Критерии проверки работ отборочного тура Олимпиады Росатом по математике,   9 класс, выезд 18-19 ноября 2023

Во всех задачах верный ответ без решения – 0 б.

Задача 1.

1 балл. Понял, что разница во времени прохождения одной и той же точки всегда одинакова и равна $\frac{s}{v}$. Правильно понял, что скорость на горном участке -- на подъеме $v\left(1-\frac{p}{100}\right)$, а на спуске $v\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

2 балла. При решении допущены арифметические ошибки.

3 балла. Задача решена верно.

Задача 2.

1 балл. Указал, что подкоренные выражения должны быть полными квадратами. Получил, что условие задачи выполняется при любых нечетных *p*.

2 балла. При нахождении простых чисел допущены арифметические ошибки.

3 балла. Задача решена верно.

Задача 3.

1 балл. Доказал, что для сократимости дроби достаточно $(n-1)\vdots 4$ и при $n=4m+1$дробь сократима на 4.

2 балла. При вычислении количества чисел допущены арифметические ошибки.

3 балла. Задача решена верно.

Задача 4.

1 балл. Нашел значения целых k , при которых существует два пересечения для заданных m.

2 балла. Написал правильную формулу для суммы абсцисс, но допустил арифметические ошибки при вычислениях.

3 балла. Задача решена верно.

Задача 5.

1 балл. Нашел хотя бы две пары равных углов.

2 балла. Нашел (возможно, с помощью дополнительного построения) подобные треугольники и отметил одинаковые соотношения сторон. Допустил небольшие ошибки при решении пропорции.

3 балла. Задача решена верно.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», выезд 1, математика, 9 класс

Вариант № 1

1. Этап велогонки с раздельным стартом состоит из двух горизонтальных участков и двух горных, разделенных горизонтальным участком. В момент, когда лидер подъехал к началу первого горного участка, он опережал следующего за ним соперника на $s = 100$ метров. Известно, что скорость на подъеме падает, а на спуске возрастает на 60% по сравнению со скоростью движения по равнине. Для всех участников гонки эта скорость одинаковая. Старт этапа находится на равнинной части, финиш – в конце спуска последнего горного участка. Длина подъемов, спусков, горизонтальных участков более 1 километра. На сколько метров лидер опередит едущего за ним велосипедиста на финише? Найти наименьшее расстояние в метрах (по шоссе) между первым и вторым участниками во время прохождения этапа.

2. Сколько существует простых чисел p на отрезке $[50;100]$ таких, что число $\sqrt{n}+\sqrt{n+2(p+1)}$ целое для некоторого натурального n ?

3. Сколько существует натуральных чисел $n \leq 1000$, для которых дробь $\dfrac{n^2+3n+4}{n^2+2n+5}$ сократима на 4?

4. На плоскости нарисовано 100 параллельных прямых с уравнениями $y = kx + m,\ m = 100, 101, \ldots, 199,$ при некотором целом числе k . Каждая из этих прямых пересекают гиперболу $y = \dfrac{400}{x}$ в двух точках. Найти наибольшее возможное значение суммы абсцисс всех точек пересечения? При каком k оно достигается?

5. Точки A, B, C и D окружности являются вершинами выпуклого четырехугольника $ABCD$.

Прямые AB и CD пересекаются в точке M , а прямые BC и AD – в точке N вне окружности. Отношение длин отрезков $DN : BM = 2$. Найти длину отрезка CN , если длина отрезка CM равна 1.

Приведём решение этого варианта.

1. Решение. Поскольку скорость прохождения гонки одинакова для всех велосипедистов, то **разница во времени п**рохождения любой точки на трассе (в том числе и на финише) тоже **одинакова**. Пусть v м/сек - скорость прохождения равнинного участка. Тогда эта разница во времени равна $t_0 = \dfrac{S}{v}$ сек. Учитывая условие, скорость движения в гору равна $v_1 = v\left(1 - \dfrac{60}{100}\right) = 0,4v$, а скорость движения под гору $v_2 = v\left(1 + \dfrac{60}{100}\right) = 1,6v$. Тогда максимальное расстояние между велосипедистами равно $t_0 \cdot 1,6v = 1,6S = 160$ м. Так как длина горных участков (подъем и спуск) по условию достаточно большая (1000 м , 160 < 1000) , в определенные моменты времени оба велосипедиста могут находиться одновременно на подъеме или одновременно на спуске. На финише первого велосипедиста в конце горного участка второй велосипедист будет находиться на спуске

и, следовательно, расстояние между велосипедистами будет $t_0 \cdot 1,6v = 1,6S = 160$ м. Наименьшее расстояние будет, когда оба велосипедиста будут на подъеме в гору, например, когда второй велосипедист подъедет к началу горы, а первый будет подниматься в гору. $S_{\min} = t_0 \cdot 0,4v = 0,4S = 40$ м.
Ответ: 160 м , 40 м.

2. Решение. На отрезке $[50;100]$ всего 10 простых чисел: 53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.

