Критерии проверки работ
отборочного тура олимпиады Росатом Москва, 29.10.2023   8 класс

Во всех задачах верный ответ без обоснования   0

Задача 1

- 0б - неверно составлено хотя бы одно из уравнений
- 1б - верно рассмотрен хотя бы один случай
- 2б - задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения
- 3б - задача решена верно

Задача 2

- 0б - нет никаких верных утверждений
- 1б - если заметил, что самый старший-честный, самый младший-лгун
- 2б - задача решена с незначительной ошибкой, не влияющей на ход решения
- 3б - задача решена верно

Задача 3

- 0б - если составил неверно хотя бы одно из трёх уравнений(неравенств) по условию
- 1б - верно составил все три уравнения (неравенства) по условию
- 2б - задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения
- 3б - задача решена верно

Задача 4

- 0б - если составил неверно хотя бы одно из двух уравнений по условию
- 1б - верно составил оба уравнения
- 2б - задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения
- 3б - задача решена верно

Задача 5

- 0б - неверно построил чертёж или не выписал условие перпендикулярности
- 1б - построил чертёж и выписал условие перпендикулярности
- 2б - задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения
- 3б - задача решена верно

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 8 класс

Вариант № 1

1. На столе стоит кофейник, бутылка молока и одинаковые чашки по числу членов семьи Ивановых: папы, мамы и их детей. Сын Вася разлил содержимое кофейника и бутылки по чашкам в известных ему пропорциях. Например, сестре Маше он налил $1/5$ кофейника и $1/8$ бутылки молока. В результате все члены семьи пили кофе с молоком, кофейник и бутылка оказались пустыми, а чашки – полными. Сколько детей в семье Ивановых, если на столе стояло менее семи чашек?

2. В 8^A классе 28 учеников, все они родились в один год, но в разные его дни. Каждый ученик либо абсолютно честен, т.е. никогда не сказал неправду, либо окончательный лгун: ни разу не сказал правды. Однажды весь класс расположился за круглым столом и каждый сидящий заявил, что он старше своих соседей справа и слева. Дальше поднялась группа товарищей из m человек и заявила, что каждый человек из этой группы младше своих соседей справа и слева. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение m .

3. В колоде 30 карт и все они семерки, восьмерки и девятки одной масти. Семерок в 3 раза меньше, чем девяток, а восьмерок меньше, чем девяток. Какое наименьшее число карт из колоды должен взять Петя, чтобы быть уверенным, что на руках у него окажется хотя бы одна девятка?

4. Ученики $8^{\text{А}}$ класса писали контрольную работу по математике и ни один из них не получил двойку. Петя сложил все отметки за контрольную в журнале и получил сумму 152. Сколько учеников в классе, если количество учеников, получивших «отлично» на 4 больше числа учеников, получивших «удовлетворительно»?

5. На сторонах AB, BC, CD и DA прямоугольника $ABCD$ отмечены точки P, Q, R и T так, что прямые PT и QR параллельны, а прямые PR и QT, пересекающиеся в точке O, перпендикулярны. Найти сумму длин отрезков AO и OC, если длины сторон прямоугольника равны 3 и 4.

Приведём решение этого варианта.

1. Решение. Обозначим через n-число чашек на столе (число членов семьи), через A-объём кофейника (в чашках), через B-объём бутылки молока (в чашках). Тогда A+B будет суммарный объём (в чашках) кофе и молока. Из условия задачи следует, что объём чашки равен $\frac{A}{5}+\frac{B}{8}$. Тогда число чашек на столе $n=\frac{A+B}{\frac{A}{5}+\frac{B}{8}}$. Запишем эту дробь в виде $n=\frac{5(A+B)}{A+\frac{5B}{7}}$. Из этого равенства следует, что $n>5$. Записав равенство для n в виде $n=\frac{8(A+B)}{\frac{8A}{5}+B}$, получим, что $n<8$. В результате имеем, что $5<n<8$. Тогда, так как $n\in N$ и по условию $n<7$, то $n=6$. Тогда с учётом родителей в семье Ивановых четверо детей.

Ответ: четверо детей.

2. Решение.

