Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11класс, 17 февраля 2024, Регионы

Вариант 1.

1. У Пети в семье, помимо папы, мамы и бабушки, есть еще братья и сестры. Средний возраст папы, мамы и бабушки на 20 лет больше среднего возраста детей и на 10 лет больше среднего возраста всех членов семьи. Сколько сестер у Пети?

2. Решить уравнение

$$2\sin \pi x = \left[\lg \frac{2^x}{10}\right] - \left[\lg\left[2^x\right]\right].$$

Здесь $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a .

3. Натуральное число $n \geq 2024$ имеет простой делитель $p>3$ и другой делитель q , связанный с p соотношением $(p-1)(q+3)=n-3$. Найти наименьшее возможное при эти этих условиях число n .

4. Область G на плоскости, ограниченная двумя параболами $y=-2x^2+x$ и $y=x^2+px+q$, имеет площадь 112. Вертикальная прямая $x=2$ разбивает ее на две равновеликие части. Найти p и q .

5. На графике приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целочисленными координатами. Найти расстояние между этими точками, если известно, что оно выражается целым числом, а дискриминант квадратного трехчлена равен 4.

6. Медианы оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно. На отрезке OO_1 взята точка P так, что $O_1P:PO=1:3$. Через точку P проведена прямая параллельная диагонали A_1C боковой грани призмы. Найти длину отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы, если длина диагонали A_1C равна 2 .

Вариант 2.

1. У Пети в семье, помимо папы, мамы и бабушки, есть еще братья и сестры. Средний возраст папы, мамы и бабушки на 15 лет больше среднего возраста детей и на 10 лет больше среднего возраста всех членов семьи. Сколько в семье детей?

2. Решить уравнение

$$4\cos \pi x = \left[\lg(100\cdot 3^x)\right] - \left[\lg\left[3^x\right]\right].$$

Здесь $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a .

3. Натуральное число $n \geq 2023$ имеет простой делитель $p>2$ и другой делитель q , связанный с p соотношением $(p-1)(q+2)=n-2$. Найти наименьшее возможное при эти этих условиях число n .

4. Область G на плоскости, ограниченная двумя параболами $y=-2x^2+3x$ и $y=x^2+px+q$, имеет площадь 32. Вертикальная прямая $x=1$ разбивает ее на две равновеликие части. Найти p и q .

5. На графике приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целочисленными координатами. Найти расстояние между этими точками, если известно, что оно выражается целым числом, а дискриминант квадратного трехчлена равен 9.

6. Медианы оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно. На отрезке OO_1 взята точка P так, что $O_1P:PO=3:5$. Через точку P проведена прямая параллельная диагонали A_1C боковой грани призмы. Найти длину отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы, если длина диагонали A_1C равна 2.

Вариант 3.

1. У Пети в семье, помимо папы, мамы и бабушки, есть еще братья и сестры. Средний возраст папы, мамы и бабушки на 16 лет больше среднего возраста детей и на 8 лет больше среднего возраста всех членов семьи. На сколько лет суммарный возраст папы, мамы и бабушки больше суммы возрастов детей?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\pi x=\left[\lg\frac{4^x}{10}\right]-\left[\lg\left[4^x\right]\right].$$

Здесь $[a]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Натуральное число $n\ge 1947$ имеет простой делитель $p>5$ и другой делитель q, связанный с p соотношением $(p-2)(q+5)=n-10$. Найти наименьшее возможное при эти этих условиях число n.

4. Область G на плоскости, ограниченная двумя параболами $y=-2x^2-6x$ и $y=x^2+px+q$, имеет площадь 108. Вертикальная прямая $x=-2$ разбивает ее на две равновеликие части. Найти p и q.

5. На графике приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целочисленными координатами. Найти расстояние между этими точками, если известно, что оно выражается целым числом, а дискриминант квадратного трехчлена равен 16.

6. Медианы оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно. На отрезке OO_1 взята точка P так, что $O_1P:PO=1:4$. Через точку P проведена прямая параллельная диагонали A_1C боковой грани призмы. Найти длину отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы, если длина диагонали A_1C равна 5.

Вариант 4.

