***Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»***
***Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 10 класс***

## Вариант № 1

**1.** В городской школе под номером 66 знания учеников оценивают по шести бальной системе: за каждый ответ, контрольную по любому предмету, поведению и пр. ученику выставляется в журнал оценка в $1, 2, \ldots, 6$ баллов. Вася, интересуясь результатами своей учебы за первую четверть, обнаружил, что число его оценок в $k$ баллов, равно числу оценок в $k-1$ бал у его друга Пети и так происходит для всех $k = 2, 3, \ldots, 6$. А вот число его оценок в 1 бал равно числу шестерок у Пети, при этом общее число оценок у них равно 18, а средний бал за четверть также одинаковый. Сколько шестерок получил Петя за четверть?

**2.** Сколько существует точек с координатами $(x; y; z)$ в кубе $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, для которых

$$2\sin x + 2\sin y + 2\sin z + 4(\sin x \sin y + \sin x \sin z + \sin y \sin z) + 8\sin x \sin y \sin z = 1?$$

**3.** График многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, проходящий через точки $A$ и $B$ с координатами $(3; 5)$ и $(5; 3)$, пересекает биссектрису первого квадранта в точке $C$ с целой абсциссой. Найти расстояние точки $C$ до начала координат.

**4.** За круглый стол нужно посадить 9 гостей, каждому из которых заранее присвоен номер от 1 до 9. Этикет рассадки гостей за стол строго регламентирован: первым садится старейшина с номером 1 в любое кресло, далее занимает свое место гость с номером 2 и т.д. Очередной гость, входя в комнату, выбирает кресло, расположенное справа или слева от уже сидящего гостя. Гость с номером занимает последнее свободное кресло. Два способа рассадки гостей считаются различными, если хотя бы у одного гостя меняется сосед справа или слева, или их расположение. Сколькими различными способами можно рассадить гостей, соблюдая этикет?

**5.** Три окружности $K_1$, $K_2$ и $K_3$ с радиусами 1, 2 и 4 соответственно попарно касаются друг друга внешним образом. Четвертая окружность $K_4$ касается внешним образом окружностей $K_1$ и $K_3$, ее центр лежит на прямой, проходящей через центры окружностей $K_1$ и $K_3$, и расположен вне отрезка, соединяющего их центры. Найти радиус четвертой окружности.

## Ответы и решения

**1.** Число оценок $k$ баллов, $k = 1, \ldots, 6$, у Васи и Пети обозначим, соответственно, $x_k$ и $y_k$. Тогда, согласно условию задачи, получаем соотношения

$$\begin{gathered} x_k = y_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, 6; \qquad x_1 = y_6; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 18; \quad y_1 + y_2 + \ldots + y_6 = 18; \\ \frac{1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + 6 \cdot x_6}{18} = \frac{1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \ldots + 6 \cdot y_6}{18}. \end{gathered} \tag{1}$$

Поэтому

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + 6x_6 = y_1 + 2y_2 + \ldots + 6y_6.$$

Подставляя в это равенство выражения $x_k$ через $y_j$ из первой строки соотношений (1), получаем

$$\begin{gathered} y_6 + 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 5y_4 + 6y_5 = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 + 6y_6 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 5y_6 \Longrightarrow 6y_6 = 18. \end{gathered}$$

**Ответ.** Петя получил 3 шестёрки.

**2.** Положим $u := \sin x$, $v := \sin y$, $w := \sin z$. В этих обозначениях уравнение запишется так:

$$2u + 2v + 2w + 4(uv + uw + vw) + 8uvw = 1. \qquad (2)$$

Значения $u$, $v$ и $w$, соответствующие решениям исходного уравнения, удовлетворяют условиям: $u \in [0;1]$, $v \in [0;1]$ и $w \in [0;1]$. Покажем, что найдётся бесконечно много таких значений $u$, $v$ и $w$, которые удовлетворяют равенству (2).

Положим $w = 0$. Тогда уравнение (2) примет вид $2u + 2v + 4uv = 1$. Отсюда получаем

$$2v(1+2u) = 1 - 2u \Longrightarrow v = \frac{1-2u}{2(1+2u)} = -\frac{2u-1}{2(2u+1)} = \frac{1}{2u+1} - \frac{1}{2}.$$

Графиком $v$, рассматриваемой как функция от $u$, является гипербола. Набор значений $(u;v;w) = \left(u; -\dfrac{2u-1}{2(1+2u)}; 0\right)$ является решением уравнения (2). При каждом $u \in [0; 1/2]$ выполнены ограничения $v \in [0;1]$ и $w \in [0;1]$. Следовательно, исходное уравнение имеет бесконечно много решений.

**Ответ.** Уравнение имеет бесконечно много решений.

**3.** Обозначим $a := 3$ и $b := 5$, а координаты искомой точки $C$ — через $(c;c)$. По условию задачи $P(a) = b$, $P(b) = a$ и $P(c) = c$.

Ясно, что число $x = a$ является корнем многочлена $P(x) - P(a)$. Поэтому по теореме Безу $P(x) - P(a) = (x-a)Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. Многочлен $Q(x)$ можно получить делением многочлена $P(x) - P(a)$ на $x - a$. Поскольку коэффициенты многочлена $P(x) - P(a)$ целые, а коффициент при $x$ в делителе $x - a$ равен 1 и число $a$ целое, то коэффициенты частного $Q(x)$ так же целые. Поэтому, так как по условию задачи число $c$ целое, то значение $Q(c)$ целое. Следовательно, из разложения $P(x) - P(a) = (x-a)Q(x)$ при $x = c$ следует, что величина

$$\frac{P(c) - P(a)}{c-a} = Q(c) = \frac{c-b}{c-a}$$

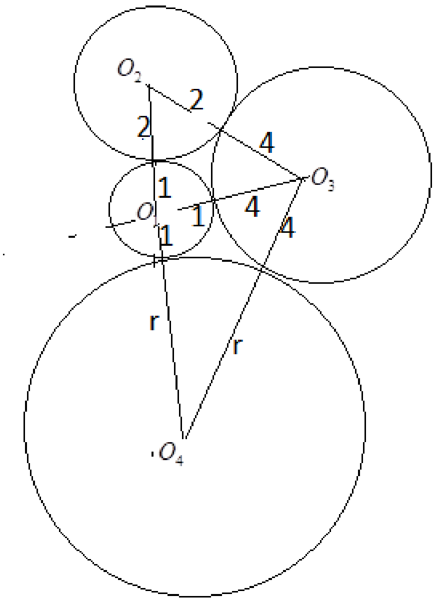
является целой. Аналогично получаем, что целой является и величина $\dfrac{c-a}{c-b}$. Две взаимно обратные величины одновременно являются целыми тогда и только тогда, когда $|c-a| = |c-b|$, т.е. когда $c - a = \pm(c-b)$. Поскольку $a \neq b$, то отсюда следует, что $c = \dfrac{a+b}{2}$. При $a = 3$ и $b = 5$ точка $C$ имеет координаты $(4;4)$.

**Ответ.** Точка $C$ лежит на расстоянии $4\sqrt{2}$ от начала координат.

**4.** Пусть $n$ общее число гостей. По условию задачи расположения гостей, полученные друг из друга поворотами стола не различаются и читаются один раз. Поэтому можно считать, что первый гость сидит на первом месте. Каждый из последующих 8 гостей, начиная со втрого и заканчивая предпоследним занимает одно из двух возможных мест. Следовательно, существует $2^{n-2} = 2^8$ вариантов рассаживания.

**Ответ.** Гостей можно рассадить $2^8 = 256$ способами.

**5.** Центры окружностей $K_1$, $K_2$, $K_3$ и $K_4$ обозначим соответственно $O_1$, $O_2$, $O_3$ и $O_4$, а их радиусы — $r_1$, $r_2$, $r_3$ и $r$.По условию задачи отрезок $[O_3;O]$ делит треугольник $\triangle O_2O_3O_4$ на треугольники $\triangle O_2O_3O_1$ и $\triangle O_1O_3O_4$ и сумма углов $\angle O_2O_1O_3 + \angle O_3O_1O_4 = \pi$. Поэтому $\cos\angle O_2O_1O_3 = -\cos\angle O_3O_1O_4$.




