**3.** Каждое из двадцати одного положительного числа равно квадрату суммы остальных двадцати. Найти наибольшее из этих чисел.

**Ответ:** $\dfrac{1}{400}$.

**4.** Квадратный трехчлен $y = x^2 + bx + c$ назовем совершенным, если $b$ и $c$ являются его корнями. Найти наименьшее возможное значение корней совершенных квадратных трехчленов?

**Ответ:** $x_{\min} = -2$.

**5.** Точки $A, B, C$ и $D$ окружности являются вершинами четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Длина сторон $AB, BC, CD$ и $DA$ четырехугольника равны $4, 2, 5$ и $\sqrt{37}$ соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**Ответ:** $S_{ABCD} = 10 + \sqrt{37}.$

## Вариант 4

**1**. Квадратное поле размером $1400 \times 1400$ метров разделено на 196 огороженных загонов в форме квадратов со стороной 100 м. В каждом из загонов поселились зайцы. Количество зайцев, живущих в соседних (имеющих общую сторону) загонах отличается не более, чем на 7. Докажите, что есть на поле загоны с одинаковым числом, проживающих на них зайцев.

**Ответ:** ч.т.д.

**2.** В дом Пети, на елку, пришли его друзья. Каждый из них и Петя получили от Деда Мороза более одного подарка. В конце праздника оказалось, что каждый ребенок, включая Петю, получил на 5 подарков меньше, чем все остальные дети вместе взятые. Сколько подарков роздал Дед Мороз
детям?

**Ответ:** 15 подарков**.**

**3.** Каждое из шестнадцати положительных чисел равно квадрату суммы остальных пятнадцати. Найти наименьшее из этих чисел.

**Ответ:** $\frac{1}{225}$.

**4.** Квадратный трехчлен $y = x^2 + bx + c$ назовем совершенным, если $b$ и $c$ являются его корнями. Найти наибольшее возможное значение корней совершенных квадратных трехчленов?

**Ответ:** $x_{\max} = 1$.

**5.** Точки $A, B, C$ и $D$ окружности являются вершинами четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Длина сторон $AB, BC, CD$ и $DA$ четырехугольника равны $\sqrt{40}$, 5, 1 и 4 соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**Ответ:** $S_{ABCD} = \sqrt{10} + 10$.

## Критерии проверки работ заключительного тура Олимпиады Росатом по математике, 9 класс, 17 февраля 2024

**Во всех задачах ответ без решения** – 0 б.

**Задача 1:**
0 б – Нет никаких соображений по ходу решения задачи.
1 б – Ввёл обозначения и оценил, чему может равняться наибольшее значение n.
2б -- Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.
3 б – Задача решена верно.

**Задача 2:**
0 б – Не введены обозначения или неверно составил уравнение.
1 б – Ввёл обозначения, правильно составил уравнение и оценил общее число подарков.
2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.
3 б - Задача решена верно.

**Задача 3:**
0 б – Нет никаких верных соображений по ходу решения задачи.
1 б – Доказал, что все числа равны.
2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.
3 б - Задача решена верно.

**Задача 4:**
0 б –Нет никаких соображений по ходу решения задачи.
1 б- Составил систему для нахождения b и c.
2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.
3 б - Задача решена верно.

**Задача 5**
0 б –Неправильно построен чертёж.
1 б –Правильно построил чертёж, нашел равные углы и подобные треугольники.
2 б – Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.
3 б - Задача решена верно.