

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, 10 класс, 17 февраля 2024**

Вариант 1

1. Бригаду, состоящую из 4 землекопов, подрядили копать яму под фундамент жилого дома, но выдали только одну лопату. Чтобы все могли заработать, договорились копать по очереди: каждый член бригады работает столько времени, сколько копали бы $\frac{1}{4}$ часть ямы все остальные землекопы одновременно, при наличии у всех лопат. Работа на этих условиях была выполнена полностью. Во сколько раз работа могла быть выполнена быстрее, если изначально каждому дали по лопате.

2. Найти все пары чисел $(x; y)$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1$, для которых

$$(\cos^4 x + 1)(\cos^4(xy) + 1) = 4 \cos^2 x \cos^2(xy).$$

3. В центре стола находятся 600 фишек, и Петя готовится играть на нем в игру под названием «Забери больше фишек». Цель игры – убрать со стола как можно больше фишек, соблюдая правило: за один ход можно убрать со стола ровно 154 фишки (или не брать ни одной), а вернуть на стол только 105 (или не возвращать ни одной). Какое наибольшее число фишек может убрать со стола Петя, соблюдая правила? Своих фишек в карманах Пети нет.

4. Найти наименьшее значение числа b , при котором уравнение $x^2 + ax + a + b = 0$ имеет два решения вида $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ для некоторого $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 75° . На высоте BH выбрана точка D так, что угол ADC равен 105° . Отношение $AD:BC = 1:\sqrt{3}$. Найти угол при вершине C треугольника.

Вариант 2

1. Бригаду, состоящую из 6 землекопов, подрядили копать яму под фундамент жилого дома, но выдали только одну лопату. Чтобы все могли заработать, договорились копать по очереди: каждый член бригады работает столько времени, сколько копали бы $\frac{1}{3}$ часть ямы все остальные землекопы одновременно, при наличии у всех лопат. Работа на этих условиях была выполнена полностью. Во сколько раз работа могла быть выполнена быстрее, если изначально каждому дали по лопате.

2. Найти все пары чисел $(x; y)$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2$, для которых

$$(\sin^4 2x + 1)(\cos^4(2xy) + 1) = 4\sin^2 2x \cos^2(2xy).$$

3. В центре стола находятся 700 фишек, и Петя готовится играть на нем в игру под названием «Забери больше фишек». Цель игры – убрать со стола как можно больше фишек, соблюдая правило: за один ход можно убрать со стола ровно 396 фишки (или не брать ни одной), а вернуть на стол только 234 (или не возвращать ни одной). Какое наибольшее число фишек может убрать со стола Петя, соблюдая правила? Своих фишек в карманах Пети нет.

4. Найти наибольшее значение числа b , при котором уравнение $x^2 + 2ax + 3a - 2b = 0$ имеет два решения вида $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ для некоторого $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 72° . На высоте BH выбрана точка D так, что угол ADC равен 108° . Отношение $AD:BC = \sqrt{3}$. Найти угол при вершине C треугольника.

Вариант 3

1. Бригаду, состоящую из 6 землекопов, подрядили копать яму под фундамент жилого дома, но выдали только одну лопату. Чтобы все могли заработать, договорились копать по очереди: каждый член бригады работает столько времени, сколько копали бы $\frac{1}{2}$ часть ямы все остальные землекопы одновременно, при наличии у всех лопат. Работа на этих условиях была выполнена полностью. Во сколько раз работа могла быть выполнена быстрее, если изначально каждому дали по лопате.

2. Найти все пары чисел $(x; y)$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, для которых

$$(\sin^4 3y + 1)(\cos^4(4xy) + 1) = 4\sin^2 3y \cos^2(4xy).$$

3. В центре стола находятся 503 фишек, и Петя готовится играть на нем в игру под названием «Забери больше фишек». Цель игры – убрать со стола как можно больше фишек, соблюдая правило: за один ход можно убрать со стола ровно 105 фишки (или не брать ни одной), а вернуть на стол только 110 (или не возвращать ни одной). Какое наибольшее число фишек может убрать со стола Петя, соблюдая правила? Своих фишек в карманах Пети нет.

4. Найти наименьшее значение числа b , при котором уравнение $x^2 + 3ax + a + 2b = 0$ имеет два решения вида $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ для некоторого $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 81° . На высоте BH выбрана точка D так, что угол ADC равен 99° . Отношение $AD : BC = 1 : \sqrt{3}$. Найти угол при вершине C треугольника.

Вариант 4

1. Бригаду, состоящую из 5 землекопов, подрядили копать яму под фундамент жилого дома, но выдали только одну лопату. Чтобы все могли заработать, договорились копать по очереди: каждый член бригады работает столько времени, сколько копали бы $\frac{1}{2}$ часть ямы все остальные землекопы одновременно, при наличии у всех лопат. Работа на этих условиях была выполнена полностью. Во сколько раз работа могла быть выполнена быстрее, если изначально каждому дали по лопате.

2. Найти все пары чисел $(x; y)$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\pi$, для которых

$$(\cos^4 y + 1)(\sin^4(3xy) + 1) = 4\cos^2 y \sin^2(3xy).$$

3. В центре стола находятся 400 фишек, и Петя готовится играть на нем в игру под названием «Забери больше фишек». Цель игры – убрать со стола как можно больше фишек, соблюдая правило: за один ход можно убрать со стола ровно 330 фишки (или не брать ни одной), а вернуть на стол только 234 (или не возвращать ни одной). Какое наибольшее число фишек может убрать со стола Петя, соблюдая правила? Своих фишек в карманах Пети нет.

4. Найти наибольшее значение числа b , при котором уравнение $x^2 - 2ax + 4a - b = 0$ имеет два решения вида $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ для некоторого $\alpha \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$.

5. Угол при вершине B треугольника ABC равен 83° . На высоте BH выбрана точка D так, что угол ADC равен 97° . Отношение $AD : BC = \sqrt{3}$. Найти угол при вершине C треугольника.