По теореме косинусов для $\triangle O_2O_3O_1$ имеем

$$(r_2+r_3)^2 = (r_1+r_2)^2 + (r_1+r_3)^2 - 2(r_1+r_2)(r_1+r_3)\cos\angle O_2O_1O_3.$$

Подствляя сюда значения $r_1$, $r_2$, $r_3$ получаем

$$6^2 = 3^2 + 5^2 - 30\cos\angle O_2O_1O_3 \Longrightarrow \cos\angle O_2O_1O_3 = -\frac{1}{15} \Longrightarrow \cos\angle O_3O_1O_4 = \frac{1}{15}.$$

Тогда, по теореме косинусов для $\triangle O_3O_3O_4$ выполняется

$$(r+r_3)^2 = (r+r_1)^2 + (r_1+r_3)^2 - 2(r+r_1)(r_1+r_3)\cos\angle O_3O_1O_4.$$

Подставляя сюда значения $r_1$, $r_2$, $r_3$ и $\cos\angle O_3O_1O_4$ получаем

$$(r+4)^2 = (r+1)^2 + 5^2 - (r+1)\frac{10}{15} \Longrightarrow r = \frac{7}{5}.$$

**Ответ.** Радиус окружности $K_4$ равен $\frac{7}{5}$.

## Вариант № 2

**1.** В городской школе под номером 77 знания учеников оценивают по семи бальной системе: за каждый ответ, контрольную по любому предмету, поведению и пр. ученику выставляется в журнал оценка в $1, 2, 3, \ldots, 7$ баллов. Вася, интересуясь результатами своей учебы за первую четверть, обнаружил, что число его оценок в $k$ баллов, равно числу оценок в $k-1$ балл у его друга Пети и так происходит для всех $k = 2, 3, \ldots, 7$. А вот число его оценок в 1 бал равно числу семерок у Пети, при этом общее число оценок у них равно 14, а средний бал за четверть также одинаковый. Сколько единиц получил Вася за четверть?

**Ответ.** 2.

**2.** Сколько существует точек с координатами $(x; y; z)$ в параллелепипеде $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $-\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$, для которых

$$2\sin x + 2\cos y + 2\cos z + 4(\sin x\cos y + \sin x\cos z + \cos y\cos z) + 8\sin x\cos y\cos z = 1?$$

**Ответ.** Уравнение имеет бесконечно много решений.

**3.** График многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, проходящий через точки $A$ и $B$ с координатами $(4; 6)$ и $(6; 4)$, пересекает биссектрису первого квадранта в точке $C$ с целой абсциссой. Найти расстояние точки $C$ до начала координат.

**Ответ.** $5\sqrt{2}$.

**4.** За круглый стол нужно посадить 10 гостей, каждому из которых заранее присвоен номер от 1 до 10. Этикет рассадки гостей за стол строго регламентирован: первым садится старейшина с номером 1 в любое кресло, далее занимает свое место гость с номером 2 и т.д. Очередной гость, входя в комнату, выбирает кресло, расположенное справа или слева от уже сидящего гостя. Гость с номером 10 занимает последнее свободное кресло. Два способа рассадки гостей считаются различными, если хо-тя бы у одного гостя меняется сосед справа или слева, или их расположение. Сколькими различными способами можно рассадить гостей, соблюдая этикет?

**Ответ.** $2^8 = 256$.

**5.** Три окружности $K_1$, $K_2$ и $K_3$ с радиусами 1, 3 и 2 соответственно попарно касаются друг друга внешним образом. Четвертая окружность $K_4$ касается внешним образом окружностей $K_1$ и $K_2$, ее центр лежит на прямой, проходящей через центры окружностей $K_1$ и $K_2$, и расположен вне отрезка, соединяющего их центры. Найти радиус четвертой окружности.

**Ответ.** $r = 3$.

## Вариант № 3

**1.** В городской школе под номером 88 знания учеников оценивают по восьми балльной системе: за каждый ответ, контрольную по любому предмету, поведению и пр. ученику выставляется в журнал оценка в $1, 2, \ldots, 8$ баллов. Вася, интересуясь результатами своей учебы за первую четверть, обнаружил, что число его оценок в $k$ баллов, равно числу оценок в $k-1$ балл у его друга Пети и так происходит для всех $k = 2, 3, \ldots, 8$. А вот число его оценок в 1 балл равно числу восьмёрок у Пети, при этом общее число оценок у них равно 32, а средний балл за четверть также одинаковый. Сколько восьмёрок получил Петя за четверть?

**Ответ.** 4.

**2.** Сколько существует точек с координатами $(x; y; z)$ в параллелепипеде $-\pi \leqslant x \leqslant {}^{\pi}/_{2}$, $-\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$, $-2\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$, для которых

$$2\sin x + 2\cos y + 2\sin z + 4(\sin x\cos y + \sin x\sin z + \cos y\sin z) + 8\sin x\cos y\sin z = 1?$$

**Ответ.** Уравнение имеет бесконечно много решений.

**3.** График многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, проходящий через точки $A$ и $B$ с координатами $(5; 7)$ и $(7; 5)$, пересекает биссектрису первого квадранта в точке $C$ с целой абсциссой. Найти расстояние точки $C$ до начала координат.

**Ответ.** $6\sqrt{2}$.

**4.** За круглый стол нужно посадить 11 гостей, каждому из которых заранее присвоен номер от 1 до 11. Этикет рассадки гостей за стол строго регламентирован: первым садится старейшина с номером 1 в любое кресло, далее занимает свое место гость с номером 2 и т.д. Очередной гость, входя в комнату, выбирает кресло, расположенное справа или слева от уже сидящего гостя. Гость с номером 11 занимает последнее свободное кресло. Два способа рассадки гостей считаются различными, если хотя бы у одного гостя меняется сосед справа или слева, или их расположение. Сколькими различными способами можно рассадить гостей, соблюдая этикет?

**Ответ.** $2^9 = 512$.

**5.** Три окружности $K_1$, $K_2$ и $K_3$ с радиусами 1, 4 и 3 соответственно попарно касаются друг друга внешним образом. Четвертая окружность $K_4$ касается внешним образом окружностей $K_1$ и $K_3$, ее центр лежит на прямой, проходящей через центры окружностей $K_1$ и $K_2$, и расположен вне отрезка, соединяющего их центры. Найти радиус четвертой окружности.

**Ответ.** $r = \dfrac{8}{7}$.

## Вариант № 4

**1.** В городской школе под номером 99 знания учеников оценивают по девяти балльной системе: за каждый ответ, контрольную по любому предмету, поведению и пр. ученику выставляется в журнал оценка в $1, 2, \ldots, 9$ баллов. Вася, интересуясь результатами своей учебы за первую четверть, обнаружил, что число его оценок в $k$ баллов, равно числу оценок в $k-1$ балл у его друга Пети и так происходит для всех $k = 2, 3, \ldots, 9$. А вот число его оценок в 1 балл равно числу девяток у Пети, при этом общее число оценок у них равно 37, а средний балл за четверть также одинаковый. Сколько единиц получил Петя за четверть?

**Ответ.** 4.

**2.** Сколько существует точек с координатами $(x; y; z)$ в параллелепипеде $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $-\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$, для которых

$$2\sin x + 2\cos y + 2\sin z + 4(\sin x\cos y + \sin x\sin z + \cos y\sin z) + 8\sin x\cos y\sin z = 1?$$

**Ответ.** Уравнение имеет бесконечно много решений.

**3.** График многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, проходящий через точки $A$ и $B$ с координатами $(4; 6)$ и $(6; 4)$, пересекает биссектрису первого квадранта в точке $C$ с целой абсциссой. Найти расстояние точки $C$ до начала координат.

**Ответ.** $7\sqrt{2}$.

**4.** За круглый стол нужно посадить 12 гостей, каждому из которых заранее присвоен номер от 1 до 12. Этикет рассадки гостей за стол строго регламентирован: первым садится старейшина с номером 1 в любое кресло, далее занимает свое место гость с номером 2 и т.д. Очередной гость, входя в комнату, выбирает кресло, расположенное справа или слева от уже сидящего гостя. Гость с номером 12 занимает последнее свободное кресло. Два способа рассадки гостей считаются различными, если хотя бы у одного гостя меняется сосед справа или слева, или их расположение. Сколькими различными способами можно рассадить гостей, соблюдая этикет?