Очевидно, что для итогового целого результата каждое из слагаемых -- и $\sqrt{n}$, и $\sqrt{n+2(p+1)}$ должны быть целыми числами, а значит n и $n+2(p+1)$ - должны быть полными квадратами. Положим $n = k^2$, где k- натуральное число. Рассмотрим выражение $k^2 + 2(p+1)$. Легко увидеть , что для полного квадрата достаточно положить $p = 2k+1$, тогда $k^2 + 2((2k+1)+1) = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$. Таким образом, для **любого нечетного** $p = 2k+1$ можно подобрать $n = k^2$ так, чтобы исходная сумма корней будет целым (натуральным) числом. Все простые числа являются нечетными, следовательно, для любого простого числа p мы можем подобрать n , чтобы удовлетворялось условие задачи. Всего на заданном отрезке 10 простых чисел.
Ответ: 10

3. Решение. Для того, чтобы дробь была сократима на 4 нужно, чтобы и числитель и знаменатель дроби делились нацело на 4. Если и числитель, и знаменатель кратны 4 , то и их разность должна быть кратна 4. $n^2 + 3n + 4 - (n^2 + 2n + 5) = (n-1) \vdots 4$. Таким образом, n при делении на 4 дает остаток 1, или $n = 4k+1,\ k \in N$. Подчеркнем, что это условие является необходимым, но не достаточным. Для проверки подставим выражение для n в исходную дробь

$$\frac{(4k+1)^2 + 3(4k+1) + 4}{(4k+1)^2 + 2(4k+1) + 5} = \frac{16k^2 + 20k + 8}{16k^2 + 16k + 8} = \frac{4(4k^2 + 5k + 2)}{4(4k^2 + 4k + 2)}$$ - очевидно, эта дробь

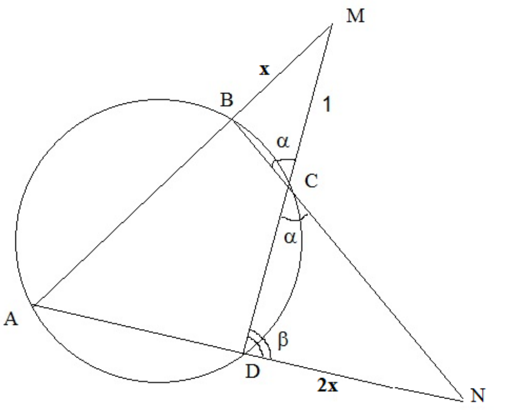
сокращается на 4. Таким образом, подходят все $n = 4k+1$, попадающие на отрезок $[1{,}1000]$, то есть каждое четвертое число *n* (или $k \in \{0;1;\ldots 249\}$). Соответственно, таких чисел 250.

Ответ: 250
Примечание. Во 2 варианте подстановка последовательности для n в исходную дробь не приводит к возможности сокращения дроби. Соответственно, в ответе «таких чисел нет».

4. Решение. Абсциссы точек пересечения этих прямых удовлетворяют уравнению $y = \frac{400}{x} = kx + m \Leftrightarrow kx^2 + mx - 400 = 0$. Для того, чтобы было два корня дискриминант уравнения должен быть положительным для всех заданных *m*. $D = m^2 + 1600k > 0$, $k > -\frac{m^2}{1600}$, $m \in \ 100,101\ldots,199$, то есть коэффициент k должен удовлетворять условию $k > -\frac{100^2}{1600} = -6,25$. По условию k принимает целые значения, то есть $k = -6,-5,\ldots$. Далее воспользуемся теоремой Виета для квадратного уравнения : $x_1 + x_2 = -\frac{m}{k}$. Сумма абсцисс точек пересечения легко вычисляется как сумма последовательных чисел: $\Sigma = -\sum_{m=100}^{199} \frac{m}{k} = -\frac{50 \cdot 299}{k}$. Самое большое значение этой величины достигается, очевидно, при $k = -1$. В итоге $\Sigma = 14950$

Ответ: 14950 при $k = -1$

5. Решение.



Пусть длина *BM=x* и, соответственно, *DN=2x*. Углы $BCM = DCN$ как вертикальные. Обозначим $NDC = \beta$. Тогда $ADC = 180 - \beta$, как смежный с углом NDC. По свойству вписанного четырехугольника сумма противоположных углов равна 180°. Следовательно, угол $ABC = 180^\circ - ADC = \beta$, а, соответственно, $MBC = 180^\circ - \beta$.
Далее рассмотрим треугольники $\triangle NDC$ и $\triangle MBC$ и применим к ним теорему синусов. Учтем также известное тригонометрическое соотношение $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$. Для $\triangle MBC$ получаем $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{1}{\sin\beta}$. Для $\triangle NDC$, аналогично, получаем $\frac{2x}{\sin\alpha} = \frac{CN}{\sin\beta}$. Сравнивая эти два соотношения, легко приходим к итоговому ответу $CN = \frac{2x}{x} \cdot 1 = 2$

Примечание. При решении можно не использовать теорему синусов, а продлить луч CB, и построить на нем точку K, так чтобы $MK = MC$ ($\triangle MCK$ - равнобедренный). Тогда $\triangle MBK$ будет подобен $\triangle NDC$, и из соотношений подобия легко получить ответ $CN = 2$.

Ответ : 2

Вариант № 2

1. Этап велогонки с раздельным стартом состоит из трех горизонтальных участков и трех горных, разделенных горизонтальными участками. В момент, когда лидер подъехал к началу первого горного участка, он опережал следующего за ним соперника на $s = 200$ метров. Известно, что скорость на подъеме падает, а на спуске возрастает на 55% по сравнению со скоростью движения по равнине. Для всех участников гонки эта скорость одинаковая. Старт этапа находится на равнинной части, финиш – в конце спуска последнего горного участка. Длина подъемов, спусков, горизонтальных участков более 1 километра. На сколько метров лидер опередит едущего за ним велосипедиста на финише? Найти наименьшее расстояние в метрах (по шоссе) между первым и вторым участниками во время прохождения этапа.

Ответ: 310 м, 90 м

2. Сколько существует простых чисел p на отрезке $[100;140]$ таких, что число $\sqrt{n}+\sqrt{n+3(p+2)}$ целое для некоторого натурального n?

