

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, 9 класс, 17 февраля 2024**

Вариант 1

1. Квадратное поле размером 1100×1100 метров разделено на 121 огороженных загонов в форме квадратов со стороной 100 м. В каждом из загонов поселились зайцы. Количество зайцев, живущих в соседних (имеющих общую сторону) загонах отличается не более, чем на 5. Докажите, что есть на поле загоны с одинаковым числом, проживающих на них зайцев.
2. В дом Пети, на елку, пришли его друзья. Каждый из них и Петя получили от Деда Мороза более одного подарка. В конце праздника оказалось, что каждый ребенок, включая Петю, получил на 7 подарков меньше, чем все остальные дети вместе взятые. Сколько друзей пришло к Пете на елку?
3. Каждое из десяти положительных чисел равно квадрату суммы остальных девяти. Найти сумму этих чисел.
4. Квадратный трехчлен $y = x^2 + bx + c$ назовем совершенным, если b и c являются его корнями. Найти все совершенные квадратные трехчлены.
5. Точки A, B, C и D окружности являются вершинами четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Длина сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника равны $\sqrt{21}$, 3, 2 и 4 соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Вариант 2

1. Квадратное поле размером 1200×1200 метров разделено на 144 огороженных загонов в форме квадратов со стороной 100 м. В каждом из загонов поселились зайцы. Количество зайцев, живущих в соседних (имеющих общую сторону) загонах отличается не более, чем на 6. Докажите, что есть на поле загоны с одинаковым числом, проживающих на них зайцев.
2. В дом Пети, на елку, пришли его друзья. Каждый из них и Петя получили от Деда Мороза более одного подарка. В конце праздника оказалось, что каждый ребенок, включая Петю, получил на 6 подарков меньше, чем все остальные дети вместе взятые. Какое наибольшее число друзей могло при этих условиях прийти к Пете на елку?

3. Каждое из одиннадцати положительных чисел равно квадрату суммы остальных десяти. Найти сумму квадратов этих чисел.

4. Квадратный трехчлен $y = x^2 + bx + c$ назовем совершенным, если b и c являются его корнями. Какое наименьшее значение может принимать квадратный трехчлен, если он совершенный?

5. Точки A, B, C и D окружности являются вершинами четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Длина сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника равны 4, 5, $\sqrt{45}$ и 6 соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Вариант 3

1. Квадратное поле размером 1300×1300 метров разделено на 169 огороженных загонов в форме квадратов со стороной 100 м. В каждом из загонов поселились зайцы. Количество зайцев, живущих в соседних (имеющих общую сторону) загонах отличается не более, чем на 6. Докажите, что есть на поле загоны с одинаковым числом, проживающих на них зайцев.

2. В дом Пети, на елку, пришли его друзья. Каждый из них и Петя получили от Деда Мороза более одного подарка. В конце праздника оказалось, что каждый ребенок, включая Петю, получил на 8 подарков меньше, чем все остальные дети вместе взятые. Какое наибольшее число друзей могло при этих условиях прийти к Пете на елку?

3. Каждое из двадцати одного положительного числа равно квадрату суммы остальных двадцати. Найти наибольшее из этих чисел.

4. Квадратный трехчлен $y = x^2 + bx + c$ назовем совершенным, если b и c являются его корнями. Найти наименьшее возможное значение корней совершенных квадратных трехчленов?

5. Точки A, B, C и D окружности являются вершинами четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Длина сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника равны 4, 2, 5 и $\sqrt{37}$ соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Вариант 4

1. Квадратное поле размером 1400×1400 метров разделено на 196 огороженных загонов в форме квадратов со стороной 100 м. В каждом из загонов поселились зайцы. Количество зайцев, живущих в соседних (имеющих общую сторону) загонах отличается не более, чем на 7. Докажите, что есть на поле загоны с одинаковым числом, проживающих на них зайцев.
2. В дом Пети, на елку, пришли его друзья. Каждый из них и Петя получили от Деда Мороза более одного подарка. В конце праздника оказалось, что каждый ребенок, включая Петю, получил на 5 подарков меньше, чем все остальные дети вместе взятые. Сколько подарков роздал Дед Мороз детям?
3. Каждое из шестнадцати положительных чисел равно квадрату суммы остальных пятнадцати. Найти наименьшее из этих чисел.
4. Квадратный трехчлен $y = x^2 + bx + c$ назовем совершенным, если b и c являются его корнями. Найти наибольшее возможное значение корней совершенных квадратных трехчленов?
5. Точки A, B, C и D окружности являются вершинами четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Длина сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника равны $\sqrt{40}, 5, 1$ и 4 соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.