**Ответ.** $2^{10} = 1024$.

**5.** Три окружности $K_1$, $K_2$ и $K_3$ с радиусами 1, 5 и 4 соответственно попарно касаются друг друга внешним образом. Четвертая окружность $K_4$ касается внешним образом окружностей $K_1$ и $K_3$, ее центр лежит на прямой, проходящей через центры окружностей $K_1$ и $K_2$, и расположен вне отрезка, соединяющего их центры. Найти радиус четвертой окружности.

**Ответ.** $r = \dfrac{5}{7}$.

**Критерии проверки отборочного тура Олимпиады по математике от 29.10.23, Москва, 10 класс**

**Задача 1.**

- верно составлена система уравнений, отвечающая условиям задачи **1 балл**
- из системы верно найдено требуемое количество отметок **3 балла**
- незначительные ошибки в решении, но в целом задача решена **2 балла**
- если математической модели задачи в виде системы не построено **0 баллов**

**Задача 2.**

- уравнение приведено к виду произведения с разделенными переменными **1балл**
- верно решена тригонометрия уравнения и верно отобраны корни на каждом отрезке **2 балла**
- установлено тем или иным обоснованным способом, возможно, что без разложения на множители, что корней **бесконечно много** (при этом хотя бы одно тригонометрическое уравнение должно быть решено на заданном отрезке) **3 балла**
- необоснованные ответы **0 баллов**

**Задача 3.**

- составлены все необходимые для решения задачи равенства и присутствуют попытки получить из этих равенств связь между параметрами задачи, но связь не получена **1 балл**
- полностью верное и обоснованное решение **3 балла**
- незначительные погрешности в обосновании, но в целом задача решена **2 балла**
- необоснованные ответы **0 баллов**

**Задача 4.**

- задача математически формализована до модели, позволяющей вычислить вероятности, но количество способов для каждого элементарного исхода найдено неверно **1 балл**
- построена обоснованная математическая модель, верно найдены количество различных элементарных исходов и правильно найдена общее количество способов **3 балла**
- в целом решение верное, но имеются погрешности (логические или арифметические ошибки) **2 балла**
- необоснованно полученные количества способов **0 баллов**

**Задача 5.**

- построен верный чертеж (со всеми центрами, точками касания и пояснено, почему других вариантов расположения окружностей нет), а также записаны уравнения, связывающие величины радиусов **1 балл**
- плюс к первому пункту связаны значения косинусов **2 балла**
- полностью обоснованное верное решение исходя из правильного рисунка и правильных соотношений **3 балла**
- недостаточное обоснование или незначительные погрешности, но в целом задача решена **2 балла**
- все, что меньше первого пункта **0 баллов**

## Критерии проверки работ отборочного тура Олимпиады Росатом по математике, 10 класс, выезд 18-19 ноября 2023

**Во всех задачах верный ответ без решения** – 0 б.

**Задача 1.**

- верно в соответствии с условиями выразил время движения девушки **или** парней **1 б**
- верно в соответствии с условиями выразил время движения **и девушки, и парней 2 б**
- указал критерий оптимальности и верно нашел оптимальное значение параметра **3 б**
- если математической модели задачи не построено **0 б**

**Задача 2.**

- верно разложил на множители выражение, равное нулю **1б**
- верно решена **вся** тригонометрия **2 б**
- **хотя бы одна ошибка в тригонометрии – не более 1б**
- отобраны корни на указанном отрезке и правильно посчитано их количество **3б**
- незначительные погрешности при отборе корней **2б**
- ответы без обоснования **0б**

**Задача 3.**

- задача полностью математически формализована: выписана целевая функция и ограничения **1б**
- тем или иным способом найден максимум и доказано, что это максимум **3б**
- незначительные погрешности в обосновании максимума, но в целом задача решена **2б**
- необоснованные ответы **0б**

**Задача 4.**

- рассмотрен один из случаев (равные **или** не равные корни x1 и x2) и для этого случая верно найдены **все возможные** значения параметров b и c **1б**
- рассмотрены **оба** случая (равные и не равные корни x1 и x2) и для каждого случая верно найдены **все возможные** значения параметров b и c **3б**
- рассмотрены оба случая, но с небольшими недочетами **2б**
- **рассмотрены оба случая со значительными недочетами, но какие-то верные соотношения между b и c установлены 1б**
- необоснованно полученные значения параметров **0б**

**Задача 5.**

- построен верный чертеж, на котором отражены все особенности условия, отрезки AB и CD продолжены за вершины до пересечения в точке (условно M) с указанием прямого угла, связаны углы при вершинах A и D **1б**
- помимо первого пункта, построен прямоугольный треугольник треугольник на диагонали и диаметре, указаны равные углы, найден острый угол (против известной диагонали) **2б**
- второй пункт без первого **1б**
- неизвестная диагональ выражена через известные и найденные параметры и правильно вычислена **3б**
- недостаточное обоснование или незначительные погрешности, но в целом задача решена **2б**
- все, что меньше первого (или второго без первого) пункта **0б**

***Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»***
***Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», выезд 1, математика, 10 класс***

**Вариант № 1**

**1.** Трем друзьям Петру, Ивану и Марии надо перебраться, как можно скорее, из города А в город В по шоссе. Перемещаться можно пешком или на единственном, имеющимся у них, велосипеде, на котором могут ехать не более двух человек. Скорость передвижения по шоссе пешком в 4 раза меньше скорости езды на велосипеде в одиночку. Скорость езды на велосипеде уменьшается в $q$ раз, если на нем едут вдвоем. Решено было, что они выйдут из А одновременно: Иван пешком, а Петя провезет Марию на велосипеде две трети пути, сам вернется, чтобы забрать Ивана и отвести его в город В, а Мария пройдет оставшийся путь пешком. Все трое благополучно прибыли в город В. При каком значении $q$ время операции будет минимальным? Время остановок, разворотов, посадок пассажира на велосипед не учитывается, скорость передвижения пешком для Марии и Ивана одинаковая и постоянная.

**2.** Определить количество различных решений уравнения

$$\left(\sin x-\sin 2x+\cos 3x\right)^2=\sin^2 x-\sin^2 2x+\cos^2 3x$$

на отрезке $[0;2\pi]$.

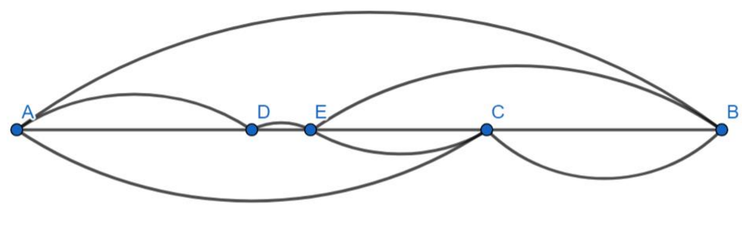
**3.** Муравей Гоша сидит в центре $O$ квадрата $ABCD$, а муравей Леша – в точке диагонали $BD$, удаленной на расстояние $1$ от Гоши. Муравьи начинают двигаться по диагоналям квадрата: Леша в сторону центра, а Гоша так, чтобы расстояние по прямой между ним и Лешей оставалось постоянным. Во время движения муравьи находятся в точках $M$ и $N$. Найти наибольшее возможное значение площади треугольника $OMN$.

**4.** При каких $b$ и $c$ система уравнений $\begin{cases} y^2+2x_1y+2x_2=0 \\ z^2+2x_2z+2x_1=0 \end{cases}$ имеет решение, для которого $y=z$? Здесь $x_1, x_2$ – действительные корни уравнения $x^2+6bx+c=0$.

**5.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $2$, причем прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны. Длина диагонали $AC$ равна $\sqrt{7}$. Найти длину второй диагонали $BD$.

Приведём решение этого варианта.

**1. Решение.** Если скорость участника движения пешком равна $v$, то скорость одного участника на велосипеде будет $4v$, а скорость на велосипеде вдвоем – $\frac{4v}{q}$. Пользоваться велосипедом имеет смысл, если $q<4$. При этом из общих соображений понятно, что скорость на велосипеде вдвоем



не может превышать скорости одного путника на велосипеде. Поэтому $q \geq 1$. Обозначим расстояние между городами $AB = L$. Путники одновременно стартовали из города $A$. Петр довез Марию до точки $C$. На это было затрачено время $t_1 = \frac{2L}{3} \cdot \frac{q}{4v} = \frac{Lq}{6v}$. Тогда $AC = \frac{2L}{3}$. Дальше Мария пошла пешком. Таким образом, Мария окажется в городе $B$ через время

$$T_M = t_1 + \frac{L}{3} \cdot \frac{1}{v} = \frac{Lq}{6v} + \frac{L}{3v} = \frac{L(2+q)}{6v} = \frac{L(20+10q)}{60v}$$

от начала движения из города $A$.