Из условия задачи следует, что самый старший из учеников-честный ученик, а самый молодой-лгун. Поэтому ни тот ни другой не могли оказаться в отмеченной группе из m человек. Следовательно, $\mathrm{m} \leq 26$. Докажем, что $\mathrm{m} = 26$ может достигаться. Для этого рассмотрим вариант когда первый ученик родился первого января, второй-второго января и так далее и 28-ой ученик родился 28-ого января. Тогда ученики родившиеся со 2-ого по 27-е января являются лгунами (так как каждый из них объявил, что он старше своих соседей). И поэтому мог объявить себя младше своих соседей. Таких учеников 26.

Ответ: 26.

3. Решение. Обозначим через n-число семёрок, через m-число восьмёрок и через k-число девяток. Тогда из условий задачи получим:

$$\begin{cases} \mathrm{n} + \mathrm{m} + \mathrm{k} = 30 \\ \mathrm{k} = 3\mathrm{n} \\ \mathrm{m} < \mathrm{k} \end{cases}$$

Обозначим n=t, где $\mathrm{t} \in \mathrm{N}$. Тогда $\mathrm{m} = 30 - \mathrm{n} - \mathrm{k} = 30 - 4\mathrm{t} \geq 0$. Следовательно, $\mathrm{t} \leq \frac{30}{4}$. Так как $\mathrm{m} < k$, то $30 - 4t < 3t$, или $\mathrm{t} > \frac{30}{7}$. Объединяя последние два неравенства, получим: $\frac{30}{7} < t \leq \frac{30}{4}$. Так как $\mathrm{t} \in N$, то t может принимать значения 5,6 и 7. Число семёрок и восьмёрок равно $n + m = t + 30 - 4t = 30 - 3t$. Поэтому наименьшее число карт, которое должен взять Петя должно быть на одну больше, т.е. $31 - 3t$ при самом малом допустимом значении $\mathrm{t} = 5$, т.е. $31 - 15 = 16$.

Ответ: 16 карт.

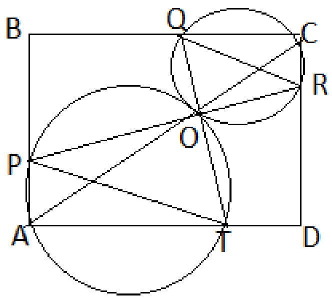
4. Решение. Обозначим через x-число учеников, получивших пятёрку, через y-число учеников, получивших четвёрку и через z-число учеников, получивших тройку. Тогда число учеников в классе равно n=x+y+z. Из условия задачи следует:

$$\begin{cases} 5x + 4y + 3z = 152 \\ x - z = 4 \end{cases}$$

Первое равенство этой системы запишем в виде $4(\mathrm{x}x + y + z) + (x - z) = 152$. В силу второго равенства системы получим $4(\mathrm{x} + y + z) = 148$. Следовательно, 4n=148. Тогда n=37.

Ответ: 37.

5. Решение. ЧетырёхугольникAPOT вписан в окружность, построенную на отрезке PT как на диаметре. Четырёхугольник CROQ вписан в окружность, построенную на отрезке QR как на диаметре. (условие перпендикулярности) Угол PTA равен углу POA, угол COR равен углу CQR как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Угол CQR равен углу PTA (условие параллельности). Следовательно, углы POA и COR равны и точка O лежит на диагонали AC. Поэтому AC=$\sqrt{a^2 + b^2} = 5$.



Ответ: : $\sqrt{a^2+b^2}=5$.

Вариант № 2

1. На столе стоит кофейник, бутылка молока и одинаковые чашки по числу членов семьи Ивановых: папы, мамы и их детей. Сын Вася разлил содержимое кофейника и бутылки по чашкам в известных ему пропорциях. Например, сестре Маше он налил $1/4$ кофейника и $1/6$ бутылки молока. В результате все члены семьи пили кофе с молоком, кофейник и бутылка оказались пустыми, а чашки – полными. Сколько детей в семье Ивановых?

Ответ: 3 ребёнка.