Ответ: 9 чисел: 101,103,107,109,113,127,131,137 139

3. Сколько существует натуральных чисел $n \le 5000$, для которых дробь $\frac{n^2+5n+3}{n^2+4n+5}$ сократима на 8?

Ответ: Таких чисел нет

4. На плоскости нарисовано 25 параллельных прямых с уравнениями $y = kx + m,\ m = 20, 21, \ldots, 44$ при некотором целом числе k. Каждая из этих прямых пересекают гиперболу $y = \frac{16}{x}$ в двух точках. Найти наименьшее возможное значение суммы ординат всех пятидесяти точек пересечения прямых с гиперболой? При каком k оно достигается?

Ответ: $\Sigma_y = 800,\ \forall k \ne 0,\ k = -6, -7, \ldots$ (сумма не зависит от k)

5. Точки A, B, C и D окружности являются вершинами выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD – в точке N вне окружности. Отношение длин отрезков $DN : BM = 1:2$. Найти длину отрезка CN, если длина отрезка CM равна 2.

Ответ : 1

Вариант № 3

1. Этап велогонки с раздельным стартом состоит из четырех горизонтальных участков и четырех горных, разделенных горизонтальными участками. В момент, когда лидер подъехал к началу первого горного участка, он опережал следующего за ним соперника на $s = 150$ метров. Известно, что скорость на подъеме падает, а на спуске возрастает на 70% по сравнению со скоростью движения по равнине. Для всех участников гонки эта скорость одинаковая. Старт этапа находится на равнинной части, финиш – в конце спуска последнего горного участка. Длина подъемов, спусков, горизонтальных участков более 1 километра. На сколько метров лидер опередит едущего за ним велосипедиста на финише? Найти наименьшее расстояние в метрах (по шоссе) между первым и вторым участниками во время прохождения этапа.

Ответ : 255 м, 45 м.

2. Сколько существует простых чисел p на отрезке $[150;180]$ таких, что число $\sqrt{n}+\sqrt{n+4(p+3)}$ целое для некоторого натурального n ?

Ответ : 6 чисел: 151,157,163,167,173,179

3. Сколько существует натуральных чисел $n \le 500$, для которых дробь $\dfrac{n^2+4n+1}{n^2+3n+4}$ сократима на 22?

Ответ : 23

4. На плоскости нарисовано 50 параллельных прямых с уравнениями $y = kx+m,\ m = 20, 21, ..., 69$ при некотором целом числе k. Каждая из этих прямых пересекают гиперболу $y = \dfrac{20}{x}$ в двух точках. Найти наибольшее возможное значение суммы абсцисс всех точек пересечения? При каком k оно достигается?

Ответ : $\Sigma_x = 2225$ при $k = -1$.

5. Точки A, B, C и D окружности являются вершинами выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD – в точке N вне окружности. Отношение длин отрезков $DN : BM = 2:3$. Найти длину отрезка CN, если длина отрезка CM равна 6.

Ответ : 4

Вариант № 4

1. Этап велогонки с раздельным стартом состоит из пяти горизонтальных участков и пяти горных, разделенных горизонтальными участками. В момент, когда лидер подъехал к началу первого горного участка, он опережал следующего за ним соперника на $s = 300$ метров. Известно, что скорость на подъеме падает, а на спуске возрастает на 75% по сравнению со скоростью движения по равнине. Для всех участников гонки эта скорость одинаковая. Старт этапа находится на равнинной части, финиш – в конце спуска последнего горного участка. Длина подъемов, спусков, горизонтальных участков более 1 километра. На сколько метров лидер опередит едущего за ним велосипедиста на финише? Найти наименьшее расстояние в метрах (по шоссе) между первым и вторым участниками во время прохождения этапа.

Ответ : 525 м, 75 м

2. Сколько существует простых чисел p на отрезке $[180;200]$ таких, что число $\sqrt{n}+\sqrt{n+5(p+4)}$ целое для некоторого натурального n?

Ответ : 5 чисел: 181,191,193,197,199

3. Сколько существует натуральных чисел $n \le 200$, для которых дробь $\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+n+1}$ сократима на 3?

Ответ : 67

4. На плоскости нарисовано 40 параллельных прямых с уравнениями $y = kx + m,\ m = 15, 16, \ldots, 54$ при некотором целом числе k. Каждая из этих прямых пересекают гиперболу $y = \dfrac{36}{x}$ в двух точках. Найти наименьшее возможное значение суммы ординат всех пятидесяти точек пересечения прямых с гиперболой? При каком k оно достигается?

Ответ : $\Sigma_y = 1380,\ \forall k \ne 0,\ k = -1, 1, 2, \ldots$ (сумма не зависит от k)

5. Точки A, B, C и D окружности являются вершинами выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD – в точке N вне окружности. Отношение длин отрезков $DN : BM = 4:3$. Найти длину отрезка CN, если длина отрезка CM равна 9.

Ответ : 12

Росатом 9класс (Отборочный тур), Москва 29.10.2023

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1

1 балл. Обоснованно доказано одно из следующих утверждений:

а) Первый по списку -- лжец;

б) Последний по списку сказал правду;

в) Если r-й по списку -- лжец, то и предыдущие -- лжецы;

г) Если r-й по списку сказал правду; то последующие тоже сказали правду.

2 балла. Обоснованно доказаны как минимум три из утверждений а) - г).

3 балла. Задача решена верно

Задача 2.

1 балл. Получена формула, связывающая a и остальные члены последовательности.

2 балла. Решение недостаточно обоснованно.

3 балла. Задача решена верно.