За время $t_1$ Иван дошел до точки $D$, расстояние $AD = vt_1 = \frac{Lq}{6}$. Далее Иван и Петр начали движения навстречу друг другу, Иван пешком, а Петр – на велосипеде. Они встретились в точке $E$ через время

$$t_2 = \frac{DC}{v+4v} = \frac{AC - AD}{5v} = \frac{\frac{2L}{3} - \frac{Lq}{6}}{5v} = \frac{L(4-q)}{30v}$$

от начала движения навстречу друг другу, при этом Петр проехал расстояние

$$CE = 4vt_2 = \frac{L(8-2q)}{15}.$$

После встречи в точке $E$ парням осталось проехать расстояние

$$EB = CE + CA = \frac{8L - 2Lq}{15} + \frac{L}{3} = \frac{L(13-2q)}{15}.$$

На это потребовалось время

$$t_3 = EB \cdot \frac{q}{4v} = \frac{L(13q - 2q^2)}{60v}.$$

Таким образом, парни прибыли в город $B$ через время

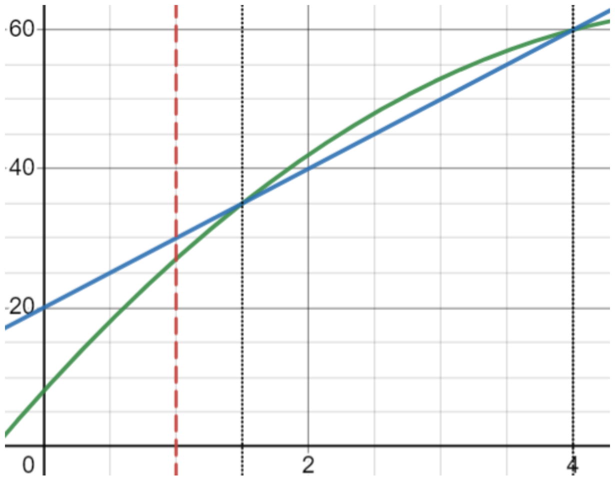
$$T_{PI} = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{L(-2q^2 + 21q + 8)}{60v}$$

после начала движения из города $A$.

Изобразим на графике зависимость времени общего движения Марии и Петра с Иваном от параметра $q$, полагая ради удобства $\frac{L}{60v} = 1$. Для парней это будет парабола с ветвями вниз $T = -2q^2 + 21q + 8$, а для Марии – линейная зависимость $T = 10q + 20$. Графики пересекаются, если $q$ является корнем уравнения

$$-2q^2 + 21q + 8 = 10q + 20 \Leftrightarrow$$

$$2q^2 - 11q + 12 = 0 \Leftrightarrow q = \left[\begin{array}{l} 4 \\ \frac{3}{2} \end{array}\right.$$




Значение $q = 4$ отвечает случаю, когда скорость пешком совпадает со скоростью на велосипеде вдвоем, при этом реализуется сценарий с максимальным временем движения. Значение $q = \frac{3}{2}$ отвечает случаю, наименьшего времени, если все участники движения должны появиться в городе $B$

одновременно $\left(T=\dfrac{7L}{12v}\right)$. Однако существуют более быстрые сценарии, когда ребята появляются в городе $B$ раньше Марии, но при этом время Марии меньше времени, реализующегося при $q=\dfrac{3}{2}$. А именно, чем ближе значение $q$ к 1 (справа), тем быстрее завершится миссия. То есть, если разрешить участникам движения добираться до города не одновременно, минимум времени $\left(T=\dfrac{L}{2v}\right)$ будет отвечать значению $q=1$.

**Ответ:** $q=\dfrac{3}{2},\ T_{\min}=\dfrac{7L}{12v}$, если все участники должны попасть в город $B$ одновременно;

$q=1,\ T_{\min}=\dfrac{L}{2v}<\dfrac{7L}{12v}$, если разрешить им явиться в город $B$ в разное время.

**2. Решение.** После введения обозначений $u=\sin x,\ v=\sin 2x,\ w=\cos 3x$, уравнение примет вид

$$(u-v+w)^2-u^2=w^2-v^2.$$

Раскладывая на множители, получим

$$(w-v)(2u-v+w)=(w-v)(w+v)\Leftrightarrow(w-v)(2u-2v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}w=v\\u=v\end{array}\right..$$

Случай 1. $w=v$

$$\sin 2x=\cos 3x\to\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3x=\dfrac{\pi}{2}-2x+2\pi k\\3x=2x-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi k}{5}\\x_2=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m\end{array}\right.,\quad k,m\in\mathbb{Z}.$$

После отбора, получаем на отрезке $[0,2\pi]$ корни $\left\{\begin{array}{l}x_1=\dfrac{\pi}{10},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{9\pi}{10},\dfrac{13\pi}{10},\dfrac{17\pi}{10}\\x_2=\dfrac{3\pi}{2}\end{array}\right..$

Случай 2. $u=v$

$$\sin x=\sin 2x\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x=x+2\pi k\\2x=\pi-x+2\pi m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_3=2\pi k\\x_4=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi m}{3}\end{array}\right.,\quad k,m\in\mathbb{Z}.$$

После отбора, получаем на отрезке $[0,2\pi]$ корни $\left\{\begin{array}{l}x_3=0,2\pi\\x_4=\dfrac{\pi}{3},\pi,\dfrac{5\pi}{3}\end{array}\right..$

Все найденные корни различны, значит, всего их $5+1+2+3=11$.

**Ответ:** 11 корней

**3. Решение.** Для того, чтобы образовался треугольник, муравьи должны передвигаться по разным диагоналям. Учитывая, что диагонали квадрата взаимно перпендикулярны, получим, что треугольник $OMN$ – прямоугольный, причем расстояние между муравьями $MN$ – длина его гипотенузы. Пусть $OM=x>0,\ ON=y>0.$ Тогда, учитывая, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения длин катетов, получаем следующее:

$$\begin{cases} x>0,\ y>0 \\ x^2+y^2=MN^2=1 \\ S=\dfrac{xy}{2}\to\max \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,\ y>0 \\ y^2=1-x^2 \\ 2S=xy\to\max \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,\ y>0 \\ y^2=1-x^2 \\ 4S^2=x^2\left(1-x^2\right)\to\max \end{cases}.$$

Поскольку $4S^2=x^2-x^4=\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$, то максимум площади достигается, когда разность в скобках рана нулю, то есть при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и треугольник $OMN$ – равнобедренный, а максимальное значение площади $S=\frac{1}{4}$.

При решении задачи мы использовали тот факт, что максимуму $S$ отвечает и максимум $4S^2$, так как функция $f\left(S\right)=4S^2$ монотонно возрастает при $S>0$.

**Ответ:** $S_{\max}=\frac{1}{4}$

**4. Решение.** Поскольку система $\begin{cases} y^2+2x_1y+2x_2=0 \\ z^2+2x_2z+2x_1=0 \end{cases}$ имеет решение, для которого $y=z$, подставим в нее $y=z$, и исследуем полученную систему на разрешимость:

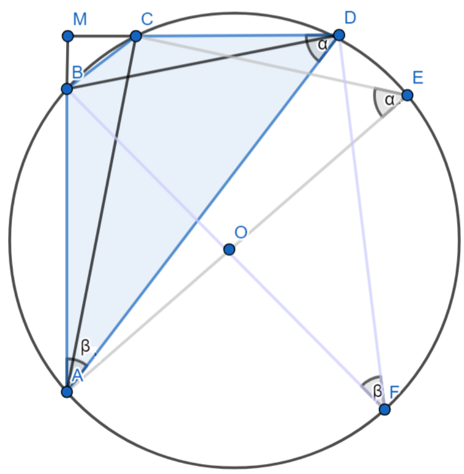
$$\begin{cases} z^2+2x_1z+2x_2=0 \\ z^2+2x_2z+2x_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2+2x_1z+2x_2=0 \\ 2z\left(x_1-x_2\right)-2\left(x_1-x_2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2+2x_1z+2x_2=0 \\ 2\left(z-1\right)\left(x_1-x_2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2+2x_1z+2x_2=0 \\ \left[\begin{array}{l} z=1 \\ x_1=x_2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Случай 1. $z=1$. Подставляя $z=1$ в первое уравнение системы, получим $x_1+x_2=-\frac{1}{2}$. Тогда по теореме Виета получаем $-6b=-\frac{1}{2}$, следовательно, $b=\frac{1}{12}$. При этом для существования вещественных корней уравнения $x^2+6bx+c=0$ необходимо выполнение неравенства $\frac{D}{4}=9b^2-c\geq 0$, то есть $c\leq 9b^2$ или $c\leq\frac{1}{16}$.