1. У Пети в семье, помимо папы, мамы и бабушки, есть еще братья и столько же сестер. Средний возраст папы, мамы и бабушки на 18 лет больше среднего возраста детей и на 12 лет больше среднего возраста всех членов семьи. Сколько у Пети братьев?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\pi x = \left[\lg(10\cdot 5^x)\right] - \left[\lg\left[5^x\right]\right].$$

Здесь $\left[a\right]$ – целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Натуральное число $n \geq 1944$ имеет простой делитель $p > 7$ и другой делитель q, связанный с p соотношением $(p-3)(q+7) = n-21$. Найти наименьшее возможное при эти этих условиях число n.

4. Область G на плоскости, ограниченная двумя параболами $y = -2x^2 - 8x$ и $y = x^2 + px + q$, имеет площадь 32. Вертикальная прямая $x = -3$ разбивает ее на две равновеликие части. Найти p и q.

5. На графике приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целочисленными координатами. Найти расстояние между этими точками, если известно, что оно выражается целым числом, а дискриминант квадратного трехчлена равен 25.

6. Медианы оснований треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ пересекаются в точках O и O_1 соответственно. На отрезке OO_1 взята точка P так, что $O_1P : PO = 2:3$. Через точку P проведена прямая параллельная диагонали A_1C боковой грани призмы. Найти длину отрезка этой прямой, расположенного внутри призмы, если длина диагонали A_1C равна 9.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11класс, 17 февраля 2024, Москва

Вариант 1.

1. На стадионе имеются две беговые дорожки. Каждая из них является границей квадрата со сторонами 400м и 600м соответственно. Квадраты имеют общую вершину А и две стороны меньшего квадрата лежат на сторонах большего квадрата. Два друга Петя и Коля решили пробежаться, но выбрали для этого разные дорожки. Стартовали одновременно из точки А и бежали 2 часа в одном направлении с одинаковой скоростью 100 м/мин. Сколько метров дистанции ребята бежали рядом с друг другом?

2. Пары чисел $(x; y)$ связаны соотношениями

$$\frac{\sin x}{1+\sin y-\sin x}=\frac{\sin y}{1+\sin x-\sin y}=\frac{1}{\sin x+\sin y-1}.$$

Найти наименьшее возможное значение величины $\sin^2 x-\frac{1}{6}\cos 2y$.

3. Найти сумму максимальных нечетных делителей каждого из целых чисел на отрезке $[41;80]$.

4. На плоскости нарисовано 100 прямоугольников с вершиной в начале координат, с противоположной вершиной – на гиперболе $y=\frac{2x+3}{x}$ в точках с абсциссой $x=n,\ n=1,2,3,...,100$, со сторонами параллельными координатным осям. Область D содержит те точки плоскости, которые принадлежат только одному из прямоугольников. Найти площадь D .

5. Найти коэффициент a_{2024} многочлена $P(x)=(1+x^{125}+x^{131})^{18}$, если бы он был приведен в форму суммы одночленов вида $a_k x^k,\ k=0,2,3,...,2358$.

6. Точка O – начало трех отрезков OA, OB и OC лежащих в плоскости P и имеющих длины $1, 2$ и 3 соответственно. На прямой L, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости P, расположена точка D так, что сумма углов, образуемых прямыми DA, DB и DC с прямой L, равна 180^0. Найти длину отрезка OD .

Вариант 2.

1. На стадионе имеются две беговые дорожки. Каждая из них является границей квадрата со сторонами 400м и 800м соответственно. Квадраты имеют общую вершину А и две стороны меньшего квадрата лежат на сторонах большего квадрата. Два друга Петя и Коля решили пробежаться, но выбрали для этого разные дорожки. Стартовали одновременно из точки А и бежали 2,5 часа в одном направлении с одинаковой скоростью 100 м/мин. Сколько метров дистанции ребята бежали рядом с друг другом?

2. Пары чисел $(x; y)$ связаны соотношениями

$$\frac{\cos x}{1+\cos 2y-\cos x}=\frac{\cos 2y}{1+\cos x-\cos 2y}=\frac{1}{\cos x+\cos 2y-1}.$$

Найти наименьшее возможное значение величины $\cos^2 x-\cos^2 y$.

3. Найти сумму максимальных нечетных делителей каждого из целых чисел на отрезке $\left[51;100\right]$.

4. На плоскости нарисовано 200 прямоугольников с вершиной в начале координат, с противоположной вершиной – на гиперболе $y=\dfrac{x+2}{x}$ в точках с абсциссой $x=n,\ n=1,2,3,...,200$, со сторонами параллельными координатным осям. Область D содержит те точки плоскости, которые принадлежат только одному из прямоугольников. Найти площадь D.