2. В $8^{Б}$ классе 29 учеников, все они родились в один год, но в разные его дни. Каждый ученик либо абсолютно честен, т.е. никогда не сказал неправду, либо окончательный лгун: ни разу не сказал правды. Однажды весь класс расположился за круглым столом и каждый сидящий заявил, что он старше своих соседей справа и слева. Дальше поднялась группа товарищей из m человек и заявила, что каждый человек из этой группы младше своих соседей справа и слева. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение m .

Ответ: 27.

3. В колоде 24 карты и все они тузы, короли и дамы одной масти. Дам в 4 раза меньше, чем королей, а тузов не больше, чем королей и дам вместе взятых. Какое наименьшее число карт из колоды должен взять Петя, чтобы быть уверенным, что на руках у него хотя бы два короля?

Ответ: 14 карт.

4. Ученики $8^{Б}$ класса писали контрольную работу по математике и ни один из них не получил двойку. Петя сложил все отметки за контрольную в журнале и получил сумму 136. Сколько учеников в классе, если количество учеников, получивших «отлично» на 8 больше числа учеников, получивших «удовлетворительно»?

Ответ: 32.

5. На сторонах AB, BC, CD и DA прямоугольника $ABCD$ отмечены точки P, Q, R и T так, что прямые PT и QR параллельны, а прямые PR и QT, пересекающиеся в точке O, перпендикулярны. Найти сумму длин отрезков AO и OC, если длины сторон прямоугольника равны 12 и 5.

Ответ: $\sqrt{a^2+b^2}=13$.

Вариант № 3

1. На столе стоит кофейник, бутылка молока и одинаковые чашки по числу членов семьи Ивановых: папы, мамы и их детей. Сын Вася разлил содержимое кофейника и бутылки по чашкам в известных ему пропорциях. Например, сестре Маше он налил $1/5$ кофейника и $1/7$ бутылки молока. В результате все члены семьи пили кофе с молоком, кофейник и бутылка оказались пустыми, а чашки – полными. Сколько чашек стояло на столе Ивановых?

Ответ: 6 чашек.

2. В 8^B классе 30 учеников, все они родились в один год, но в разные его дни. Каждый ученик либо абсолютно честен, т.е. никогда не сказал неправду, либо окончательный лгун: ни разу не сказал правды. Однажды весь класс расположился за круглым столом и каждый сидящий заявил, что он старше своих соседей справа и слева. Дальше поднялась группа товарищей из m человек и заявила, что каждый человек из этой группы младше своих соседей справа и слева. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение m.

Ответ: 28.

3. В колоде 28 карт и все они валеты, дамы и короли одной масти. Валетов в колоде в 4 раза больше, чем дам, а королей меньше, чем дам и валетов вместе взятых. Какое наименьшее число карт из колоды должен взять Петя, чтобы быть уверенным, что на руках у него окажется хотя бы два валета?

Ответ: 18 карт.

4. Ученики $8^{\text{В}}$ класса писали контрольную работу по математике и ни один из них не получил двойку. Петя сложил все отметки за контрольную в журнале и получил сумму 129. Сколько учеников в классе, если количество учеников, получивших «отлично» на 5 больше числа учеников, получивших «удовлетворительно»?

Ответ: 31

5. На сторонах AB, BC, CD и DA прямоугольника $ABCD$ отмечены точки P, Q, R и T так, что прямые PT и QR параллельны, а прямые PR и QT, пересекающиеся в точке O, перпендикулярны. Найти сумму длин отрезков AO и OC, если длины сторон прямоугольника равны 15 и 8.

Ответ: : $\sqrt{a^2+b^2}=17.$

Вариант № 4

1. На столе стоит кофейник, бутылка молока и одинаковые чашки по числу членов семьи Ивановых: папы, мамы и их детей. Сын Вася разлил содержимое кофейника и бутылки по чашкам в известных ему пропорциях. Например, сестре Маше он налил $1/6$ кофейника и $1/8$ бутылки молока. В результате все члены семьи пили кофе с молоком, кофейник и бутылка оказались пустыми, а чашки – полными. Сколько детей в семье Ивановых?

Ответ: 5 детей.