Задача 3.

1 балл. Либо а) верно написана система уравнений;

либо б) задача решена при необоснованном условии $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

2 балла. Получено ограничение на $\max x_i$ и $\min x_i$.

3 балла. Задача решена верно

Задача 4.

1 балл. Верно решено хотя бы одно неравенство с модулем.

2 балла Верно решены все три неравенства с модулем.

3 балла .Задача решена верно.

Задача 5.

1 балл. Нарисован правильный рисунок и дополнительно: либо а) верно найдена пара равных углов; либо б) верно применена теорема о касательной и секущей.

2 балла. Доказано подобие треугольников.

3 балла. Задача решена верно

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 9 класс

Вариант № 1

1. В классном журнале $9^{А}$ находится список из 20 учащихся, часть из которых на любой вопрос всегда дает правдивый ответ, при этом остальные – всегда лгут. На вопрос учителя, обращенный к каждому из учеников класса: «Сколько, по его мнению, в классе учеников, говорящих только правду?» ученик, присутствующий в списке под номером $m, m = 1, 2, ..., 20$, отвечал: «Не больше $m-1$ ученика». Так ученик под номером 1 заявил, что в классе ни один ученик не говорит правду, а последний с номером 20 заявил, что в классе не менее одного лгуна. Сколько учеников в классе говорят только правду?

2. Среднее арифметическое 10 различных натуральных чисел равно 20 и a – максимальное из них. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение a.

3. На окружности расположены 100 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме трех чисел, следующих за этим числом по окружности в направлении по часовой стрелке. Найти сумму всех этих чисел.

4. Найдите числа x, для которых выполняются три неравенства:

$$|x^2 - 2x| \ge 3, |2x - 3| \ge x^2, |x^2 - 3| \ge 2|x|.$$

5. Окружность, проходящая через вершины A, B, C трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, касается боковой стороны AD. Найти длину диагонали AC трапеции, если длины ее оснований равны 1 и 4.

Приведём решение этого варианта.

1. Решение. Первый ученик - лжец. Если бы он сказал правду, то это прозвучало бы как: "Не более 0 учеников говорят правду", что противоречило бы тому, что он говорит правду. Последний (двадцатый) ученик говорит правду:" В классе не более 19 учеников говорит правду"-- что является истиной с учетом того, что первый ученик - лжец. Теперь анализируем высказывание второго ученика. Он говорит: "В классе не более одного ученика говорит правду". Но это высказывание не может быть правдой, так как мы знаем что 20-й уже точно говорит правду. Значит 2-й ученик не может говорить правду, следовательно он -- лжец. Девятнадцатый ученик говорит: "Не более 18 человек говорят правду", а мы знаем, что 1-й и 2-й -- лжецы. Значит 19-й ученик говорит правду. Продолжая аналогичные рассуждения, мы получаем, что первые 10 учеников - лжецы, а остальные 10 (начиная с 11 номера) - говорят правду.
Ответ: 10 учеников**.**

2. Решение. Расположим 10 натуральных различных чисел в порядке возрастания - $a_1, a_2, a_3, \dots a_{10}$. По условию $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}}{10} = 20$. Отсюда следует, что $a_{10} = 200 - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9)$. По условию задачи a_{10} принимает наибольшее возможное значение, значит сумма $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9$ должна быть минимальна. Наименьшие **натуральные различные** числа -- это последовательные натуральные числа, начиная с единицы $1+2+3+\cdots+9=\frac{(1+9)}{2}\cdot 9=45$. Таким образом получаем максимальное значение $a_{10}=200-45=155$.

Ответ: $a_{\max}=155$.

3. Решение. В этой задаче важно не просто угадать ответ, но и привести решение, и доказать единственность решения. Пусть $x_1>0, x_2>0, ..., x_n>0$ заданные положительные числа. По условию задачи выполняются соотношения:

$$
\begin{aligned}
&x_1^2 = x_2 + x_3 + x_4 \\
&x_2^2 = x_3 + x_4 + x_5 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x_{97}^2 = x_{98} + x_{99} + x_{100} \\
&x_{98}^1 = x_{99} + x_{100} + x_1 \\
&x_{99}^2 = x_{100} + x_1 + x_2 \\
&x_{100}^2 = x_1 + x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

Определим значения $a=\max_i x_i$ - наибольшее из всех чисел и $b=\min_i x_i$ - наименьшее из всех чисел. Пусть число с номером k максимальное: $x_k=a$. Пусть число с номером m - минимальное : $x_m=b$. Тогда $a^2=x_k^2=x_{k+1}+x_{k+2}+x_{k+3}\le 3a$, так как каждое x_i не больше a. Отсюда следует $a(a-3)\le 0$, и при положительных a это означает, что $a\le 3$. Аналогичные рассуждения по отношению к x_m и b приводят к $b^2=x_m^2=x_{m+1}+x_{m+2}+x_{m+3}\ge 3b$ и , следовательно , $b^2-3b=b(b-3)\ge 0$ и $b\ge 3$. Таким образом мы получили, что максимальное из чисел не может превышать 3, и одновременно минимальное из чисел не может быть меньше 3. Отсюда следует, что $a=b=3$, и все числа одинаковые и тоже равны 3. Их сумма равна 300.

