Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», выезд 2, математика, 7 класс

Вариант 1.

1. Найдите все трехзначные числа, у которых сумма цифр в 11 раз меньше самого числа.

2. На одну чашу весов положили 25 гирек с весами 4, 5 и 6 г. Они уравновесили на другой чаше вес в 120 г. Каких гирек весом 4 г или 6 г на чаше весов оказалось больше и на сколько?

3. Петя написал по кругу шесть цифр 3,4,5,6,7,8 в произвольном порядке. Вася использовал эти цифры для написания на доске всех различных трехзначных чисел, составленных из подряд идущих, например, по часовой стрелке, цифр, написанных Петей. Найдите сумму чисел, написанных Васей.

4. Вместо того, чтобы умножить несократимую обыкновенную дробь с положительным числителем на три увеличили ее числитель и знаменатель на 12, при этом результат получился таким же. Найдите такие дроби.

5. На отрезке AB длины 12 расположена точка C так, что $AC:CB=1:2$. Точки M и N принадлежат отрезкам AC и CB так, что $AM:MC=CN:NB=1:3$. Найти длину отрезка MN.

Ответы и решения

Задача 1. Пусть $\overline{abc}=a\cdot 100+b\cdot 10+c$ – искомое трёхзначное число. Тогда сумма его цифр $(a+b+c)$. Составим уравнение: $(a+b+c)\cdot 11=a\cdot 100+b\cdot 10+c$. Приведём подобные слагаемые в этом уравнении, получим $a\cdot 89-b-10\cdot c=0$. Тогда $89a=b+10\cdot c$, поскольку a,b,c – цифры, то $a\le 9,\ b\le 9,\ c\le 9$. То есть $89a=\overline{cb}$, значит $c=8,\ a=1, b=9$. Число 198.
Ответ: 198.
Задача 2. Пусть x,y,z – количество гирек весом 4, 5 и 6 г соответственно.
Тогда по условию задачи: $\begin{cases}4x+5y+6z=120,\\ x+y+z=25.\end{cases}$ Умножив второе уравнение системы на число (-5), сложим два уравнения, получим: $-x+z=-5$, или $x-z=5$.
Значит, гирь с весом 4 грамма больше, чем гирь с весом 6 грамм на 5 штук.
Ответ: гирек весом 4 г на 5 больше, чем гирек 6 г.

Задача 3. Просуммируем полученные числа в «столбик». В каждом из трех столбцов (единицы, десятки, сотни) присутствуют указанные цифры по одному разу. Сумма цифр в каждом столбце одинаковая и равна $3+4+5+6+7+8=33$. Поэтому тройка переходит в следующий разряд и искомая сумма равна 3663.

Ответ: 3663.
Задача 4. Пусть p – числитель дроби. А q – знаменатель дроби. Тогда

$$\frac{3p}{q}=\frac{p+12}{q+12}\to pq=6q-18p$$

Число $6q=p(q+18)$ должно делится на p и, <u>в силу несократимости дроби</u>, p является делителем числа 6. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. $p=1$, $6q=q+18 \to \varnothing$

Случай 2. $p=2$, $6q=2q+36 \to q=9$

Случай 3. $p=3$, $6q=3q+54 \to p=3, q=18 \to \varnothing$

Случай 4. $p=6$, $6q=6q+108 \to \varnothing$

Ответ: $\frac{2}{9}$.

Задача 5. Известно, что отрезок AB разделили всего на три части $(1:2)$, значит $AC=4$, $CB=8$. Два новых отрезка делили на 4 части $(1:3)$, но из первого отрезка взяли $MC=\frac{3}{4}AC=3$, а из второго отрезка взяли одну часть $CN=\frac{1}{4}CB=2$, тогда

$$MN=MC+CN=3+2=5.$$

Ответ: 5.

Вариант 2

1. Найдите все трехзначные числа, у которых сумма цифр в 13 раз меньше самого числа.

Ответ: 117 и 156, 195.

2. На одну чашу весов положили 26 гирек с весами 5, 6 и 7 г. Они уравновесили на другой чаше вес в 150 г. Каких гирек весом 5 г или 7 г на чаше весов оказалось больше и на сколько?

Ответ: гирек весом 5 г на 6 больше, чем гирек 7 г.

3. Петя написал по кругу семь цифр 2,3,4,5,6,7,8 в произвольном порядке. Вася использовал эти цифры для написания на доске всех различных четырехзначных чисел, составленных из подряд идущих, например, по часовой стрелке, цифр, написанных Петей. Найдите сумму чисел, написанных Васей.

Ответ: 38885.