2. В $8^{Г}$ классе 31 учеников, все они родились в один год, но в разные его дни. Каждый ученик либо абсолютно честен, т.е. никогда не сказал неправду, либо окончательный лгун: ни разу не сказал правды. Однажды весь класс расположился за круглым столом и каждый сидящий заявил, что он старше своих соседей справа и слева. Дальше поднялась группа товарищей из m человек и заявила, что каждый человек из этой группы младше своих соседей справа и слева. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение m.

Ответ: 29.

3. В колоде 26 карт и все они шестерки, семерки и восьмерки одной масти. Шестерок в 3 раза больше, чем восьмерок, а семерок не больше, чем шестерок. Какое наименьшее число карт из колоды должен взять Петя, чтобы быть уверенным, что на руках у него окажется хотя бы три шестерки?

Ответ: 17 карт.

4. Ученики $8^{Г}$ класса писали контрольную работу по математике и ни один из них не получил двойку. Петя сложил все отметки за контрольную в журнале и получил сумму 119. Сколько учеников в классе, если количество учеников, получивших «отлично» на 7 больше числа учеников, получивших «удовлетворительно»?

Ответ: 28.

5. На сторонах AB, BC, CD и DA прямоугольника $ABCD$ отмечены точки P, Q, R и T так, что прямые PT и QR параллельны, а прямые PR и QT, пересекающиеся в точке O, перпендикулярны. Найти сумму длин отрезков AO и OC, если длины сторон прямоугольника равны 35 и 12.

Ответ: $\sqrt{a^2+b^2}=37$.

Критерии проверки работ отборочного тура Олимпиады Росатом по математике, 8 класс, выезд 18-19 ноября 2023

Во всех задачах верный ответ без решения – 0 б.

1 задача

- 0б – нет никаких верных утверждений
- 1б – Найдена связь между числами А и В.
- 2б - задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения
- 3б - задача решена верно

2 задача

- 0б - нет никаких верных утверждений
- 1б – найдена сумма всех искомых чисел.
- 2б - задача решена с незначительной ошибкой, не влияющей на ход решения
- 3б - задача решена верно

3 задача

- 0б – нет никаких верных утверждений.
- 1б – представил заданное равенство в виде разности квадратов.
- 2б - задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения
- 3б - задача решена верно

4 задача

- 0б – нет никаких верных утверждений.
- 1б – выписано выражение для подсчёта числа закрашенных секторов при первом обходе и найдено их число.
- 2б - задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения
- 3б - задача решена верно

5 задача

- 0б - неверно построил чертёж.
- 1б - построил чертёж верно и отметил, что вокруг четырёхугольника можно описать окружность.
- 2б - задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения
- 3б - задача решена верно

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», выезд 1, математика, 8 класс

Вариант № 1

1. Коля написал число A, содержащее 2024 цифры, среди которых не было нуля. Затем зачеркнул из числа A последние 1012 цифр и получил число B. Поразмыслив, Коля обнаружил, что A делится на B и он смог написать их частное C. Сколько нулей содержалось в десятичной записи числа C?

2. Найти шесть различных целых чисел, для которых сумма любых пяти из них – квадрат целого числа.

3. Найти целые числа x, для которых $x^4+2x^3+3x^2+2x=8$.

4. Круговая доска разделена на 1000 секторов. Петя выбрал один из них, покрасил его, а также покрасил каждый седьмой сектор, следующий за ним по часовой стрелке (красил один сектор, потом пропускал 6 секторов и красил следующий и т.д.). Сколько секторов покрасил Петя, если известно, что ни один из секторов не был покрашен дважды?

5. Угол при вершине C треугольника ABC равен 120^0. Сторона AB, длина которой равна $\sqrt{3}$, является стороной правильного треугольника с центром в точке O, построенного вне треугольника ABC. Найти длину отрезка OC.

Приведём решение этого варианта.

1. Из условия задачи следует, что число A можно представить в виде

$$A=B\cdot 10^{1012}+D$$

Число D, зачеркнутое Колей, содержало 1012 цифр и делилось также на 1012-значное число B. Следовательно, число D можно представить в виде D=kB, где $0<k\le 9$ и k$\in N$.
Тогда число A запишется в виде $A=B\cdot 10^{1012}+D=B(10^{1012}+k)$. Поэтому частное от деления числа A на B равно $C=10^{1012}+k$. Следовательно, в десятичной записи числа C содержится 1011 нулей.
Ответ: 1011.