Ответ: 300

4. Решение. При решении системы неравенств с модулями удобно воспользоваться процедурой возведения в квадрат правой и левой части неравенства. Это возможно, так как и справа и слева стоят заведомо неотрицательные величины. Следовательно,

$$|f(x)|\ge|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)\ge g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x)-g^2(x)\ge 0$$

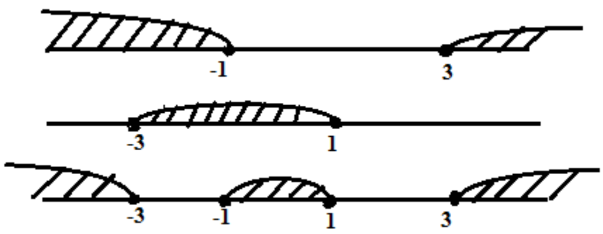
Далее разлагаем выражение как разность квадратов

$$(f(x)-g(x))\cdot(f(x)+g(x))\ge 0.$$

Таким образом, получается система алгебраических неравенств:

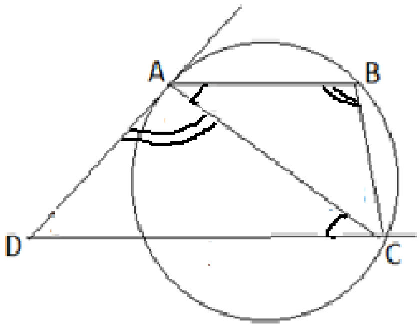
$$
\begin{cases}
(x^2-2x-3)(x^2-2x+3)\ge 0 \\
(2x-3-x^2)(x^2+2x-3)\ge 0 \\
(x^2-2x-3)(x^2+2x-3)\ge 0
\end{cases}
$$

При нахождении корней следует учесть, что выражения в скобках повторяются, выражение x^2-2x+3 корней не имеет и всегда положительно. Корни квадратных уравнений находятся легко : -3, -1, 1, 3 . Далее решаем систему методом интервалов



Границы всюду принадлежат выделенным областям. Из полученной картины видно, что всем трем неравенствам одновременно удовлетворяют только две точки : $x=-3$ и $x=-1$.
Ответ: $\{-3,-1\}$

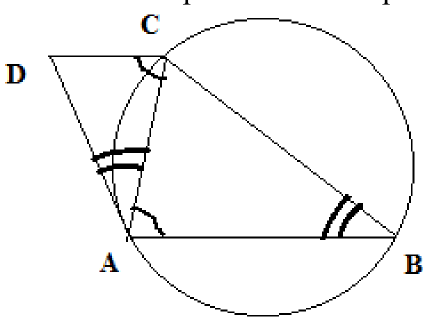
5. Решение.



Стороны AB и DC параллельны по свойству трапеции. Углы CAB и ACD равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и DC и секущей (хорды) AC. Отметим, что секущая AC в общем случае не проходит через центр окружности. Вписанный угол ABC опирается на большую дугу AC и равен половине угловой величины этой дуги . Но угол DAC - это угол между касательной DA и секущей (хордой) AC, и он тоже равен половине угловой дуги AC. Таким образом углы ABC и DAC равны. Следовательно, треугольники ADC и ABC подобны по трем углам . Пропорции между их сторонами имеют вид: $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CD}$. Подставляя значения длин AB и CD получаем

$$\frac{1}{AC}=\frac{AC}{4}\to AC^2=4\to AC=2\,.$$

Примечание. Рисунок может отличаться от приведенного, но при сохранении обозначений все рассуждения и ответ сохраняются. Например,



Ответ : $AC=2$

Вариант № 2

1. В классном журнале $9^{Б}$ находится список из 22 учащихся, часть из которых на любой вопрос всегда дает правдивый ответ, при этом остальные – всегда лгут. На вопрос учителя, обращенный к каждому из учеников класса: «Сколько, по его мнению, в классе учеников, говорящих только правду?» ученик, присутствующий в списке под номером $m, m=1,2,...,22$, отвечал: «Не больше $m-1$ ученика». Так ученик под номером 1 заявил, что в классе ни один ученик не говорит правду, а последний с номером 22 заявил, что в классе не менее одного лгуна. Сколько учеников в классе говорят только правду?

Ответ: 11 учеников**.**

2. Среднее арифметическое 15 различных натуральных чисел равно 25 и a – максимальное из них. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение a.

Ответ: $a_{\max}=270$.

3. На окружности расположены 200 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме четырех чисел, следующих за этим числом по окружности в направлении по часовой стрелке. Найти сумму всех этих чисел.

Ответ: 800.

4. Найдите числа x, для которых выполняются три неравенства:

$$|x^2-3x|\geq 4,\ |3x-4|\geq x^2,\ |x^2-4|\geq 3|x|$$

Ответ: $\{-1,-4\}$.

5. Окружность, проходящая через вершины A,B,C трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, касается боковой стороны AD. Найти длину диагонали AC трапеции, если длины ее оснований равны 1 и 2.

Ответ : $AC=\sqrt{2}$

Вариант № 3

1. В классном журнале 9[В] находится список из 24 учащихся, часть из которых на любой вопрос всегда дает правдивый ответ, при этом остальные – всегда лгут. На вопрос учителя, обращенный к каждому из учеников класса: «Сколько, по его мнению, в классе учеников, говорящих только правду?» ученик, присутствующий в списке под номером $m, m=1,2,...,24$, отвечал: «Не больше $m-1$ ученика». Так ученик под номером 1 заявил, что в классе ни один ученик не говорит правду, а последний с номером 24 заявил, что в классе не менее одного лгуна. Сколько учеников в классе говорят только правду?

Ответ: 12 учеников**.**

2. Среднее арифметическое 20 различных натуральных чисел равно 30 и a – максимальное из них. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение a.

Ответ: $a_{\max}=410$.

3. На окружности расположены 50 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме пяти чисел, следующих за этим числом по окружности в направлении по часовой стрелке. Найти сумму всех этих чисел.