4. Вместо того, чтобы умножить несократимую дробь с положительным числителем на четыре увеличили ее числитель и знаменатель на 15, при этом результат получился таким же. Найдите такие дроби.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

5. На отрезке AB длины 25 расположена точка C так, что $AC:CB=2:3$. Точки M и N принадлежат отрезкам AC и CB так, что $AM:MC=CN:NB=3:2$. Найти длину отрезка MN

Ответ: 13.

Вариант 3

1. Найдите все трехзначные числа, у которых сумма цифр в 15 раз меньше самого числа.

Ответ: 135.

2. На одну чашу весов положили 27 гирек с весами 6, 7 и 8г. Они уравновесили на другой чаше вес в 180 г. Каких гирек весом 6 г или 8 г на чаше весов оказалось больше и на сколько?

Ответ: гирек весом 6 г на 9 больше, чем гирек 8 г.

3. Петя написал по кругу восемь цифр 2,3,4,5,6,7,8,9 в произвольном порядке. Вася использовал эти цифры для написания на доске всех различных трехзначных чисел, составленных из подряд идущих, например, по часовой стрелке, цифр, написанных Петей. Найдите сумму чисел, написанных Васей.

Ответ: 4884.

4. Вместо того, чтобы умножить несократимую дробь с положительным числителем на пять увеличили ее числитель и знаменатель на 6, при этом результат получился таким же. Найдите такие дроби.

Ответ: $\frac{1}{15}$.

5. На отрезке AB длины 18 расположена точка C так, что $AC : CB = 1:2$. Точки M и N принадлежат отрезкам AC и CB так, что $AM : MC = CN : NB = 1:5$. Найти длину отрезка MN.
Ответ: 7.

Вариант 4

1. Найдите все трехзначные числа, у которых сумма цифр в 16 раз меньше самого числа.
Ответ: 144, 192, 288.
2. На одну чашу весов положили 28 гирек с весами 7, 8 и 9 г. Они уравновесили на другой чаше вес в 220 г. Каких гирек весом 7 г или 9 г на чаше весов оказалось больше и на сколько?
Ответ: гирек весом 7 г на 4 больше, чем гирек 9 г.
3. Петя написал по кругу девять цифр 1,2, 3,4,5,6,7,8,9 в произвольном порядке. Вася использовал эти цифры для написания на доске всех различных четырехзначных чисел, составленных из подряд идущих, например, по часовой стрелке, цифр, написанных Петей. Найдите сумму чисел, написанных Васей.
Ответ: 49995.
4. Вместо того, чтобы умножить несократимую дробь с положительным числителем на семь увеличили ее числитель и знаменатель на 20, при этом результат получился таким же. Найдите такие дроби.

Ответ: $\frac{1}{10}$.

5. На отрезке AB длины 36 расположена точка C так, что $AC : CB = 1:3$. Точки M и N принадлежат отрезкам AC и CB так, что $AM : MC = CN : NB = 4:5$. Найти длину отрезка MN.
Ответ: 17.

Критерии проверки работ отборочного тура Олимпиады Росатом по математике, 7 класс, выезд 25-26 ноября 2023

Во всех задачах верный ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Нет уравнения по условию задачи.

1 б – Верно составлена математическая модель (верно составлено уравнение (равенство)).

2б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения или верно найдена первая цифра (две цифры) в числе с помощью решения уравнения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Нет выражений для гирь каждого веса (например, решение отдельных частей равенства).

1 б – Верно записано 2 уравнения с описанием введённых неизвестных.

2 б – Получено уравнение, приводящее к ответу на вопрос задачи, возможно с арифметической ошибкой. Ошибка в интерпретации данного уравнения. Дан ответ только на один вопрос задачи.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Выписаны какие-то числа из условия задачи. Приведены рисунки.

1 б – Верно составлены все возможные числа.

2б -- Задача решена с арифметической ошибкой (найдена сумма с ошибкой).

3 б – Задача решена верно.

Задача 4:

0 б -Приведены рисунки, решения для каких-то дробей.

1 б - Верно составлена математическая модель (верно составлено уравнение (равенство)).

2 б – Верно преобразовано уравнение, возможно рассмотрены не все случаи значения числителя (знаменателя). Нет проверки условия получения несократимой дроби.

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б – Есть чертёж (например, решение через рисунки, доли).

1 б – Верно найдена длина отрезка AM или CN.

2 б – Верно найдена длина CM или CN.

3 б - Задача решена верно.

Критерии проверки работ отборочного тура Олимпиады Росатом по математике, 7 класс, выезд 18-19 ноября 2023

Во всех задачах верный ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Незначительные продвижения в решении.

1 б – Верно составлена математическая модель (верно записано уравнение).

2б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения или верно найдено сколько цифр в числе.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Попытки преобразования отдельных сомножителей.

1 б – Верно записано уравнение с разложением на множители каждого числителя.

2 б – Показана закономерность при сокращении, возможно с арифметической ошибкой.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Неверно составлено хотя бы одно из неравенств(уравнений) по условию.