2. Пусть x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 – искомая шестерка целых чисел и $s=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$ – их сумма. По условию, s$-x_i=n_i{}^2$, где n_i – целые числа, i= 1,2,3,4,5,6. Складывая эти шесть равенств, получим 5s= $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2+x_5{}^2+x_6{}^2$. Остаётся найти шесть квадратов различных натуральных чисел, сумма которых была бы кратна 5. Пусть

$$n_1=1, n_2=2, n_3=3, n_4=4, n_5=5, n_6=10.$$

Тогда

$$5s= n_1{}^2+n_2{}^2+n_3{}^2+n_4{}^2+n_5{}^2+n_6{}^2=155.$$

Следовательно, s= 31. Тогда $x_1=s-n_1{}^2=30$, $x_2=s-n_2{}^2=27$, $x_3=s-n_3{}^2=22$, $x_4=s-n_4{}^2=15$, $x_5=s-n_5{}^2=6$, $x_6=s-n_6{}^2=-69$.
Ответ: (30;27;22;15;6;-69).

3. Представим заданное в условии равенство в виде

$$x^4+2x^3+3x^2+2x+1=9 \qquad (1)$$

Легко проверить, что $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$. С учётом этого равенство (1) примет вид

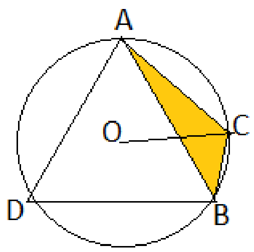
$$(x^2+x+1)^2=9.$$

Из этого равенства следует, что $x^2+x+1=-3$ и $x^2+x+1=3$. Первое уравнение не имеет решений, а второе уравнение имеет решения x= 1 и x= -2.
Ответ: x= 1 и x= -2.

4. Пусть выбранный изначально сектор имеет номер 1, и Петя красит при первом обходе круга сектора с номерами $a_k^1 = 1+7k,\ k = 0,1,...,142$ (всего 143 сектора, $a_{142}^1 = 995$). На следующем кругу будут покрашены сектора с номерами $a_k^2 = 2+7k,\ k = 0,1,...,142$ (всего 143 сектора, $a_{142}^2 = 996$). Также проходятся круги с номерами 3,4,5,6, при этом $a_k^m = m+7k,\ k = 0,1,2,...,142,\ m = 3,4,5,6.\ a_{142}^6 = 1000$. В каждом из них окрашивается 143 сектора. На седьмом кругу красятся сектора с номерами $a_k^7 = 7+7k,\ k = 0,1,...,141,\ a_{141}^7 = 994$. (142 окрашенных сектора). Последний шаг при $k = 142$ приводит к уже окрашенному сектору с номером 1. Всего окрашенных секторов $n = 7\cdot 143 - 1 = 1000$.

Ответ: 1000.

5 . Сумма углов $\measuredangle ACB + \measuredangle ADB = 180^0$ (угол при вершине C равен 120^0 по условию, а угол при вершине D равен 60^0 т.к. треугольник ABD-правильный) поэтому четырехугольник $ADBC$ вписан в окружность, описанную около треугольника ADB и OC – радиус этой окружности. Если длина стороны правильного треугольника равна a, то радиус описанной



около него окружности равен R= $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Следовательно, OC= 1.

Ответ: OC=1.

Вариант №2

1. Коля написал число A, содержащее 2022 цифры, среди которых не было нуля. Затем зачеркнул из числа A последние 1011 цифр и получил число B. Поразмыслив, Коля обнаружил, что A делится на B и он смог написать их частное C. Сколько нулей содержалось в десятичной записи числа C?

Ответ. 1010.

2. Найти пять различных целых чисел, для которых сумма любых четырех из них – квадрат целого числа.

Ответ. (51; 39; 19; -9; -45).

3. Найти целые числа x, для которых $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x = 224$.

Ответ. X=2.