Случай 2. $x_1=x_2$. Равенство корней достигается при $D=0\Leftrightarrow 9b^2-c=0\Leftrightarrow c=9b^2$. При этом получаем $x_1=x_2=-3b$. Подставляя это в уравнение $z^2+2x_1z+2x_2=0$, получим $z^2-6bz-6b=0$. Последнее имеет вещественные корни при $\frac{\tilde{D}}{4}=9b^2-6b=9b\left(b-\frac{3}{2}\right)\geq 0$. Это условие обеспечивается значениями $b\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[0;+\infty\right)$.

Объединяя случаи 1 и 2, получаем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\dfrac{1}{12} \\ c\in\left(-\infty;\dfrac{1}{16}\right] \end{cases} \\ \begin{cases} b\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[0;+\infty\right) \\ c=9b^2 \end{cases} \end{array}\right.$.

**Ответ:** $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = \dfrac{1}{12} \\ c \in \left(-\infty; \dfrac{1}{16}\right] \end{cases} \\ \begin{cases} b \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right] \cup [0; +\infty) \\ c = 9b^2 \end{cases} \end{array}\right.$




**5. Решение.** Продолжим стороны $AB$ и $CD$ до пересечения в точке $M$. Тогда треугольник $AMD$ – прямоугольный. Пусть угол $MAD = \alpha$, а угол $MDA = \beta$. Тогда $\alpha + \beta = 90^o$.

Углы $CEA$ и $MDA$ опираются на одну дугу, поэтому $CEA = MDA = \alpha$.

Углы $BFD$ и $MAD$ опираются на одну дугу, поэтому $BFD = MAD = \beta$.

В прямоугольном треугольнике $ACE$ (угол $ACE$ опирается на диаметр) получаем $AC = 2R\sin\alpha$. Откуда найдем $\sin\alpha = \dfrac{AC}{2R} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Тогда $\cos\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{7}{16}} = \dfrac{3}{4}$.

И наконец, в прямоугольном треугольнике $BDF$ (угол $BDF$ опирается на диаметр) найдем $BD = 2R\sin\beta = 2R\cos\alpha = 4 \cdot \dfrac{3}{4} = 3.$

**Ответ:** $BD = 3$

## Вариант №2

**1.** Трем друзьям Петру, Ивану и Марии надо перебраться, как можно скорее, из города A в город B по шоссе. Перемещаться можно пешком или на единственном, имеющимся у них, велосипеде, на котором могут ехать не более двух человек. Скорость передвижения по шоссе пешком в 5 раз меньше скорости езды на велосипеде в одиночку. Скорость езды на велосипеде уменьшается в $q$ раз, если на нем едут вдвоем. Решено было, что они выйдут из A одновременно: Иван пешком, а Петя провезет Марию на велосипеде три пятых пути, сам вернется, чтобы забрать Ивана и отвести его в город B, а Мария пройдет оставшийся путь пешком. Все трое благополучно прибыли в город B. При каком значении $q$ время операции будет минимальным? Время остановок, разворотов, посадок пассажира на велосипед не учитывается, скорость передвижения пешком для Марии и Ивана одинаковая и постоянная.

**Ответ:** $q = 3,\ T_{\min} = \dfrac{19L}{25v}$, если все участники должны попасть в город $B$ одновременно;

$q = 1,\ T_{\min} = \dfrac{13L}{25v} < \dfrac{19L}{25v}$, если разрешить им явиться в город $B$ в разное время.

**2.** Определить количество различных решений уравнения

$$\left(\cos x-\sin 3x+\cos 2x\right)^2=\cos^2 x-\sin^2 3x+\cos^2 2x$$

на отрезке $\left[0;2\pi\right]$.

**Ответ:** 11 корней

**3.** Муравей Гоша сидит в центре $O$ квадрата $ABCD$, а муравей Леша – в точке диагонали $BD$, удаленной на расстояние $2$ от Гоши. Муравьи начинают двигаться по диагоналям квадрата: Леша в сторону центра, а Гоша так, чтобы расстояние по прямой между ним и Лешей оставалось постоянным. Во время движения муравьи находятся в точках $M$ и $N$. Найти наибольшее возможное значение площади треугольника $OMN$.

**Ответ:** $S_{\max}=1$

**4.** При каких $b$ и $c$ система уравнений $\begin{cases} y^2+3x_1y+3x_2=0\\ z^2+3x_2z+3x_1=0\end{cases}$ имеет решение, для которого $y=z$? Здесь $x_1,x_2$ – действительные корни уравнения $x^2+4bx+c=0$.

**Ответ:** $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b=\dfrac{1}{12}\\ c\in\left(-\infty;\dfrac{1}{36}\right]\end{cases}\\ \begin{cases} b\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[0;+\infty\right)\\ c=4b^2\end{cases}\end{array}\right.$

**5.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $\sqrt{3}$, причем прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны. Угол при вершине $A$ равен $60^0$. Найти длину диагоналей четырехугольника.

**Ответ:** $AC=\sqrt{3},\ BD=3$

### Вариант №3

**1.** Трем друзьям Петру, Ивану и Марии надо перебраться, как можно скорее, из города А в город В по шоссе. Перемещаться можно пешком или на единственном, имеющимся у них, велосипеде, на котором могут ехать не более двух человек. Скорость передвижения по шоссе пешком в 6 раз меньше скорости езды на велосипеде в одиночку. Скорость езды на велосипеде уменьшается в $q$ раз, если на нем едут вдвоем. Решено было, что они выйдут из А одновременно: Иван пешком, а Петя провезет Марию на велосипеде четыре пятых пути, сам вернется, чтобы забрать Ивана и отвести его в город В, а Мария пройдет оставшийся путь пешком. Все трое благополучно прибыли в город В. При каком значении $q$ время операции будет минимальным? Время остановок, разворотов, посадок пассажира на велосипед не учитывается, скорость передвижения пешком для Марии и Ивана одинаковая и постоянная.

**Ответ:** Всем вместе добраться быстро не получится, поскольку $q=\dfrac{3}{4}<1$ не имеет смысла; если разрешить участникам явиться в город $B$ в разное время, то $q=1,\ T_{\min}=\dfrac{L}{3v}$.

**2.** Определить количество различных решений уравнения

$$\left(\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x\right)^2=\cos^2 2x-\cos^2 3x+\cos^2 4x$$

на отрезке $\left[0;2\pi\right]$.

**Ответ:** 12 корней

**3.** Муравей Гоша сидит в центре $O$ квадрата $ABCD$, а муравей Леша – в точке диагонали $BD$, удаленной на расстояние $3$ от Гоши. Муравьи начинают двигаться по диагоналям квадрата: Леша в сторону центра, а Гоша так, чтобы расстояние по прямой между ним и Лешей оставалось постоянным. Во время движения муравьи находятся в точках $M$ и $N$. Найти наибольшее возможное значение площади треугольника $OMN$.

**Ответ:** $S_{\max}=\dfrac{9}{4}$

**4.** При каких $b$ и $c$ система уравнений $\begin{cases} y^2+4x_1y+4x_2=0\\ z^2+4x_2z+4x_1=0\end{cases}$ имеет решение, для которого $y=z$? Здесь $x_1, x_2$ – действительные корни уравнения $x^2+2bx+c=0$.

**Ответ:** $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b=\dfrac{1}{8}\\ c\in\left(-\infty;\dfrac{1}{64}\right]\end{cases}\\ \begin{cases} b\in(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)\\ c=b^2\end{cases}\end{array}\right.$

**5.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны. Длины диагоналей $AC$ и $BD$ равны $3$ и $4$ соответственно. Найти радиус окружности.