1 б – Верно составлена математическая модель (верно составлены 3 неравенства или верно записана система уравнений (равенств)).

2б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 4:

0 б -Приведены рисунки, решения для каких-то значений параметра.

1 б -Верно записана разность квадратов, необходимых для решения задачи.

2 б – Верно записаны два уравнения, возможно присутствуют мелкие недочеты. Нет оценки на область изменения параметра.

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б – Нет выражений в градусах (например, решение через рисунки, доли).

1 б – Верно найден угол часовой стрелки или минутной.

2 б – Верное завершенное решение с арифметической ошибкой.

3 б - Задача решена верно.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», выезд 1, математика, 7 класс

Вариант 1.

1. Если в десятичной записи натурального числа A уменьшить число его десятков на 2, то полученное число B в 2023 раза больше числа его единиц. Найти число A.

2. Найти натуральное число n, для которого $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{5}{9}$. Левая часть уравнения содержит $(n-1)$ скобку.

3. В нехорошей компании за вечер, проведенный вместе, 5 человек хотя бы один раз сказали правду. Четверо из присутствующих говорили правду не менее 2 раз, двое – не менее 3 раз и только один – не менее 4 раз. Среди присутствующих не было людей, сказавших правду более 4 раз. Сколько раз за вечер высказывались правдивые суждения?

4. При каких значениях a уравнение $x^2-2|x|=a^2-2|a|$ имеет четыре решения?

5. Часы показывают 2 часа 10 минут. Найти в этот момент угол (градусах) между минутной и часовой стрелками?

Ответы и решения

Задача 1.

1-й способ.

Запишем число A в виде $A=100a+10b+c,$ где a – натуральное число, b и c – однозначные натуральные числа, причем $b\geq 2$ (по условию, b будет уменьшаться на 2), $c\geq 1$ (из условия следует, что число единиц не равно нулю). Тогда имеем: $B=100a+10(b-2)+\mathrm{c}=2023\mathrm{c},$ откуда $100a+10(b-2)=2022c.$ Левая часть этого уравнения делится на 10, поэтому и правая его часть должна делиться на 10. Но 2022 не делится на 5, поэтому c должно делиться на 5; в силу того, что c – натуральное число от 1 до 9, следует, что $c=5.$ Тогда $100a+10(b-2)=2022\cdot 5.$ Разделив последнее уравнение на 10, получим: $10a+b-2=1011,$ поэтому $10a+b=1013,$ откуда $b=3, a=101.$ Итак, $A=100a+10b+c=100\cdot 101+10\cdot 3+5=10135.$

2-й способ.

Из условия следует, что A и B имеют одну и ту же цифру c в разряде единиц. Также произведение c на 2023 должно оканчиваться именно на c. По последней цифре произведения 2023·c проверим, какие значения может принимать c: $3\cdot 1=3, 3\cdot 2=6, 3\cdot 3=9, 3\cdot 4=12, 3\cdot\underline{5}=1\underline{5}$, $3\cdot 6=18, 3\cdot 7=21, 3\cdot 8=24, 3\cdot 9=27.$ Таким образом, однозначно $c=5, B=2023\cdot 5=10115.$ Чтобы найти A, к цифре десятков числа B прибавим 2: $A=10135.$

Ответ: $A=10135.$

Задача 2.

1-й способ.

Преобразуем левую часть данного уравнения, приводя разности в скобках к общему знаменателю и раскладывая числители по формуле разности квадратов: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\Big(1-$

$\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=$ $\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\cdot\frac{(5-1)(5+1)}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1-1)(n-1+1)}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot6}{5^2}\cdot$ $\ldots\cdot\frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2}$. В последнем выражении сократятся все знаменатели со второго по предпоследний с соответствующими множителями в числителях предыдущей и последующей дробях; останется одна двойка от знаменателя первой дроби и $\frac{n+1}{n}$ от последней дроби, т.е. останется дробь $\frac{n+1}{2n}$. Значит, имеем уравнение $\frac{n+1}{2n}=\frac{5}{9}$, откуда находим $n=9$.

2-й способ.

Из выражения в левой части данного уравнения следует, что с ростом n это положительное произведение уменьшается, так как $0<1-\frac{1}{k^2}<1$ для любого $k\geq 2, k\in\mathbb{N}$ Поэтому данное уравнение может иметь только одно решение.

Знаменатель в правой части заданного уравнения равен 9, поэтому попробуем $n=3$: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{3}>\frac{5}{9}$, поэтому n следует увеличить.

При $n=4$ $\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}$ и при $n=5$ $\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}$ в знаменателях не появляется множитель 3, поэтому эти значения n не могут являться решением. Вычислим левую часть уравнения при $n=6$: $\frac{2}{3}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}\cdot\frac{6^2-1}{6^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{35}{36}=\frac{7}{12}>\frac{5}{9}$; увеличиваем n.