4. Круговая доска разделена на 1000 секторов. Петя выбрал один из них, покрасил его, а также покрасил каждый восьмой сектор, следующий за ним по часовой стрелке (красил один сектор, потом пропускал 7 секторов и красил следующий и т.д.). Сколько секторов покрасил Петя, если известно, что ни один из секторов не был покрашен дважды?

Ответ.125 секторов.

5. Угол при вершине C треугольника ABC равен 135^0. Сторона AB, длина которой равна $2\sqrt{2}$, является стороной правильного четырехугольника с центром в точке O, построенного вне треугольника ABC. Найти длину отрезка OC.

Ответ: 2.

Вариант № 3

1. Коля написал число A, содержащее 2020 цифры, среди которых не было нуля. Затем зачеркнул из числа A последние 1010 цифр и получил число B. Поразмыслив, Коля обнаружил, что A делится на B и он смог написать их частное C. Сколько нулей содержалось в десятичной записи числа C?

Ответ 1009.

2. Найти четыре различных целых чисел, для которых сумма любых трех из них – квадрат целого числа.

Ответ. (9; 6;1;-6).

3. Найти целые числа x, для которых $x^4-2x^3+3x^2-2x=48$.

Ответ. x=3, x=−2.

4. Круговая доска разделена на 1000 секторов. Петя выбрал один из них, покрасил его, а также покрасил каждый шестой сектор, следующий за ним по часовой стрелке (красил один сектор, потом пропускал 5 секторов и красил следующий и т.д.). Сколько секторов покрасил Петя, если известно, что ни один из секторов не был покрашен дважды?

Ответ. 500 секторов.

5. Угол при вершине C треугольника ABC равен 144^0. Сторона AB треугольника является стороной правильного пятиугольника, расположенного вне треугольника. Радиус окружности с центром в точке O, описанной около пятиугольника, равен 3. Найти длину отрезка OC.

Ответ. 3.

Вариант № 4

1. Коля написал число A, содержащее 2018 цифры, среди которых не было нуля. Затем зачеркнул из числа A последние 1009 цифр и получил число B. Поразмыслив, Коля обнаружил, что A делится на B и он смог написать их частное C. Сколько нулей содержалось в десятичной записи числа C?

Ответ. 1008.

2. Найти три различных целых чисел, для которых сумма любых двух из них – квадрат целого числа.

Ответ. (6;3;−2).

3. Найти целые числа x, для которых $x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x=399$.

Ответ. x= 3.

4. Круговая доска разделена на 1000 секторов. Петя выбрал один из них, покрасил его, а также покрасил каждый пятый сектор, следующий за ним по часовой стрелке (красил один сектор, потом пропускал 4 секторов и красил следующий и т.д.). Сколько секторов покрасил Петя, если известно, что ни один из секторов не был покрашен дважды?

Ответ. 200 секторов.

5. Угол при вершине C треугольника ABC равен 150^0. Сторона AB, длина которой равна 4, является стороной правильного шестиугольника с центром в точке O, построенного вне треугольника ABC. Найти длину отрезка OC.

Ответ. 4.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», выезд 2, математика, 8 класс

Вариант № 1

1. Напишите целое число, квадрат которого в своей десятичной записи содержит подряд идущие цифры 2, 0, 2, 3.

2. Наибольший общий делитель чисел m и n равен 3, а дробь вида $\dfrac{3m+7n}{11m+2n}$ сократима. Найти числа, на которые может быть сокращена эта дробь.

3. Найти число m, для которого уравнение $x^2-(m-4)x+m-1=0$ имеет действительные корни x_1, x_2 и выражение $x_1^2+x_2^2$ принимает наименьшее возможное значение.

4. Сколько точек квадрата $-5 \le x \le 123, -5 \le y \le 123$ с целочисленными координатами $(x;y)$ удовлетворяют уравнению $x-2y=x^2-3xy+2y^2$?

5. В четырехугольник, у которого произведения длин противоположных сторон равны, можно вписать окружность. Около него можно также описать окружность радиуса 2,5. Длина одной из его сторон равна 3. Найти длины других сторон четырехугольника.

Приведём решение этого варианта.