**Ответ:** $R=\dfrac{5}{2}$

### Вариант №4

**1.** Трем друзьям Петру, Ивану и Марии надо перебраться, как можно скорее, из города А в город В по шоссе. Перемещаться можно пешком или на единственном, имеющимся у них, велосипеде, на котором могут ехать не более двух человек. Скорость передвижения по шоссе пешком в 7 раз меньше скорости езды на велосипеде в одиночку. Скорость езды на велосипеде уменьшается в $q$ раз, если на нем едут вдвоем. Решено было, что они выйдут из А одновременно: Иван пешком, а Петя провезет Марию на велосипеде три четверти пути, сам вернется, чтобы забрать Ивана и отвести его в город В, а Мария пройдет оставшийся путь пешком. Все трое благополучно прибыли в город В. При каком значении $q$ время операции будет минимальным? Время остановок, разворотов, посадок пассажира на велосипед не учитывается, скорость передвижения пешком для Марии и Ивана одинаковая и постоянная.

**Ответ:** $q=\dfrac{5}{3},\ T_{\min}=\dfrac{3L}{7v},$ если все участники должны попасть в город $B$ одновременно;

$q=1,\ T_{\min}=\dfrac{5L}{14v}<\dfrac{3L}{7v},$ если разрешить им явиться в город $B$ в разное время.

**2.** Определить количество различных решений уравнения

$$\left(\mathrm{tg}3x-\mathrm{ctg}2x+\mathrm{tg}x\right)^2=\mathrm{tg}^2 3x-\mathrm{ctg}^2 2x+\mathrm{tg}^2 x$$

на отрезке $[0;2\pi]$.

**Ответ:** 8 корней

**3.** Муравей Гоша сидит в центре $O$ квадрата $ABCD$, а муравей Леша – в точке диагонали $BD$, удаленной на расстояние $4$ от Гоши. Муравьи начинают двигаться по диагоналям квадрата: Леша в сторону центра, а Гоша так, чтобы расстояние по прямой между ним и Лешей оставалось постоянным. Во время движения муравьи находятся в точках $M$ и $N$. Найти наибольшее возможное значение площади треугольника $OMN$.

**Ответ:** $S_{\max}=4$

**4.** При каких $b$ и $c$ система уравнений $\begin{cases} y^2+5x_1y+5x_2=0 \\ z^2+5x_2z+5x_1=0 \end{cases}$ имеет решение, для которого $y=z$? Здесь $x_1,x_2$ – действительные корни уравнения $x^2+10bx+c=0$.

**Ответ:** $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\dfrac{1}{50} \\ c\in\left(-\infty;\dfrac{1}{100}\right] \end{cases} \\ \begin{cases} b\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{25}\right]\cup[0;+\infty) \\ c=25b^2 \end{cases} \end{array}\right.$

**5.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны. Длины диагоналей $AC$ и $BD$ равны $12$ и $5$ соответственно. Найти радиус окружности и угол при вершине $A$ четырехугольника.

**Ответ:** $R=\dfrac{13}{2},\ \alpha=\arcsin\dfrac{5}{13}$

***Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»***
***Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» выезды, 25–26 ноября, математика, 10 класс***

## Вариант № 1

**1.** Аттракцион «Кольцо ужасов» имеет форму окружности, на которой отмечены три пункта $A$, $B$ и $C$ — места, где можно войти или покинуть аттракцион. Посетители аттракциона двигаются по окружности в одном направлении с постоянной скоростью. Углы при вершинах $A$, $B$, $C$ треугольника $\triangle ABC$ равны $\alpha = 40°$, $\beta = 110°$ и $\gamma = 30°$ соответственно. Маша вошла в аттракцион через вход $A$, прошла полный круг и вышла из него через выход $A$, затратив на все $T = 3$ мин. Сколько времени (секунд) она находилась на дуге окружности, для точек которой пункт $A$ был ближайшим местом, где можно было покинуть аттракцион?

**2.** Сколько различных троек чисел $(x; y; z)$ удовлетворяют уравнению

$$\sin x + \sin y + \sin z + 2(\sin x \sin y + \sin x \cos z + \sin y \cos z) + 4 \sin x \sin y \cos z = \frac{1}{2}$$

и неравенствам $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\pi \leqslant y \leqslant 3\pi$, $3\pi \leqslant z \leqslant 6\pi$?

**3.** Про два различных числа $x$ и $y$ известно, что

$$\begin{cases} x^2(y+2) = 2024, \\ y^2(x+2) = 2024. \end{cases}$$

Найти величину $(x + y)$.

**4.** Решить в натуральных числах уравнение

$$\left(1 - \frac{6}{f(1)}\right)\left(1 - \frac{6}{f(2)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{6}{f(x)}\right) = \frac{91}{550},$$

где $f(x) = x^2 + 5x + 6$ (число скобок равно $x$).

**5.** Через точку $D$ основания $AC$ равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ проведена прямая $BD$, пересекающая описанную окружность треугольника в точке $E$. Длина отрезка $BE$ равна $\sqrt{3}$. Отношение длин отрезков $BD : DE = 1 : 2$. Найти длину боковой стороны треугольника $\triangle ABC$.

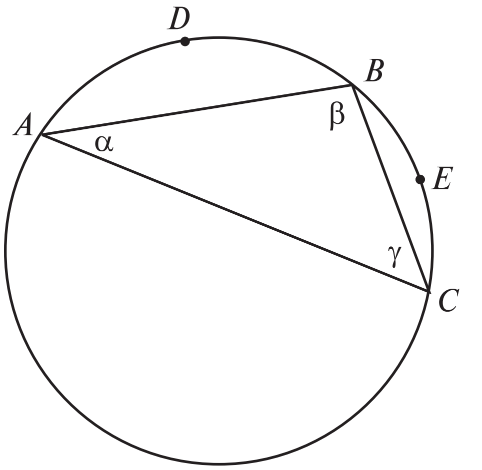
## Ответы и решения

**1.** Обозначим $D$ и $E$ середины дуг $\smile{AB}$ и $\smile{BC}$ соответственно. Угловая скорость Маши составляет $\omega = \dfrac{360°}{T} = \dfrac{360°}{180\text{ сек}} = 2°/_{\text{сек}}$ . Углы треугольника $\triangle ABC$ равны половине угловой меры дуг описанной окружности на которые эти углы опираются. Точка $B$ будет для Маши ближайшим возможным местом выхода, когда Маша находится на дугах $\smile{DB}$ и $\smile{BE}$. Угловые меры этих дуг равны $30°$ и $40°$ соответственно. Эти дуги проходятся Машей за $\dfrac{30° + 40°}{\omega} = 35$ сек.

**Ответ.** 35 секунд.

**2.** Положим $u := \sin x$, $v := \sin y$, $w := \cos z$. Так как $x \in [0; \pi]$, $y \in [-\pi; \pi]$ и $w \in [3\pi; 6\pi]$, то $u \in [0; 1]$, $v \in [-1; 1]$ и $w \in [-1; 1]$. С использованием этих обозначений для величин $\sin x$, $\sin y$ и $\cos z$ уравнение запишется так:

$$u + v + w - 2(uv + uw + vw) + 4uvw = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$




Положим $u = 0$ и $v = {}^1\!/_2$. При этих значениях $u$ и $v$ уравнение (1) становится тождеством $\dfrac{1}{2}+w-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot w \equiv \dfrac{1}{2}$. Следовательно, исходное уравнение имеет бесконечно много решений.