При $n=7$ и при $n=8$ в знаменателях не появляется множитель 3, поэтому эти значения n не могут являться решением.

Вычислим левую часть уравнения при $n=9$: $\frac{7}{12}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{63}{64}\cdot\frac{80}{81}=\frac{5}{9}$, т.е. $n=9$ есть решение данного уравнения, причем оно единственно.

Ответ: $n=9$.

Задача 3. Так как 5 человек сказали правду хотя бы один раз, а 4 (из них) сказали правду хотя бы 2 раза, то ровно один раз сказал правду $(5-4)=1$ человек. Аналогично, так как 4 человека сказали правду не менее двух раз, а двое – не менее трех раз, то ровно два раза сказали правду $(4-2)=2$ человека; ровно три раза сказал правду $(2-1)=1$ человек; ровно четыре раза сказал правду также один человек (среди присутствующих не было людей, сказавших правду более 4 раз). Таким образом, всего за вечер правдивые суждения высказывались $1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1+4\cdot1=12$ раз.

Ответ: 12.

Задача 4. Заметим, что для любого x верно $x^2=|x|^2$ и для любого a справедливо $a^2=|a|^2$. Преобразуем уравнение $|x|^2-2|x|=|a|^2-2|a|$: $|x|^2-|a|^2=2|x|-2|a|$; $(|x|-|a|)\cdot(|x|+|a|)-2(|x|-|a|)=0$; $(|x|-|a|)\cdot(|x|+|a|-2)=0$. Если первая скобка равна нулю, то $|x|=|a|$, откуда получим два решения $x=\pm a$ при $a\neq0$ и одно решение $x=0$ при $a=0$. Если вторая скобка равна нулю, то $|x|=2-|a|$, что дает два решения $x=\pm(2-|a|)$ при $|a|<2$ и одно решение $x=0$ при $a=\pm2$ (при $|a|>2$ решений нет). Поскольку заданное уравнение должно иметь 4 различных решения, то a должно удовлетворять ограничениям $|a|<2, a\neq0$; кроме того, все 4 решения не должны попарно совпадать: $a\neq2-a\Rightarrow a\neq1$; $a\neq2+a\Rightarrow a$ – любое; $-a\neq2-a\Rightarrow a$ – любое; $-a\neq2+a\Rightarrow a\neq-1$. Значит, искомые значения параметра: $a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$.

Ответ: $a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$.

Задача 5. За время от 0 часов до 2 часов часовая стрелка повернется на угол $\frac{2}{12}\cdot 360^0 = 60^0$, а от 2 часов до 2 часов 10 минут - ещё на 5^0(за 1 час – на 30^0, за 10 минут – на $\frac{10}{60}\cdot 30^0 = 5^0$), т.е. отклонится от вертикали на 65^0. Минутная стрелка за время от 0 часов до 2 часов вернется в вертикальное положение, а ко времени 2 часа 10 минут отклонится от него на 60^0. Поэтому угол между стрелками в этот момент будет равен $65^0 - 60^0 = 5^0$.

Ответ: 5^0.

Вариант 2

1. Если в десятичной записи натурального числа A увеличить число десятков на 3, то полученное число B в 1917 раз больше числа его единиц. Найти число A.

Ответ: A=9555.

2. Найти натуральное число n, для которого $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{11}{20}$.

Левая часть уравнения содержит $(n-1)$ скобку.

Ответ: n=10.

3. В нехорошей компании за вечер, проведенный вместе, 6 человек хотя бы один раз сказали правду. Четверо из присутствующих говорили правду не менее 2 раз, трое – не менее 3 раз и только двое – не менее 4 раз. Среди присутствующих не было людей, сказавших правду более 4 раз. Сколько раз за вечер высказывались правдивые суждения?

Ответ: 15 раз.

4. При каких значениях a уравнение $x^2-3|x|=a^2+3|a|$ имеет три решения?

Ответ: a=0.

5. Часы показывают 3 часа 15 минут. Найти в этот момент угол (градусах) между минутной и часовой стрелками?

Ответ: $7{,}5^0$.

Вариант 3

1. Если в десятичной записи натурального числа A увеличить число сотен на 2, то полученное число B в 2045 раза больше числа его единиц. Найти число.

Ответ: A=10025.

2. Найти натуральное число n, для которого $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{6}{11}$.

Левая часть уравнения содержит $(n-1)$ скобку.

Ответ: n=11.

3. В нехорошей компании за вечер, проведенный вместе, 8 человек хотя бы один раз сказали правду. Шестеро из присутствующих говорили правду не менее 2 раз, пять – не менее 3 раз, трое – не более 4 раз и только один – не менее 5 раз. Среди присутствующих не было людей, сказавших правду более 5 раз. Сколько раз за вечер высказывались правдивые суждения?