Ответ: 250.

4. Найдите числа x, для которых выполняются три неравенства:

$$|x^2+5x|\geq 6,\ |5x-6|\geq x^2,\ x^2+6\geq 5|x|.$$

Ответ: $\{-6,\ 1, \pm 2, \pm 3\}$.

5. Окружность, проходящая через вершины A, B, C трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, касается боковой стороны AD. Найти длину диагонали AC трапеции, если длины ее оснований равны 2 и 4.
Ответ : $AC = 2\sqrt{2}$.

Вариант № 4

1. В классном журнале $9^{Г}$ находится список из 18 учащихся, часть из которых на любой вопрос всегда дает правдивый ответ, при этом остальные – всегда лгут. На вопрос учителя, обращенный к каждому из учеников класса: «Сколько, по его мнению, в классе учеников, говорящих только правду?» ученик, присутствующий в списке под номером $m, m = 1, 2, ..., 18$, отвечал: «Не больше $m-1$ ученика». Так ученик под номером 1 заявил, что в классе ни один ученик не говорит правду, а последний с номером 18 заявил, что в классе не менее одного лгуна. Сколько учеников в классе говорят только правду?
Ответ: 9 учеников**.**

2. Среднее арифметическое 18 различных натуральных чисел равно 20 и a – максимальное из них. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение a.
Ответ: $a_{\max} = 207$.

3. На окружности расположены 80 положительных чисел так, что квадрат каждого числа равен сумме шести чисел, следующих за этим числом по окружности в направлении по часовой стрелке. Найти сумму всех этих чисел.
Ответ: 480.

4. Найдите числа x, для которых выполняются три неравенства:
$$\left|x^2 + 4x\right| \geq 5, \left|4x - 5\right| \geq x^2, x^2 + 5 \geq 4\left|x\right|$$
Ответ: $\{-5,\ 1\}$.

5. Окружность, проходящая через вершины A, B, C трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, касается боковой стороны AD. Найти длину диагонали AC трапеции, если длины ее оснований равны 4 и 9.
Ответ : $AC = 6$.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», выезд 2, математика, 9 класс

Вариант № 1

1. Петя живет рядом со школой. Каждый день в 7 часов утра Петя приезжает на велосипеде к дому Васи, чтобы отвести его на своем велосипеде в школу. Однажды Вася вышел из дома пораньше, решил не ждать приезда Пети, а идти ему навстречу пешком. Они встретились, Петя привез Васю в школу на 18 минут раньше обычного. Сколько времени было на часах Васи, когда он встретил Петю на дороге? Скорости движения пешком и на велосипеде постоянные.

2. Петя и Коля по очереди написали на доске по 20 не равных нулю чисел, расположив их по кругу. Когда Петя посмотрел на доску внимательно, он заметил, что каждое число им написанное, равно сумме соседних с ним чисел, написанных Колей, а каждое число, написанное Колей, равно произведению соседних с ним чисел. Он сообщил об этом Коле и стер с доски все числа. Какова сумма всех чисел, написанных на доске Колей?

3. Сумма двух обыкновенных, несократимых дробей вида $\frac{p}{400}>0$ и $\frac{q}{600}>0$ – несократимая дробь. Найти наименьшее возможное значение ее знаменателя.

4. Петя и Коля написали на доске по два приведенных квадратных трехчлена с дискриминантами 1, 4, 9 и 16. Петя выбрал по одному корню от каждого из четырех трехчленов, сложил их и получил сумму a. То же самое сделал Коля с оставшимися четырьмя корнями и получил число b. Какие значения могла при этом принять величина $a-b$?

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и $AB=AD$. На сторонах BC и DC отмечены точки M и N так, что $\measuredangle BAD=2\measuredangle MAN$ и $MB=1,\ ND=2$. Найти длину отрезка MN.

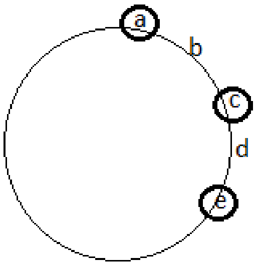
Приведём решение этого варианта.

1. Решение.

Обозначим место выхода Васи через A, место встречи – через B. Восемнадцатиминутное опережение графика образуется из-за того, что Петя **дважды** не проехал путь AB, то есть однократный проезд от A до B длится 9 минут. Именно на это время Петя и Вася встретились раньше, чем предполагалось по графику, то есть встреча произошла в 6 часов 51 минут.

Ответ: 6 часов 51 минута

2. Решение.



Рассмотрим 5 стоящих подряд чисел, так что первое, третье и пятое написано Петей, а второе и четвертое – Колей. Обозначим эти числа a,b,c,d,e. По условию $b = ac,\ d = ce,\ c = b + d$. Отсюда следует $c = ac + ce = c(a + e)$. Поскольку $c \neq 0$, сразу получаем $a + e = 1$, то есть сумма любых двух чисел, написанных Петей и стоящих через один равна 1. Всего таких пар 10, поэтому сумма всех чисел, написанных Петей, равна 10. Теперь если перебрать все c, написанные Петей, и их сложить, то каждое из чисел «b и d» из пятерок встретится дважды. Поэтому сумма чисел, написанных Колей в два раза меньше, суммы чисел, написанных Петей, т.е. эта сумма равна 5.

Ответ: 5

Примечание. Легко угадать частный случай: Петя написал все одинаковые числа = 0,5 , а Коля – все одинаковые числа – 0, 25. Ответ, естественно, остается правильным, но все-таки это именно частный случай.