**Ответ.** Уравнение имеет бесконечно много решений.

**3.** Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем

$$x^2(y+2) - y^2(x+2) = xy(x-y) + 2(x^2-y^2) = (x-y)\big[xy + 2(x+y)\big] = 0.$$

По условию задачи $x \neq y$, поэтому отсюда следует, что $xy = -2(x+y)$. Подставляя это выражение для $xy$ в сумму уравнений системы, получаем

$$4048 = x^2(y+2) + y^2(x+2) = xy(x+y) + 2(x^2+y^2) =$$
$$= xy(x+y) + 2\big[(x+y)^2 - 2xy\big] = -2(x+y)^2 + 2\big[(x+y)^2 + 4(x+y)\big] = 8(x+y).$$

**Ответ.** $x + y = 806$.

**4.** Сначала преобразуем множители, входящие в левую часть уравнения.

$$1 - \frac{6}{f(x)} = 1 - \frac{6}{x^2+5x+6} = \frac{x^2+5x}{x^2+5x+6} = \frac{x(x+5)}{(x+2)(x+3)}.$$

Поэтому, учитывая, что $x$ — натуральное число, получаем

$$\left(1-\frac{6}{f(1)}\right)\cdot\left(1-\frac{6}{f(2)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{6}{f(x)}\right) =$$
$$= \frac{1\cdot(1+5)}{(1+2)\cdot(1+3)}\cdot\frac{2\cdot(2+5)}{(2+2)\cdot(2+3)}\cdot\ldots\cdot\frac{x\cdot(x+5)}{(x+2)\cdot(x+3)} =$$
$$= \frac{\big[1\cdot 2\cdot\ldots\cdot x\big]\cdot\big[(1+5)\cdot(2+5)\cdot\ldots\cdot(x+5)\big]}{\big[(1+2)\cdot(2+2)\cdot\ldots\cdot(x+2)\big]\cdot\big[(1+3)\cdot(2+3)\cdot\ldots\cdot(x+3)\big]}.$$

С использованием обозначения $n! := 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ это выражение можно записать так:

$$\frac{x!\cdot\dfrac{(x+5)!}{5!}}{\dfrac{(x+2)!}{2!}\cdot\dfrac{(x+3)!}{3!}} = \frac{2!\cdot 3!}{5!}\cdot\frac{x!}{(x+2)!}\cdot\frac{(x+5)!}{(x+3)!} = \frac{2\cdot 6}{120}\cdot\frac{(x+4)(x+5)}{(x+1)(x+2)}.$$

Поэтому решение задачи сводится к решению уравнения

$$\frac{(x+4)(x+5)}{(x+1)(x+2)} = \frac{91}{55} \overset{\text{т.к. } x\in\mathbb{N}}{\Longleftrightarrow} 6x^2 - 37x - 153 = 0,$$

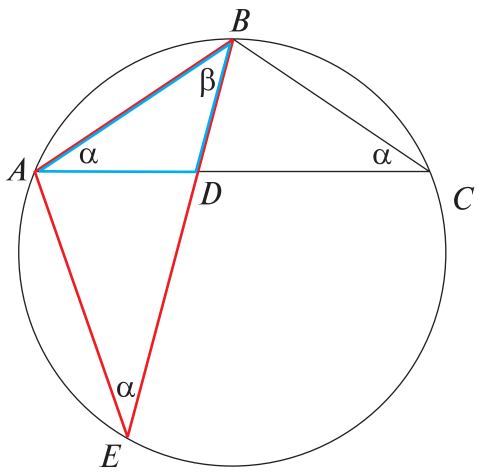
$$x_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 + 4\cdot 6\cdot 153}}{12} = \frac{37 \pm \sqrt{5041}}{12} = \frac{37 \pm 71}{12} \quad x_1 = 9,\ x_2 = -\frac{17}{6}.$$

Корень $x_2$ посторонний.

**Ответ.** $x = 9$.

**5.**Углы $\angle BAC$ и $\angle BEC$ опираются на одну и ту же дугу $\smile{BC}$ описанной вокруг треугольника $\triangle ABC$ окружности и поэтому равны. В равнобедренном $\triangle ABC$ выполнено $\angle BCA = \angle BCA$. Поэтому угол $\angle BEC$ треугольника $\triangle BCE$ равен углу $\angle BCD$ треугольника $\triangle BCD$. Угол $\angle CBD$ у треугольников $\triangle BCE$ и $\triangle BCD$ общий. Поэтому $\triangle BCE$ подобен $\triangle BCD$ по двум углам. Значит

$$\frac{\text{длина } BC}{\text{длина } BD} = \frac{\text{длина } BE}{\text{длина } BC} \Longrightarrow (\text{длина } BC)^2 = \text{длина } BE \cdot \text{длина } BD = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3} = 1.$$




**Ответ.** Длина боковой стороны $\triangle ABC$ равна 1.

## Вариант № 2

**1.** Аттракцион «Кольцо ужасов» имеет форму окружности, на которой отмечены три пункта $A$, $B$ и $C$ – места, где можно войти или покинуть аттракцион. Посетители аттракциона двигаются по окружности в одном направлении с постоянной скоростью. Углы при вершинах $A$, $B$, $C$ треугольника $\triangle ABC$ равны $\alpha = 48°$, $\beta = 100°$ и $\gamma = 32°$ соответственно. Маша вошла в аттракцион через вход $A$, прошла полный круг и вышла из него через выход $A$, затратив на все $T = 5$ мин. Сколько времени (секунд) она находилась на дуге окружности, для точек которой пункт $A$ был ближайшим местом, где можно было покинуть аттракцион?

**Ответ.** 110 секунд.

**2.** Сколько различных троек чисел $(x; y; z)$ удовлетворяют уравнению

$$\sin x + \sin 2y + \cos 3z - 2(\sin x \sin 2y + \sin x \cos 3z + \sin 2y \cos 3z) + 4 \sin x \sin 2y \cos 3z = \frac{1}{2}$$

и неравенствам $\pi \leqslant x \leqslant 5\pi$, $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 2\pi$?

**Ответ.** Уравнение имеет бесконечно много решений.

**3.** Про два различных числа $x$ и $y$ известно, что $x^2(y+3) = y^2(x+3) = 2025$. Найти величину $(x+y)$.

**Ответ.** $x + y = 225$.

**4.** Решить в натуральных числах уравнение

$$\left(1+\frac{1}{f(1)}\right)\left(1+\frac{1}{f(2)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{11}{9},$$

где $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x-2}$ (число скобок равно $x$).

**Решение.** В задаче правильными считались два разных решения.

а) Функция $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x-2}$ не определена при $x = 2$. Поскольку $x = 1$ решением не является, то задача решений не имеет.

б) Преобразуя множители, входящие в левую часть уравнения, получаем

$$1+\frac{1}{f(x)} = 1+\frac{x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(x^2+3x+2)+(x-2)}{x^2+3x+2} = \frac{x(x+4)}{(x+1)(x+2)}.$$

Эти выражения определены уже при всех натуральных значений $x$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{f(1)}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{f(2)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{f(x)}\right) =$$

$$= \frac{1\cdot(1+4)}{(1+1)\cdot(1+2)}\cdot\frac{2\cdot(2+4)}{(2+1)\cdot(2+2)}\cdot\ldots\cdot\frac{x\cdot(x+4)}{(x+1)\cdot(x+2)} =$$

$$= \frac{x!\cdot\dfrac{(x+4)!}{4!}}{\dfrac{(x+1)!}{1!}\cdot\dfrac{(x+2)!}{2!}} = \frac{1!\cdot 2!}{4!}\cdot\frac{x!}{(x+1)!}\cdot\frac{(x+4)!}{(x+2)!} = \frac{1}{12}\cdot\frac{(x+3)(x+4)}{x+1} = \frac{11}{9}.$$

Задача свелась к уравнению

$$\frac{1}{12}\frac{(x+3)(x+4)}{x+1} = \frac{11}{9} \overset{\text{т.к. } x\in\mathbb{N}}{\Longleftrightarrow} 3x^2 - 23x - 8 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{23\pm\sqrt{23^2+4\cdot 3\cdot 8}}{6} = \frac{23\pm\sqrt{625}}{6} = \frac{23\pm 25}{6} \quad x_1 = 8,\ x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Корень $x_2$ посторонний.

**Ответ.** Правильными считались два ответа: задача решений не имеет и $x = 8$.

**5.** Через точку $D$ основания $AC$ равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ проведена прямая $BD$, пересекающая описанную окружность треугольника в точке $E$. Длина отрезка $BE$ равна 4. Отношение длин отрезков $BD : DE = 1 : 3$. Найти длину боковой стороны треугольника $\triangle ABC$.