Ответ: 23 раза.

4. При каких значениях a уравнение $x^2-4|x|=a^2-4|a|$ имеет два решения?

Ответ: $a \in (-\infty;-4) \cup \{\pm 2\} \cup (4;+\infty)$.

5. Часы показывают 4 часа 20 минут. Найти в этот момент угол (градусах) между минутной и часовой стрелками?

Ответ: 10^0.

Вариант 4

1. Если в десятичной записи натурального числа A уменьшить число сотен на 1, то полученное число B в 1947 раз больше числа его единиц. Найти число A.

Ответ: A=9835.

2. Найти натуральное число n, для которого $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{13}{24}$.

Левая часть уравнения содержит $(n-1)$ скобку.

Ответ: n=12.

3. В нехорошей компании за вечер, проведенный вместе, 9 человек хотя бы один раз сказали правду. Семеро из присутствующих говорили правду не менее 2 раз, четверо – не менее 3 раз и только двое – не менее 4 раз. Среди присутствующих не было людей, сказавших правду более 4 раз. Сколько раз за вечер высказывались правдивые суждения?

Ответ: 22 раза.

4. При каких значениях a уравнение $x^2+5|x|=a^2-5|a|$ имеет единственное решение?

Ответ: $a \in \{-5; 0; 5\}$.

5. Часы показывают 5 часов 30 минут. Найти в этот момент угол (градусах) между минутной и часовой стрелками?

Ответ: 15^0.

Росатом 7 класс (Отборочный тур), Москва 29.10.2023

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Неверно составлено хотя бы одно из неравенств(уравнений) по условию.

1 б – Верно составлена математическая модель (верно составлены 3 неравенства или верно записана система уравнений (равенств)).

2б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Нет выражений в градусах (например, решение через рисунки, доли).

1 б – Верно найден угол между часовой или минутной стрелкой и вертикалью (полночь).

2 б – Верное завершенное решение с арифметической ошибкой.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Верно составлено выражение оставшегося объема кваса после прихода k-го гостя.

2 б -- Верное завершенное решение с арифметической ошибкой.

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б -Выписано выражение или ответ без решения.

1 б -Найдена зависимость между числом делителей натурального числа (номера сектора) и числом переворотов карточки.

2 б - Задача решена с одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или есть мелкие недочеты;

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б -Нарисован чертёж.

1 б – Установлено, что указанный четырехугольник является прямоугольником; дальнейших продвижений в решении нет.

2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 7 класс
Вариант 1.

1. Ученики $7^А$ класса отправились в тир. Половина учеников поразили не менее 1 мишени, треть – не менее 2 мишеней, четверть – не менее 3 мишеней. Наконец, восьмой части школьников удалось попасть в не менее 4 мишеней. Более чем 4 мишени не удалось поразить никому. Сколько учеников стреляли в тире и сколько мишеней ими было поражено, если в классе не более 30 учеников?

2. Какой угол (в градусах) составляют минутная и часовая стрелки часов, когда они показывают 3 часа 36 минут?

3. Хозяйка вечеринки придумала поить приходящих гостей квасом из банки объемом 3 литра, соблюдая следующее правило: гость, пришедший k -ым, должен выпить $\dfrac{1}{\kappa+m}$ часть кваса, оставшегося в банке от предыдущего гостя. Здесь m – возраст хозяйки вечеринки. После прихода последнего гостя в банке оставалось 2 литра кваса. Сколько гостей пришло на вечеринку, если хозяйке 10 лет?

4. Круглый стол разделен на 100 секторов, каждому из них присвоен номер от 1 до 100 в порядке его возрастания при обходе стола по часовой стрелке. По всем секторам разложены одинаковые карточки, одна сторона которых белая, а другая – зеленая. Первоначально все карточки разложены зеленым вверх. Петя обходит стол по часовой стрелке, начиная с сектора 1. При первом обходе он перевернул все карточки, при втором – переворачивал карточки в секторах, номера которых делятся на 2, при третьем – в секторах с номерами, делящимися на 3 и т.д. Всего Петя совершил 100 обходов стола. Сколько карточек белого цвета находилось к этому моменту на столе?

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC, как на диаметрах, построены окружности K_1 и K_2. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная стороне BC, пересекает окружности в точках M и N. Найти площадь четырехугольника $BMNC$, если площадь треугольника ABC равна 1.

Ответы и решения

Задача 1.

1 способ.

Пусть число учеников в классе x человек. Тогда $\frac{1}{2}x$ поразили не менее 1 мишени;

$\frac{1}{3}x$ поразили не менее 2 мишеней;

$\frac{1}{4}x$ поразили не менее 3 мишеней;

$\frac{1}{8}x$ поразили не менее 4 мишеней.