3. Решение.

$$\frac{p}{400} + \frac{q}{600} = \frac{3p + 2q}{1200}$$

Знаменатель последней дроби $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$. По условию $\frac{p}{400}$ и $\frac{q}{600}$ - несократимые дроби, следовательно, среди делителей p нет 2 и 5, а среди делителей q нет 2, 3 и 5. Число $3p + 2q = 2(p + q) + p$ - нечетное, и $3p + 2q = 3(p + q) - q$ - не делится на 3, поэтому $3p + 2q$ не может делиться на 2 и 3. Значит, максимальное возможное число, на которое можно сократить данную сумму – это 25. (например, при $p = 1$ и $q = 11$). Таким образом, наименьший знаменатель дроби равен $2^4 \cdot 3 = 48$.

Ответ: 48

4. Решение.

Обозначим корни уравнений через x_1 и x_2, y_1 и y_2, z_1 и z_2, t_1 и t_2.

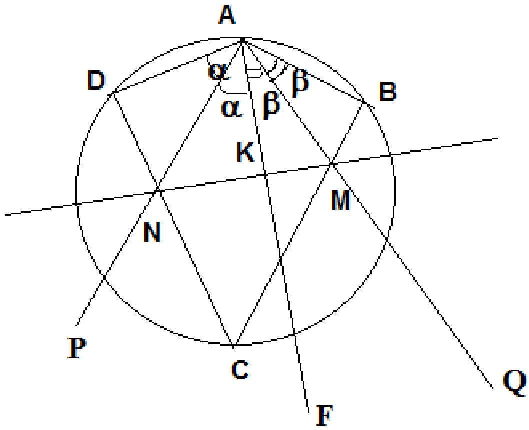
Корни приведенного квадратного трехчлена определяются формулой $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$.

Соответственно, разность корней $x_1 - x_2 = \pm\sqrt{D_1} = \pm 1$, аналогично $y_1 - y_2 = \pm 2$, $z_1 - z_2 = \pm 3$, $t_1 - t_2 = \pm 4$. Таким образом, величина $a - b$ может принимать только четные значения от -10 до 10. В итоге возможны следующие значения :

$$\pm(1+2+3+4)=\pm 10$$
$$\pm(-1+2+3+4)=\pm 8$$
$$\pm(1-2+3+4)=\pm 6$$
$$\pm(1+2-3+4)=\pm 4$$
$$\pm(1+2+3-4)=\pm 2$$
$$\pm(1-2-3+4)=0$$

Ответ: 1 $a-b=\{0;\pm 2;\pm 4;\pm 6;\pm 8;\pm 10\}$

5. Решение.



Обозначим $\measuredangle DAN=\alpha$, а $\measuredangle BAM=\beta$. По условию задачи $\measuredangle NAM=\alpha+\beta$. Построим точку K, симметричную точке D, относительно прямой AN. Из этого построения следует, что $\measuredangle NAK=\alpha$, $AD=AK$ и $DN=KN$. Заметим, что точка K симметрична точке B относительно прямой AM: $\measuredangle BAM=\measuredangle MAK=\beta$, $AB=AK$. Следовательно, $BM=MK$. Докажем, что точка K попадает на отрезок MN. Для этого достаточно доказать, что $\measuredangle MKN=180^0$. Рассмотрим треугольники ADN и AKN. Они равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\measuredangle ADN=\measuredangle AKN$. Аналогично из равенства треугольников ABM и AKM получаем, что $\measuredangle ABM=\measuredangle AKM$. Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $\measuredangle ADC+\measuredangle ABC=180^\circ$. Следовательно и $\measuredangle AKN+\measuredangle AKM=\measuredangle MKN=180^\circ$. Значит, точка K действительно лежит на отрезке MN, и длина MN равна сумме длин NK и KM и значит $MN=MK+NK=ND+MB=1+2=3$.
Ответ : 3.

Вариант № 2

1. Петя живет рядом со школой. Каждый день в 7 часов утра Петя приезжает на велосипеде к дому Васи, чтобы отвести Васю на своем велосипеде в школу. Однажды Вася вышел из дома пораньше, решил не ждать приезда Пети, а идти ему навстречу пешком. Они встретились, Петя привез Васю в школу на 14 минут раньше обычного. Сколько времени было на часах Васи, когда он встретил Петю на дороге? Скорости движения пешком и на велосипеде постоянные.
Ответ: 6 часов 53 минут.

2. Петя и Коля по очереди написали на доске по 40 чисел не равных нулю, расположив их по кругу. Когда Петя посмотрел на доску внимательно, он заметил, что каждое число им написанное, равно сумме соседних с ним чисел, написанных Колей, а каждое число,

написанное Колей, равно произведению соседних с ним чисел. Он сообщил об этом Коле и стер с доски все числа. Какова сумма всех чисел, написанных на доске Петей?
Ответ: 20.

3. Сумма двух обыкновенных, несократимых дробей вида $\frac{p}{600} > 0$ и $\frac{q}{800} > 0$ – несократимая дробь. Найти наименьшее возможное значение ее знаменателя.
Ответ: 96.

4. Петя и Коля написали на доске по два приведенных квадратных трехчлена с дискриминантами 1, 4, 16 и 25. Петя выбрал по одному корню от каждого из четырех трехчленов, сложил их и получил сумму a. То же самое сделал Коля с оставшимися четырьмя корнями и получил число b. Какие значения могла при этом принять величина $a-b$?
Ответ: $a-b=\{0;\pm2;\pm4;\pm6;\pm8;\pm10;\pm12\}$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и $AB = AD$. На сторонах BC и DC отмечены точки M и N так, что $\measuredangle BAD = 2\measuredangle MAN$ и $MB = 2,\ ND = 3$. Найти длину отрезка MN.
Ответ: 5.