1. Решение. Число $a=5\cdot 10^6+2023$ имеет квадрат:
$a^2=25\cdot 10^{12}+2023\cdot 10^7+2023^2=25\cdot 10^{12}+2023\cdot 10^7+4092529$.

Ответ: например, 5002023.

2. Решение. Заметим, что $\begin{cases}-2(3m+7n)+7(11m+2n)=71m,\\ 11(3m+7n)-3(11m+2n)=71n.\end{cases}$

Если d общий делитель чисел $3m+7n$ и $11m+2n$, то d является делителем чисел $71n$ и $71m$, а наибольшее значение такого d равно $НОД(71m,71n)=71\cdot НОД(m,n)=71\cdot 3=213$. Это значение достижимо, например, для $n=15, m=36, НОД(n,m)=3, 3m+7n=213, 11m+2n=426$. Делители числа $213=3\cdot 71$ являются числами, на которые может быть сокращена дробь.

Ответ: 3, 71, 213.

3. Решение. Условие существования корней:

$D=(m-4)^2-4(m-1)=m^2-12m+20\ge 0 \to m\in(-\infty;2]\cup[10;+\infty)$.

Экстремум: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m-4)^2-2(m-1)=m^2-10m+18$.

Квадратный трехчлен $m^2-10m+18$ принимает наименьшее значение на множестве $m\in(-\infty;2]\cup[10;+\infty)$ равное 2 при $m=2$.

Ответ: 2.

4. Решение. $x-2y=x^2-3xy+2y^2 \to x-2y=(x-2y)(x-y) \to (x-2y)(x-y-1)=0$.

Случай 1. $x-2y=0$

$\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}, t\in Z \to \begin{cases} -5\le 2t\le 123 \\ -5\le t\le 123 \end{cases} \to t=-2;-1;\ldots;61$ – 64 точки.

Случай 2. $x-y-1=0$

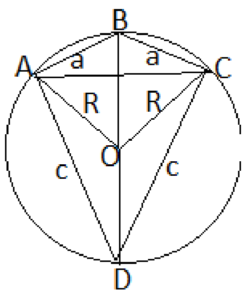
$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t \end{cases}, t\in Z \to \begin{cases} -5\le t+1\le 123 \\ -5\le t\le 123 \end{cases} \to t=-5;-4;\ldots;122$ – 128 точек.

Прямые $\begin{cases} x=2y \\ x-y-1=0 \end{cases}$ пересекаются в одной точке $(2;1)$ и она в квадрате, поэтому существует $128+64-1=191$ искомая точка.

Ответ: 191.

5. Решение. Пусть длины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ равны a,b,c,d соответственно. По условию в него можно вписать окружность, поэтому суммы длин его противоположных сторон равны: $a+c=b+d$. Из системы $\begin{cases} ac=bd \\ a+c=b+d \end{cases}$ следует, что пары чисел (a,c) и (b,d) являются корнями одного и того же квадратного уравнения (теорема Виета). Поэтому возможны два случая: $a=b,\ c=d$ или $a=d,\ b=c$.

Случай 1. $a=b,\ c=d$



Случай 2. $a=d,\ b=c$ отличается от первого только обозначениями.

Треугольник ABC равнобедренный, поэтому центр описанной около него окружности лежит на диагонали BD, являющейся диаметром описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности. Треугольник ABD прямоугольный:

$c^2+a^2=4R^2 \to c=\sqrt{4R^2-a^2}$.

Ответ: 3, 4, 4.

Вариант № 2

1. Напишите целое число, квадрат которого в своей десятичной записи содержит подряд идущие цифры 2, 0, 2, 4.

Ответ: например, 5002024.

2. Наибольший общий делитель чисел m и n равен 5, а дробь вида $\frac{2m-3n}{5m+7n}$ сократима. Найти числа, на которые может быть сокращена эта дробь.

Ответ: 5, 29, 145.

3. Найти наименьшее возможное значение выражения $x_1^2+x_2^2$, где x_1, x_2 – действительные корни квадратного уравнения $x^2-(m-5)x+5m-1=0$.
Ответ: 8.

4. Сколько точек квадрата $2 \le x \le 190,\ 2 \le y \le 190$ с целочисленными координатами $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $9x-23y+12=3x^2-7xy+2y^2$?