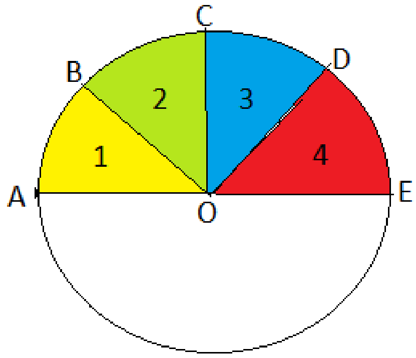
Нет участников, что поразили 5 мишеней. Значит, $1x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x$ – поразили 0 мишеней;

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}x$ – поразили 1 мишень;

$\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x=\frac{1}{12}x$ – поразили 2 мишени;

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x = \frac{1}{8}x$ – поразили 3 мишени.

Оставшиеся поразили 4 мишени, т.е. $1x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}x - \frac{1}{8}x = \frac{1}{8}x$ – поразили 4 мишени.
Число учеников в классе должно делиться нацело на 2, 6, 8, 12 одновременно.
НОК $(2, 6, 8, 12) = 24 \leq 30$. Это максимальное число при условии, что в классе не более 30 учеников. В классе 24 ученика.
Найдём число поражённых мишеней:
$\left(\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 4\right) \cdot 24 = 29.$

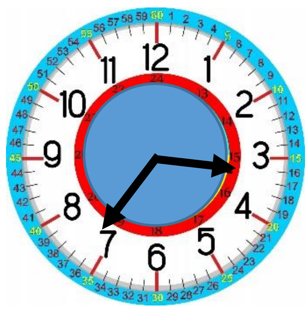


2 способ. На рис круг изображает весь класс, верхняя половина круга – учеников, попавших в мишень хотя бы один раз (половина от всех учеников). Сектор BOE - учеников, попавших в мишень не менее двух раз (треть от всех учеников). Сектор COE – учеников, поразивших мишень 3 и более раз (четвертая часть учеников). Сектор DOE - учеников поразивших 4 мишени (восьмая часть всех учеников). Цифрами помечены количество пораженных мишеней учениками данного сектора.

Пусть n – число учеников, стрелявших в тире. Тогда $\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{3}\right)$ – число учеников, выбивших 1 мишень, $\left(\frac{n}{3} - \frac{n}{4}\right)$ – выбивших 2 мишени, $\left(\frac{n}{4} - \frac{n}{8}\right)$ – 3 мишени, $\frac{n}{8}$ – поразили 4 мишени.

Общее число мишеней $\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{3}\right) + 2\left(\frac{n}{3} - \frac{n}{4}\right) + 3\left(\frac{n}{4} - \frac{n}{8}\right) + 4 \cdot \frac{n}{8} = \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} = \frac{29n}{24}$.

Из условия целочисленности следует, что n кратно 24, а из ограничения числа участников – то, что $n = 24$. Тогда общее число пораженных мишеней равно 29.
Ответ: 24 ученика, 29 мишеней.



Задача 2. Градусная мера всего круга (окружности циферблата) – 360^0 (два развёрнутых угла). Часовая стрелка за 1 час проходит $\frac{1}{12}$ часть окружности циферблата, т.е. $\frac{360^9}{12} = 30^0$. За 36 минут она же повернется на $\frac{36}{60} \cdot 30^0 = 18^0$. К моменту времени 3часа 36минут, часовая стрелка *повернется относительно вертикали (полночь) на угол, равный* $3 \cdot 30^0 + 18^0 = 108^0$. *Минутная* стрелка за 1 час совершает полный оборот – 360^0, поэтому за 36 минут она повернется от вертикали на $\frac{36}{60} \cdot 360^0 = 216^0$. Тогда угол между часовой и минутной стрелкой составит $216^0 - 108^0 = 108^0$.
Ответ: 108^0

Задача 3. Пусть на вечеринку пришло n гостей. Согласно условию задачи, первый гость выпьет $\frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}$ часть кваса из банки объёмом 3 литра, т.е. $3 \cdot \frac{1}{11}$ л кваса. Тогда после него в банке останется $3 - 3 \cdot \frac{1}{11} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 3 \cdot \frac{10}{11}$ л кваса. Второй гость выпьет $\frac{1}{2+10} = \frac{1}{12}$