Вариант № 3

1. Петя живет рядом со школой. Каждый день в 7 часов утра Петя приезжает на велосипеде к дому Васи, чтобы отвести Васю на своем велосипеде в школу. Однажды Вася вышел из дома пораньше, решил не ждать приезда Пети, а идти ему навстречу пешком. Они встретились, Петя привез Васю в школу на 16 минут раньше обычного. Сколько времени было на часах Васи, когда он встретил Петю на дороге? Скорости движения пешком и на велосипеде постоянные.
Ответ: 6 часов 52 минуты.

2. Петя и Коля по очереди написали на доске по 32 числа не равных нулю, расположив их по кругу. Когда Петя посмотрел на доску внимательно, он заметил, что каждое число им написанное, равно сумме соседних с ним чисел, написанных Колей, а каждое число, написанное Колей, равно произведению соседних с ним чисел. Он сообщил об этом Коле и стер с доски все числа. Какова сумма всех чисел, написанных на доске Петей и Колей?
Ответ: 24.

3. Сумма двух обыкновенных, несократимых дробей вида $\frac{p}{600} > 0$ и $\frac{q}{1600} > 0$ – несократимая дробь. Найти наименьшее возможное значение ее знаменателя.
Ответ: 192.

4. Петя и Коля написали на доске по два приведенных квадратных трехчлена с дискриминантами 4, 9, 16 и 25. Петя выбрал по одному корню от каждого из четырех трехчленов, сложил их и получил сумму a. То же самое сделал Коля с оставшимися четырьмя корнями и получил число b. Какие значения могла при этом принять величина $a-b$?
Ответ: $a-b=\{0;\pm2;\pm4;\pm6;\pm8;\pm10;\pm14\}$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и $AB = AD$. На сторонах BC и DC отмечены точки M и N так, что $\measuredangle BAD = 2\measuredangle MAN$ и $MB = 4, ND = 3$. Найти длину отрезка MN.
Ответ : 7.

Вариант № 4

1. Петя живет рядом со школой. Каждый день в 7 часов утра Петя приезжает на велосипеде к дому Васи, чтобы отвести Васю на своем велосипеде в школу. Однажды Вася вышел из дома пораньше, решил не ждать приезда Пети, а идти ему навстречу пешком. Они встретились, Петя привез Васю в школу на 10 минут раньше обычного. Сколько времени было на часах Васи, когда он встретил Петю на дороге? Скорости движения пешком и на велосипеде постоянные.
Ответ. 6 часов 55 минут.

2. Петя и Коля по очереди написали на доске по 64 числа не равных нулю, расположив их по кругу. Когда Петя посмотрел на доску внимательно, он заметил, что каждое число им написанное, равно сумме соседних с ним чисел, написанных Колей, а каждое число, написанное Колей, равно произведению соседних с ним чисел. Каждый из ребят знал сумму чисел, которых он написал на доске. На сколько эта сумма оказалась больше у Пети, чем у Коли?
Ответ : на 16.

3. Сумма двух обыкновенных, несократимых дробей вида $\frac{p}{200} > 0$ и $\frac{q}{600} > 0$ – несократимая дробь. Найти наименьшее возможное значение ее знаменателя.
Ответ : 3.

4. Петя и Коля написали на доске по два приведенных квадратных трехчлена с дискриминантами 9, 16, 25 и 36. Петя выбрал по одному корню от каждого из четырех трехчленов, сложил их и получил сумму a. То же самое сделал Коля с оставшимися четырьмя корнями и получил число b. Какие значения могла при этом принять величина $a - b$?
Ответ : $a - b = \{0; \pm 2; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 10 \pm 12; \pm 18\}$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и $AB = AD$. На сторонах BC и DC отмечены точки M и N так, что $\measuredangle BAD = 2\measuredangle MAN$ и $MB = 2, ND = 4$. Найти длину отрезка MN.
Ответ : 6.

Критерии проверки работ отборочного тура Олимпиады Росатом по математике, 9 класс, выезд 25-26 ноября 2023

Во всех задачах верный ответ без решения – 0 б.

Задача 1.

1 балл. Обосновал, что велопробег Пети меньше обычного на удвоенный отрезок до встречи

2 балла. Написал соотношение или уравнение, но при решении допущены арифметические ошибки.

3 балла. Задача решена верно.

Задача 2.

1 балл. Выписал правильные соотношения для нескольких чисел, идущих подряд.

2 балла. Показал, что для некоторых чисел, написанных Петей , $x_k + x_{k+2} = 1$, но не получил окончательный ответ. Возможно, нашел частный случай равенства чисел (типа 1/2, 1/4, 1/2, 1/4...) и показал, что они удовлетворяют условию задачи.

3 балла. Задача решена верно.

Задача 3.

1 балл. Верно разложил исходные знаменатели (400 и 600) на множители и показал каких множителей не может быть у p и q .

2 балла. Доказал, на какое число может быть сокращена итоговая дробь, но не привел подтверждающий ответ.

3 балла. Задача решена верно.

Задача 4.

1 балл. Верно нашел разность корней в каждом квадратном уравнении.

2 балла. Получил верный ответ, но есть пробелы в обосновании.

3 балла. Задача решена верно.

Задача 5.

1 балл. Верно построил рисунок и нашел соотношения между углами, определил (возможно, с помощью дополнительного построения) наличие равнобедренных треугольников, необходимых для решения задачи.

2 балла. Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 балла. Задача решена верно.