5. Найти коэффициент a_{59} многочлена $P(x)=(1+x^{11}+x^{13})^{9}$, если бы он был приведен в форму суммы одночленов вида $a_k x^k$, $k=0,2,3,...,117$.

6. Точка O – начало трех отрезков OA, OB и OC лежащих в плоскости P и имеющих длины $2,3$ и 5 соответственно. На прямой L, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости P, расположена точка D так, что сумма углов, образуемых прямыми DA, DB и DC с прямой L, равна 180^0. Найти длину отрезка OD.

Вариант 3.

1. На стадионе имеются две беговые дорожки. Каждая из них является границей квадрата со сторонами 200м и 300м соответственно. Квадраты имеют общую вершину А и две стороны меньшего квадрата лежат на сторонах большего квадрата. Два друга Петя и Коля решили пробежаться, но выбрали для этого разные дорожки. Стартовали одновременно из точки А и бежали 3 часа в одном направлении с одинаковой скоростью 100 м/мин. Сколько минут за время тренировки ребята бежали рядом с друг другом?

2. Пары чисел $\left(x;y\right)$ связаны соотношениями

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos y-\sin 2x}=\frac{\cos y}{1+\sin 2x-\cos y}=\frac{1}{\sin 2x+\cos y-1}.$$

Найти наибольшее возможное значение величины $\cos^2 2x+\sin^2 y$.

3. Найти сумму максимальных нечетных делителей каждого из целых чисел на отрезке $\left[61;120\right]$.

4. На плоскости нарисовано 300 прямоугольников с вершиной в начале координат, с противоположной вершиной – на гиперболе $y=\dfrac{3x+5}{x}$ в точках с абсциссой $x=n,\ n=1,2,3,...,300$, со сторонами параллельными координатным осям. Область D содержит те точки плоскости, которые принадлежат только одному из прямоугольников. Найти площадь D.

5. Найти коэффициент a_{49} многочлена $P(x)=(1+x^{15}+x^{17})^{6}$, если бы он был приведен в форму суммы одночленов вида $a_k x^k$, $k=0,2,3,...,102$.

6. Точка O – начало трех отрезков OA, OB и OC лежащих в плоскости P и имеющих длины $3, 4$ и 7 соответственно. На прямой L, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости P, расположена точка D так, что сумма углов, образуемых прямыми DA, DB и DC с прямой L, равна 180^0. Найти длину отрезка OD.

Вариант 4.

1. На стадионе имеются две беговые дорожки. Каждая из них является границей квадрата со сторонами 300м и 400м соответственно. Квадраты имеют общую вершину А и две стороны меньшего квадрата лежат на сторонах большего квадрата. Два друга Петя и Коля решили пробежаться, но выбрали для этого разные дорожки. Стартовали одновременно из точки А и бежали 1,5 часа в одном направлении с одинаковой скоростью 100 м/мин. Сколько минут за время тренировки ребята бежали рядом с друг другом?

.

2. Пары чисел $(x; y)$ связаны соотношениями

$$\frac{\cos 2x}{1+\sin y-\cos 2x}=\frac{\sin y}{1+\cos 2x-\sin y}=\frac{1}{\cos 2x+\sin y-1}.$$

Найти наибольшее возможное значение величины $\cos^2 y-\sin^2 x$.

3. Найти сумму максимальных нечетных делителей каждого из целых чисел на отрезке $[71;140]$.

4. На плоскости нарисовано 400 прямоугольников с вершиной в начале координат, с противоположной вершиной – на гиперболе $y=\frac{4x+7}{x}$ в точках с абсциссой $x=n, n=1,2,3,...,400$, со сторонами параллельными координатным осям. Область D содержит те точки плоскости, которые принадлежат только одному из прямоугольников. Найти площадь D.

5. Найти коэффициент a_{67} многочлена $P(x)=(1+x^{11}+x^{15})^8$, если бы он был приведен в форму суммы одночленов вида $a_k x^k$, $k=0,2,3,...,120$.

6. Точка O – начало трех отрезков OA, OB и OC лежащих в плоскости P и имеющих длины $3, 5$ и 7 соответственно. На прямой L, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости P, расположена точка D так, что сумма углов, образуемых прямыми DA, DB и DC с прямой L, равна 180^0. Найти длину отрезка OD.