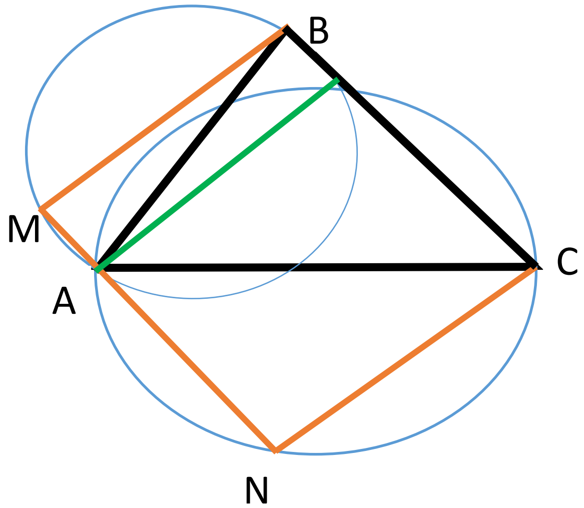
часть от оставшихся $3 \cdot \frac{10}{11}$ л кваса, т.е. $3 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{12}$ л кваса; в свою очередь, после прихода второго гостя в банке останется $3 \cdot \frac{10}{11} - 3 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{12} = 3 \cdot \frac{10}{11} \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 3 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12}$ л кваса. Третий гость выпьет $\frac{1}{3+10} = \frac{1}{13}$ часть от остатка кваса, т.е. $3 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{13}$ л кваса; после прихода третьего гостя в банке останется $3 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} - 3 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{13} = 3 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{13}\right) = 3 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{12}{13}$ л кваса, и т.д. Таким образом, после прихода n – го гостя в банке останется $3 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{12}{13} \cdot \dots \cdot \frac{n+8}{n+9} \cdot \frac{n+9}{n+10} = 3 \cdot \frac{10}{n+10}$ л кваса. По условию, $3 \cdot \frac{10}{n+10} = 2$, откуда $\frac{15}{n+10} = 1; n + 10 = 15; n = 5$.

Ответ: 5.

Задача 4. Согласно основной теореме арифметики, каждое натуральное число n, имеющее m различных простых делителей $p_1, p_2, \cdots, p_m$, может быть представлено в следующем виде: $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_m^{r_m}$, где $r_1, r_2, \cdots, r_m$ - их кратности. Такое число n имеет $K_n = (r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \dots \cdot (r_m + 1)$ различных делителей, включая 1 и само число (всякий простой делитель p_i можно брать от 0 до r_i раз сомножителем). По условию, карточка в секторе с номером n изменит свое положение столько раз, сколько различных делителей имеет число n (число $n = 1$ не имеет простых делителей; оно имеет единственный делитель 1). Если хотя бы одно из чисел r_k нечетное, то число K_n - четное, и карточка с таким номером n останется зеленой. Белыми станут карточки с номерами n, для которых все кратности r_k четные, т.е. n является квадратом целого числа. Номера таких карточек: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, всего 10 штук.

Ответ: 10 карточек.

Задача 5. Угол AMB опирается на диаметр AB окружности K_1, поэтому он прямой. Угол ANC опирается на диаметр AC окружности K_2, поэтому он также прямой. Поскольку $MN \| BC, MB \perp MN, NC \perp MN$, то $MB \perp BC, NC \perp BC, MB \| NC$, т.е. четырехугольник $BMNC$ является прямоугольником.



Имеем: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_A$,

где $h_A -$ высота, проведенная из вершины A к стороне BC; она равна MB. Тогда $S_{BMNC} = BC \cdot MB = 2 \cdot S_{\Delta ABC} = 2 \cdot 1 = 1$.

Ответ: 2.

Вариант 2

1. Ученики $7^{Б}$ класса и их родители отправились в тир. Треть участников мероприятия поразили не менее 1 мишени, четверть – не менее 2 мишеней, пятая часть – не менее 3 мишеней. Наконец, двенадцатой части участников удалось попасть не меньше чем в 4 мишени. Более чем 4 мишени не удалось поразить никому. Сколько человек стреляли в тире и сколько мишеней ими было поражено, если число стрелявших кратно четырем и их не более 70 человек?

Ответ: 60 участников, 52 мишени.

2. Какой угол (в градусах) составляют минутная и часовая стрелки часов, когда они показывают 13 часов 48 минут?

Ответ: 126^0.

3. Хозяйка вечеринки придумала поить приходящих гостей квасом из банки объемом 4 литров, соблюдая следующее правило: гость, пришедший k -ым должен выпить $\frac{1}{к+m}$ часть кваса, оставшегося в банке от предыдущего гостя. Здесь m – возраст хозяйки вечеринки. После прихода последнего гостя в банке оставалось 3 литра кваса. Сколько гостей пришло на вечеринку, если хозяйке 12 лет?

Ответ: 4.