**Ответ.** Длина боковой стороны $\triangle ABC$ равна 2.

## Вариант № 3

**1.** Аттракцион «Кольцо ужасов» имеет форму окружности, на которой отмечены три пункта $A$, $B$ и $C$ – места, где можно войти или покинуть аттракцион. Посетители аттракциона двигаются по окружности в одном направлении с постоянной скоростью. Углы при вершинах $A$, $B$, $C$ треугольника $\triangle ABC$ равны $\alpha = 52°$, $\beta = 96°$ и $\gamma = 32°$ соответственно. Маша вошла в аттракцион через вход $A$, прошла полный круг и вышла из него через выход $A$, затратив на все $T = 6$ мин. Сколько времени (секунд) она находилась на дуге окружности, для точек которой пункт $C$ был ближайшим местом, где можно было покинуть аттракцион?

**Ответ.** 148 секунд.

**2.** Сколько различных троек чисел $(x; y; z)$ удовлетворяют уравнению

$$\cos x+\cos 2y+\cos 3z-2(\cos x\cos 2y+\cos x\cos 3z+\cos 2y\cos 3z)+4\cos x\cos 2y\cos 3z=\frac{1}{2}$$

и неравенствам $\pi \leqslant x \leqslant 4\pi$, $2\pi \leqslant y \leqslant 6\pi$, $\pi \leqslant z \leqslant 5\pi$?

**Ответ.** Уравнение имеет бесконечно много решений.

**3.** Про два различных числа $x$ и $y$ известно, что $x^2(y+4) = y^2(x+4) = 1296$. Найти величину $x+y$.

**Ответ.** $x + y = 81$.

**4.** Решить в натуральных числах уравнение

$$\left(1+\frac{1}{f(1)}\right)\left(1+\frac{1}{f(2)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)=10,$$

где $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{2x+5}$ (число скобок равно $x$).

**Решение.** Преобразуя множители, входящие в левую часть уравнения, получаем

$$1+\frac{1}{f(x)}=1+\frac{2x+5}{x^2+4x+3}=\frac{x^2+6x+8}{x^2+4x+3}=\frac{(x+2)(x+4)}{(x+1)(x+3)}.$$

Отсюда

$$\left(1+\frac{1}{f(1)}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{f(2)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)=$$
$$=\frac{(1+2)\cdot(1+4)}{(1+1)\cdot(1+3)}\cdot\frac{(2+2)\cdot(2+4)}{(2+1)\cdot(2+3)}\cdot\ldots\cdot\frac{(x+2)\cdot(x+4)}{(x+1)\cdot(x+3)}=$$
$$=\frac{1!\cdot 3!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{(x+2)!\cdot(x+4)!}{(x+1)!\cdot(x+3)!}=\frac{(x+2)(x+4)}{8}=10.$$

Задачи свелась к решению уравнения

$$\frac{(x+2)(x+4)}{8}=10 \overset{\text{т.к. } x\in\mathbb{N}}{\Longleftrightarrow} x^2+6x-72=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2+4\cdot 72}}{2}=\frac{-6\pm 6\sqrt{1+8}}{2}=-3\pm 9 \quad x_1=6,\ x_2=-12.$$

Корень $x_2$ посторонний.

**Ответ.** $x = 6$.

**5.** Через точку $D$ основания $AC$ равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ проведена прямая $BD$, пересекающая описанную окружность треугольника в точке $E$. Длина отрезка $BE$ равна $2\sqrt{6}$. Отношение длин отрезков $BD : DE = 2$. Найти длину боковой стороны треугольника $\triangle ABC$.

**Ответ.** Длина боковой стороны $\triangle ABC$ равна 4.

## Вариант № 4

**1.** Аттракцион «Кольцо ужасов» имеет форму окружности, на которой отмечены три пункта $A$, $B$ и $C$ – места, где можно войти или покинуть аттракцион. Посетители аттракциона двигаются по окружности в одном направлении с постоянной скоростью. Углы при вершинах $A$, $B$, $C$ треугольника $\triangle ABC$ равны $\alpha = 44°$, $\beta = 88°$ и $\gamma = 48°$ соответственно. Маша вошла в аттракцион через вход $B$, прошла полный круг и вышла из него через выход $B$, затратив на все $T = 2$ мин. Сколько времени (секунд) она находилась на дуге окружности, для точек которой пункт $C$ был ближайшим местом, где можно было покинуть аттракцион?

**Ответ.** 44 секунды.

**2.**Сколько различных троек чисел $(x;y;z)$ удовлетворяют уравнению

$$\cos x+\sin y+\cos 2z-2(\cos x\sin y+\cos x\cos 2z+\sin y\cos 2z)+4\cos x\sin y\cos 2z=\frac{1}{2}$$

и неравенствам $3\pi\leqslant x\leqslant 5\pi$, $2\pi\leqslant y\leqslant 6\pi$, $\pi\leqslant z\leqslant 7\pi$?

**Ответ.** Уравнение имеет бесконечно много решений.

**3.** Про два различных числа $x$ и $y$ известно, что $x^2(y+5)=y^2(x+6)=1800$. Найти величину $(x+y)$.

**Ответ.** $x+y=72$.

**4.** Решить в натуральных числах уравнение

$$\left(1-\frac{2}{f(1)}\right)\left(1-\frac{2}{f(2)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{f(x)}\right)=\frac{5}{12},$$

где $f(x)=x^2+3x+2$ (число скобок равно $x$).

**Решение.** Преобразуя множители, входящие в левую часть уравнения, получаем

$$1-\frac{2}{f(x)}=1-\frac{2}{x^2+3x+2}=\frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}=\frac{x(x+3)}{(x+1)(x+2)}.$$

Отсюда

$$\left(1-\frac{2}{f(1)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{f(2)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{f(x)}\right)=$$
$$=\frac{1\cdot(1+3)}{(1+1)\cdot(1+2)}\cdot\frac{2\cdot(2+3)}{(2+1)\cdot(2+2)}\cdot\ldots\cdot\frac{x\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x+2)}=$$
$$=\frac{1!\cdot 2!}{3!}\cdot\frac{x!\cdot(x+3)!}{(x+1)!\cdot(x+2)!}=\frac{x+3}{3(x+1)}=\frac{5}{12}.$$

Задача свелась к уравнению

$$\frac{x+3}{3(x+1)}=\frac{5}{12}\overset{\text{т.к. } x\in\mathbb{N}}{\Longleftrightarrow}4(x+3)=5(x+1),\quad x=7.$$

**Ответ.** $x=7$.

**5.** Через точку $D$ основания $AC$ равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ проведена прямая $BD$, пересекающая описанную окружность треугольника в точке $E$. Длина отрезка $BE$ равна $\sqrt{15}$. Отношение длин отрезков $BD:DE=3:2$. Найти длину боковой стороны треугольника $\triangle ABC$.

**Ответ.** Длина боковой стороны $\triangle ABC$ равна 3.

**Критерии проверки работ отборочного тура Олимпиады Росатом по математике, 10 класс, выезд 25-26 ноября 2023**

**Во всех задачах верный ответ без решения** – 0 б.

**Задача 1.**

*0 баллов.* Нет продвижения в решении задачи, например чертёж сделан, но не указаны угловые величины дуг колеса и т.п.

*1 балл.* Сделан чертёж с правильными указанными угловыми величинами дуг или найдена угловая скорость.

*2 балла.* Задача решена с незначительными погрешностями.

*3 балла.* Задача решена полностью.

**Задача 2.**

*0 баллов.* Нет никаких осмысленных преобразований.

*1 балл.* Более-менее успешные попытки разложить выражение на множители.

*2 балла.* Нахождение каких-либо решений.

*3 балла.* Задача решена полностью.

**Задача 3.**

*0 баллов.* Нет продвижения в решении задачи.

*1 балл.* Нахождение какой-либо связи между $x+y$ и $xy$ или что-то подобное.

*2 балла.* Решение с незначительными погрешностями в выкладках или в обосновании.

*3 балла.* Задача решена полностью.

**Задача 4.**

*0 баллов.* Нет продвижения в решении задачи.

*1 балл.* Есть продвижения, например, выражения в скобках приведены к «хорошему» виду, не приводящие к решению задачи.

*2 балла.* Задача решена с незначительными ошибками или осмысленным подбором.

*3 балла.* Задача решена полностью.

**Задача 5.**

*0 баллов.* Нет продвижения в решении задачи, например, чертёж сделан, но на нём не указаны нужные равные углы.

*1 балл.* Сделано что-то осмысленное, например, установлено равенство всех углов, достаточное для решения задачи, но дальнейшего продвижения нет.

*2 балла.* Задача решена с незначительными погрешностями.

*3 балла.* Задача решена полностью.