Ответ: 156.

5. В четырехугольник, у которого произведения длин противоположных сторон равны, можно вписать окружность. Около него можно также описать окружность радиуса 6,5. Длина одной из его сторон равна 5. Найти длины других сторон четырехугольника.

Ответ: 5, 12, 12.

Вариант № 3

1. Напишите целое число, квадрат которого в своей десятичной записи содержит подряд идущие цифры 2, 0, 2, 2.

Ответ: например, 5002022.

2. Наибольший общий делитель чисел m и n равен 7, а дробь вида $\frac{7n-3m}{2n+5m}$ сократима. Найти числа, на которые может быть сокращена эта дробь.

Ответ: 7, 41, 287.

3. Найти число m, для которого уравнение $x^2-(m-3)x+2m-1=0$ имеет действительные корни x_1, x_2 и выражение $x_1^2+x_2^2$ принимает наименьшее возможное значение.

Ответ: 1.

4. Сколько точек квадрата $-15 \le x \le 120,\ -15 \le y \le 120$ с целочисленными координатами $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $x-14y+15=2x^2-xy-3y^2$?

Ответ: 79.

5. В четырехугольник, у которого произведения длин противоположных сторон равны, можно вписать окружность. Около него можно также описать окружность радиуса 8,5. Длина одной из его сторон равна 8. Найти длины других сторон четырехугольника.

Ответ: 8, 15, 15.

Вариант № 4

1. Напишите целое число, квадрат которого в своей десятичной записи содержит подряд идущие цифры 2, 0, 2, 1.

Ответ: например, 5002021.

2. Наибольший общий делитель чисел m и n равен 9, а дробь вида $\frac{5m-3n}{13m+2n}$ сократима. Найти числа, на которые может быть сокращена эта дробь.

Ответ: 3, 7, 9, 21, 49, 63, 147, 441.

3. Найти наименьшее возможное значение выражения $x_1^2+x_2^2$, где x_1, x_2 – действительные корни квадратного уравнения $x^2-(m-1)x-2m-1=0$.
Ответ: 2.

4. Сколько точек квадрата $-150 \le x \le 3, -3 \le y \le 150$ с целочисленными координатами $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $2y-6x-4=2x^2-3xy-2y^2$?

Ответ: 83.

5. В четырехугольник, у которого произведения длин противоположных сторон равны, можно вписать окружность. Около него можно также описать окружность радиуса 12,5. Длина одной из его сторон равна 7. Найти длины других сторон четырехугольника.

Ответ: 7, 24, 24.

Критерии проверки работ отборочного тура Олимпиады Росатом по математике, 8 класс, выезд 25-26 ноября 2023

Во всех задачах верный ответ без решения – 0 б.

Задача 1

- 0 баллов – представлены рассуждения, которые не приводят к правильному ответу или задача не решалась.
- 1 балл – показано, что искомое число должно содержать «2023» в своей записи.
- 2 балла – задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.
- 3 балла – полностью верное решение.

Задача 2

- 0 баллов – приведенные соотношения для чисел m, n не приводят к правильному ответу или задача не решалась.
- 1 балл – найдены не все числа, на которые можно сократить дробь.
- 2 балла – допущена незначительная арифметическая ошибка в решении.
- 3 балла – получен верный обоснованный ответ.

Задача 3

- 0 баллов – нет никаких относящихся к решению преобразований уравнения или задача не решалась.
- 1 балл – правильно найдено условие существования действительных корней.
- 2 балла – задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.
- 3 балла – получен верный обоснованный ответ.

Задача 4

- 0 баллов – нет никаких верных утверждений или задача не решалась.
- 1 балл – заданное уравнение представлено в виде правильного произведения двух сомножителей.
- 2 балла – допущена незначительная арифметическая ошибка при подсчете точек в каждой из двух областей.
- 3 балла – получен верный обоснованный ответ.

Задача 5

- 0 баллов – неверно построил чертёж или не указано, что полученный четырехугольник удовлетворяет условиям задачи.
- 1 балл – доказано два случая равенства сторон четырехугольника.
- 2 балла – задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.
- 3 балла – получен верный обоснованный ответ.