4. Круглый стол разделен на 200 секторов, каждому из них присвоен номер от 1 до 200 в порядке его возрастания при обходе стола по часовой стрелке. По всем секторам разложены одинаковые карточки, одна сторона которых белая, а другая – зеленая. Первоначально все карточки разложены зеленым вверх. Петя обходит стол по часовой стрелке, начиная с сектора 1. При первом обходе он перевернул все карточки, при втором – переворачивал карточки в секторах, номера которых делятся на 2, при третьем – в секторах с номерами, делящимися на 3 и т.д. Всего Петя совершил 200 обходов стола. Сколько карточек белого цвета находилось к этому моменту на столе?

Ответ: 14 карточек.

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC, как на диаметрах, построены окружности K_1 и K_2. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная стороне BC, пересекает окружности в точках M и N. Найти площадь четырехугольника $BMNC$, если площадь треугольника ABC равна 2.

Ответ: 4.

Вариант 3

1. Ученики $7^В$ класса отправились в тир. Три четверти учеников поразили не менее 1 мишени, две трети – не менее 2 мишеней, шестая часть – не менее 3 мишеней. Наконец, одной двенадцатой части школьников удалось попасть не меньше чем в 4 мишени. Более чем 4 мишени не удалось поразить никому. Сколько учеников стреляли в тире и сколько мишеней ими было поражено, если в классе не более 25 учеников, а число пораженных мишеней максимально возможное?

Ответ: 24 ученика, 40 мишень.

2. Какой угол (в градусах) составляют минутная и часовая стрелки часов, когда они показывают 5 часов 6 минут?

Ответ: 117^0 .

3. Хозяйка вечеринки придумала поить приходящих гостей квасом из банки объемом $1,5$ литра, соблюдая следующее правило: гость, пришедший k -ым должен выпить $\frac{1}{к+m}$ часть кваса, оставшегося в банке от предыдущего гостя. Здесь m – возраст хозяйки вечеринки. После прихода последнего гостя в банке оставался 1литр кваса. Сколько гостей пришло на вечеринку, если хозяйке 14 лет?

Ответ: 7.

4. Круглый стол разделен на 300 секторов, каждому из них присвоен номер от 1 до 300 в порядке его возрастания при обходе стола по часовой стрелке. По всем секторам разложены одинаковые карточки, одна сторона которых белая, а другая – зеленая. Первоначально все карточки разложены зеленым вверх. Петя обходит стол по часовой стрелке, начиная с сектора 1. При первом обходе он перевернул все карточки, при втором – переворачивал карточки в секторах, номера которых делятся на 2, при третьем – в секторах с номерами, делящимися на 3 и т.д. Всего Петя совершил 300 обходов стола. Сколько карточек белого цвета находилось к этому моменту на столе?

Ответ: 17 карточек.

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC, как на диаметрах, построены окружности K_1 и K_2. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная стороне BC, пересекает окружности в точках M и N. Найти площадь четырехугольника $BMNC$, если площадь треугольника ABC равна 3.

Ответ: 6.

Вариант 4

1. Ученики $7^{Г}$ класса отправились в тир. Две трети учеников поразили не менее 1 мишени, половина – не менее 2 мишеней, две пятых – не менее 3 мишеней. Наконец, шестой части школьников удалось попасть не меньше чем в 4 мишени. Более чем 4 мишени не удалось поразить никому. Сколько учеников стреляли в тире и сколько мишеней ими было поражено, если в классе не более 32 учеников?

Ответ: 30 учеников, 52 мишени.

2. Какой угол (в градусах) составляют минутная и часовая стрелки часов, когда они показывают 18 часов 24 минуты?

Ответ: 48^0.

3. Хозяйка вечеринки придумала поить приходящих гостей квасом из банки объемом 6 литров, соблюдая следующее правило: гость, пришедший k -ым должен выпить $\frac{1}{\kappa+m}$ часть кваса, оставшегося в банке от предыдущего гостя. Здесь m – возраст хозяйки вечеринки. После прихода последнего гостя в банке оставалось 4 литра кваса. Сколько гостей пришло на вечеринку, если хозяйке 16 лет?

Ответ: 8.

4. Круглый стол разделен на 400 секторов, каждому из них присвоен номер от 1 до 400 в порядке его возрастания при обходе стола по часовой стрелке. По всем секторам разложены одинаковые карточки, одна сторона которых белая, а другая – зеленая. Первоначально все карточки разложены зеленым вверх. Петя обходит стол по часовой стрелке, начиная с сектора 1. При первом обходе он перевернул все карточки, при втором – переворачивал карточки в секторах, номера которых делятся на 2, при третьем – в секторах с номерами, делящимися на 3 и т.д. Всего Петя совершил 400 обходов стола. Сколько карточек белого цвета находилось к этому моменту на столе?

Ответ: 20 карточек.

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC, как на диаметрах, построены окружности K_1 и K_2. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная стороне BC, пересекает окружности в точках M и N. Найти площадь четырехугольника $BMNC$, если площадь треугольника ABC равна 4.

Ответ: 8.